



FONDO PIZZOFALCONE



BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio

HK



17

Palchetto

Num.º d'ordine

28

11-B-31

NAZIONALE  
B. Prov.

I

VITT

B.P

2  
1213



COURS  
DE  
MATHÉMATIQUES.

---

TOME V.

---

OU!

AT

PAR

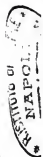
MIEN

IN L'

—

T

—



ALEX I.



1760



# COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES,

PAR M. L'ABBÉ SAURI,  
ANCIEN PROFESSEUR DE PHILOSOPHIE  
EN L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER.

---

TOME CINQUIÈME.

---



A PARIS,

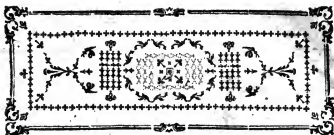
Aux Dépens de RUAULT, Libraire, rue de la Harpe,  
près de la rue Serpente.

---

M D C C L X X I V.

*Avec Approbation, & Privilège du Roi.*

10-1-20



COURS COMPLET  
DE  
MATHÉMATIQUES.



---

SECONDE PARTIE.

---

CALCUL INTÉGRAL.

---

*Des Méthodes de M. Fontaine.*

201. M. FONTAINE dans ses Mémoires propose deux méthodes d'intégrer, dont nous croyons devoir donner une idée aux commençans.

La première méthode est fondée sur les quatre théorèmes suivans.

202. THÉOREME 1. *V étant une fonction homogène de plusieurs variables,  $x, y, z, u$ , &c. dont la dimension soit  $e$ , & la différence  $dV = Mdx + Ndy + Pd\zeta + Qdu$ , &c. (A),*  
Tome V. A



on aura  $eV = Mx + Ny + Pz + Qu + \&c.$  Si nous substituons dans  $V$ ,  $x + dx = x'$  au lieu de  $x$ ,  $y + dy = y'$  au lieu de  $y$ ,  $\&c.$  que nous prenions les différentielles  $dx$ ,  $dy$ ,  $\&c.$  proportionnelles à  $x$ ,  $y$ ,  $\&c.$  (ce qui est très permis), & qu'alors  $V$  devienne  $V'$ , on aura  $V' - V = dV$  &  $V'$ ,  $V$ , seront des fonctions semblables l'une de  $x'$ ,  $y'$ ,  $\&c.$  l'autre de  $x$ ,  $y$ ,  $\&c.$  donc puisque la dimension de  $V$  est  $= e$ , on aura par la propriété des fonctions semblables,  $V' : V :: x'^e : x^e :: y'^e : y^e :: z'^e : z^e$ ,  $\&c.$  donc  $V' - V : V :: x'^e - x^e : x^e :: y'^e - y^e : y^e :: z'^e - z^e : z^e$ ,  $\&c.$  ou  $dV : V :: d.x^e : x^e :: d.y^e : y^e :: d.z^e : z^e$ ,  $\&c.$  ou  $d.V : V :: e dx : x :: e dy : y :: e dz : z$ ,  $\&c.$  (\*)

donc  $dV = eV \frac{dx}{x}$ ; de plus  $dx : x :: dy : y :: dz : z$  (\*\*); donc  $dy = y \frac{dx}{x}$ ;  $dz = z \frac{dx}{x}$ ;  $du = u \frac{dx}{x}$ ;  $\&c.$  donc en substituant les valeurs de  $dV$ ,  $dy$ ,  $dz$ ,  $\&c.$  dans l'équation (A) il viendra  $eV \frac{dx}{x} = M dx + Ny \frac{dx}{x} + Pz \frac{dx}{x} + \&c.$  &  $eV = Mx + Ny + Pz + \&c.$

Soit  $V = axx + byz$ , on aura  $dV = 2ax dx + by dz + bz dy$ ; & par le théorème  $eV = 2V = 2axx + byz + bz y = 2axx + 2byz$ .

(\*) Car la différentielle de  $x^e$  est  $ex^{e-1} dx$ ; or  $ex^{e-1} dx : x^e :: e dx : x$ .

(\*\*) Car  $edx : x :: edy : y$ ; donc en divisant les antécédents par  $e$ ,  $dx : x :: dy : y$ .

Il est visible aussi que dans ce cas en supposant  $x + dx = x'$ ,  $y + dy = y'$ ,  $z + dz = z'$ ; & faisant de plus  $x : dx :: y : dy :: z : dz$ , on aura  $V' : V :: ax'x' + by'z' : axx + byz :: x'x' : xx$ , &c. ce qui n'auroit pas lieu si  $V$  n'étoit pas une fonction homogène par rapport aux variables  $x, y, z$ : ainsi si  $V$  étoit  $= ax + byz$ , on n'auroit pas  $ax' + by'z' : ax + byz :: x'x' : xx$ ; car  $by'z' : byz :: y'y' : yy :: x'x' : xx$ ; mais  $ax'$  n'est pas à  $ax$  comme  $x'x' : xx$ .

On peut néanmoins rendre le théorème général au moyen d'un paramètre  $p$ , qu'on pourra regarder comme l'unité (qui est une quantité arbitraire) & qu'on traitera comme constant ou comme variable, suivant le besoin. Si, par exemple, on a  $V = ax + byz$ , on fera  $V = apx + byz$ , fonction homogène de deux dimensions. Ainsi on aura  $dV = xdp + apdx + bydz$ ; & par le théorème,  $eV = 2V = 2apx + 2byz = 2ax + 2byz$  en mettant 1 au lieu de  $p$ .

En général si  $V$  est une fonction de dimension  $e$  par rapport aux variables  $x, y, z$ , &c. & que dans le cas où cette fonction n'est point homogène par rapport à ces variables, on introduise le paramètre  $p$  dans les termes qui n'ont pas la dimension  $e$  par rapport à ces variables  $x, y, z$ , &c. on aura  $eV = Mx + Ny + Pz$ , &c.  $+ Tp$ . Donc si on fait  $dV = 0$ , on aura  $Mdx + Ndy + Pdz$ , &c.  $+ Tdp = 0$ , ou  $dx + \frac{N}{M}dy + \frac{P}{M}dz$ , &c.  $+ \frac{T}{M}dp = 0$ ; & en supposant  $\frac{N}{M} = d'$ ,  $\frac{P}{M} = d''$ , &c.  $\frac{T}{M}$

$= n'$ , on aura  $dx + a'dy + b'dz, \&c. + n'dp = 0$ , les coefficients  $a', b', \&c.$  étant tous de dimension nulle par rapport aux variables  $x, y, \&c. \& p$ . Si l'on fait  $p$  constante, on aura  $dp = 0$ , & l'équation deviendra  $dx + a'dy + b'dz, \&c. = 0$ , les coefficients  $a', b', \&c.$  restant les mêmes.

Soit proposé d'intégrer l'équation  $dx + A dy + B dz, + C du + \&c. = 0$ . Supposons d'abord que les coefficients  $A, B, \&c.$  soient des fonctions homogènes de dimension nulle par rapport aux variables  $x, y, z, \&c.$  la question se réduit à trouver la fonction  $V$  de ces mêmes variables, dont la différence est  $dV = M dx + N dy + P dz + Q du, \&c.$  telle que l'on ait  $dx + \frac{N}{M} dy$

$$+ \frac{P}{M} dz, \&c. = dx + A dy + B dz, \&c.$$

ou telle que l'on ait  $\frac{N}{M} = A, \frac{P}{M} = B, \frac{Q}{M} = C, \&c.$  donc on doit avoir  $dV = M dx + N dy + P dz, \&c. = M dx + M A dy + M B dz, \&c.$   $M$  étant une fonction homogène & inconnue des variables  $x, y, \&c.$

Supposons que la dimension inconnue de la fonction  $V$  soit  $= e$ , on aura par le théorème premier  $e V = M x + M A y + M B z + \&c.$

$$\text{donc } \frac{dV}{eV} = \frac{1}{e}, \frac{dV}{V} = \frac{1}{x + Ay + Bz, \&c.} dx + \frac{A}{x + Ay + Bz, \&c.} dy + \frac{B}{x + Ay + Bz, \&c.} dz + \&c. \& \text{ en intégrant de part \& d'autre, il viendra } \frac{1}{e} L. V = S. \left( \frac{1}{x + Ay + Bz, \&c.} dx \right.$$

+  $\frac{A}{x + Ay + Bz, \&c.} dy + \&c.$ ). Lorsqu'on aura trouvé par cette intégration la valeur de V, on la fera = A' constante arbitraire, & le problème sera résolu ; car en faisant V=A', on aura dV=0=Mdx+MA dy+MB dz, &c. & en divisant par M, on trouvera l'équation proposée dx+A dy+B dz, &c.=0. Si e=0, c'est-à-dire, si la dimension de V étoit nulle, on auroit eV=0=Mx+MAy+&c.=0, ou en divisant par M, x+Ay+Bz, &c.=0.

Si les coefficients A, B, C, &c. ne sont point des fonctions homogènes de dimension nulle par rapport aux variables  $x, y, z, \&c.$  en introduisant le paramètre  $p$ , on les rendra de dimension nulle par rapport aux quantités  $x, y, z, \&c.$  &  $p$ . Et supposant qu'alors l'équation proposée soit de cette forme  $dx + a'dy + b'dz, \&c. + n'dp = 0$ , dans laquelle les coefficients  $a', b', \&c.$  sont de dimension nulle par rapport aux quantités  $x, y, z, \&c. p$ , la question sera réduite à trouver une fonction V des mêmes quantités, dont la différentielle  $Mdx + Ndy + \&c.$  divisée par M, ou  $dx + \frac{N}{M}dy, \&c.$  soit  $= dx + a'dy, \&c. + n'dp$ . En supposant  $\frac{T}{M} = n'$ , &  $p$  constante, ou  $dp = 0$ , on aura  $dx + \frac{N}{M}dy, \&c. = dx + a'dy, \&c.$  de plus  $a' = \frac{N}{M}, b' = \frac{P}{M}, \&c.$  ainsi la différence  $dV = Mdx + Ndy, \&c.$

A 3

$+ \frac{T}{M} dp$ , sera  $= M dx + M a' dy + M b' dz$ ,  
 &c.  $+ M n' dp$ .  $M$  &  $n'$  sont des fonctions ho-  
 mogènes de  $x$ , &  $y$ , &c. &  $p$ . Mais  $M$  est une  
 fonction qui peut n'être pas de dimension nulle,  
 au lieu que  $n'$  est certainement de dimension  
 nulle. En supposant que la dimension de  $V$  est  
 $e$ , on aura  $eV = Mx + Ma'y + \&c. + Mn'p$ ,  
 $\frac{1}{e} \cdot \frac{dV}{V} = \frac{1}{x + a'y + b'z, \&c. + n'p} dx +$   
 $\frac{a'}{x + a'y + b'z, \&c. + n'p} dy + \&c.$  donc en  
 intégrant & faisant  $x + a'y + b'z, \&c. + n'p$   
 $= F$ , on aura  $\frac{1}{e} L. V = S. \left( \frac{1}{F} dx + \frac{a'}{F} dy \right.$   
 $\left. + \frac{b'}{F} dz, \&c. + \frac{n'}{F} dp \right)$ . Lorsqu'on aura trouvé  
 par cette intégration la valeur de  $V$ , on la fera  
 $= A'$  constante arbitraire, & le problème sera  
 résolu. On ne peut trouver l'intégrale dont nous  
 venons de parler, qu'en connoissant  $n'$ . Si la di-  
 mension  $e$  étoit nulle, on auroit  $n' = \frac{-x - a'y, \&c.}{p}$ .

par l'équation  $eV = Mx + Ma'y; \&c.$  mais  
 cette valeur de  $n'$  rendant  $F = 0$ , ne peut nous  
 servir; il faut donc en trouver une autre. On  
 y parviendra par le quatrième problème suivant.

203. THÉOREME II. *Supposant que  $V$  est une  
 fonction des variables  $x, y, z, \&c.$  on aura*  
 $\frac{d. S. V dx}{dy} = S. \frac{dV}{dy} dx$ , *c'est-à-dire, que la dif-*  
*férence de  $S. V dx$  prise en ne faisant varier que  $y$*



& divisée par  $dy$ , est égale à l'intégrale du produit de la différence  $dV$  prise en ne faisant varier que  $y$ , divisant par  $dy$ , & multipliant le résultat par  $dx$ . C'est une suite de ce qu'on a démontré ci-devant (90) que  $dS \int dx = dy \frac{S(dA)dx}{dy}$ . Car alors  $\frac{d.(SA dx)}{dy} = S. \frac{(dA)dx}{dy}$ .

204. THÉOREME III.  $V$  étant toujours une fonction des variables  $x, y, z$ , &c. telle que l'on ait  $dV = M dx + N dy + P dz$ , &c. on aura les équations de condition  $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ ,  $\frac{dM}{dz} = \frac{dP}{dx}$ ,  $\frac{dM}{du} = \frac{dQ}{dx}$ ,  $\frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy}$ ,  $\frac{dN}{du} = \frac{dQ}{dy}$ , &c. (\*) C'est une suite de ce qu'on a dit ci-dessus (89).

205. THÉOREME IV. Dans la même supposition, en faisant  $N = AM$ ,  $P = BM$ ,  $Q = CM$ , &c. ce qui donne  $dV = M dx + AM dy + BM dz$ , &c., l'on aura encore les équations de condition suivantes, pour trois termes  $A \frac{dB}{dx} - B \frac{dA}{dx}$

(\*) L'expression  $\frac{dN}{dx}$ , indique qu'on a différencié  $N$  en faisant varier  $x$ , & qu'on a divisé par  $dx$ . L'expression  $\frac{dM}{dy}$ , indique la différentielle de  $M$  prise en faisant varier  $y$ , & divisée par  $dy$ , &c.

$+\frac{dA}{d\zeta}-\frac{dB}{dy}=0$ ; car par le théorème précédent  $\frac{dM}{dy}=A\frac{dM}{dx}+M\frac{dA}{dx}$  (à cause de  $AM=N$ ),  $\frac{dM}{d\zeta}=B\frac{dM}{dx}+M\frac{dB}{dx}$ ,  $A\frac{dM}{d\zeta}+M\frac{dA}{d\zeta}=B\frac{dM}{dy}+M\frac{dB}{dy}$ . Si on égale les valeurs de  $\frac{dM}{d\zeta}$  prises des deux dernières équations, il viendra en transposant,  $M\left(A\frac{dB}{dx}+\frac{dA}{d\zeta}-\frac{dB}{dy}\right)+B\left(A\frac{dM}{dx}-\frac{dM}{dy}\right)=0$  (P). Mais par la première équation,  $A\frac{dM}{dx}-\frac{dM}{dy}=-M\frac{dA}{dx}$ . Donc en substituant cette valeur dans l'équation (P), & divisant par M, on aura  $A\frac{dB}{dx}-B\frac{dA}{dx}+\frac{dA}{d\zeta}-\frac{dB}{dy}=0$  (\*).

COROLLAIRE. Donc pour quatre termes  $Mdx+AMdy+AMd\zeta+CMdu$ , on aura les trois équations.

$$A\frac{dB}{dx}-B\frac{dA}{dx}+\frac{dA}{d\zeta}-\frac{dB}{dy}=0.$$

(\*) On auroit pu trouver cette équation par le n°. (100) car si dans la première équation de condition de l'endroit cité, on fait  $A=1$ , A désigne dans cet endroit le coefficient de  $x$ , on aura  $dA=0$ ; & l'on en tirera une équation de condition qui sera la même aux coefficients près, que celle que nous venons de trouver; & en changeant les lettres elle sera exactement la même.

$$A \frac{dC}{dx} - C \frac{dA}{dx} + \frac{dA}{du} - \frac{dC}{dy} = 0.$$

$$B \frac{dC}{dx} - C \frac{dB}{dx} + \frac{dB}{du} - \frac{dC}{dz} = 0.$$

On trouvera de même les équations de condition pour cinq termes de la différence de  $V$ , pour six, &c.

PROBLEME. *Intégrer l'équation  $dx + a' dy = 0$ , dans laquelle  $a'$  est une fonction de dimension nulle de  $x$ , de  $y$  & de  $p$ . La question se réduit à trouver une fonction  $m$  de  $x$ , de  $y$  & de  $p$ , dont la différentielle en faisant  $p$  constante, divisée par le coefficient de  $dx$ , soit  $dx + a' dy = 0$ . Si l'on n'eût pas fait  $dp = 0$ , on auroit eu  $dx + a' dy + n' dp = 0$ ;  $n'$  étant une fonction de dimension nulle de  $x$  de  $y$  & de  $p$  qui est inconnue; & si l'on n'eût pas divisé par le coefficient de  $dx$  que je suppose  $= n$ , on auroit eu  $ndx + na' dy + nn' dp = 0$ ;  $n$  étant une fonction homogène de  $x$ , de  $y$ , & de  $p$ , qui est aussi inconnue. En supposant que la dimension de  $m$  est  $= c$ , on aura (par le premier théorème)  $cm = nx + na'y + nn'p$ ; donc  $\frac{1}{c} \cdot \frac{dm}{m} = \frac{1}{F} \cdot dx + \frac{a'}{F} dy + \frac{n'}{F} dp$ ; (en faisant  $F = x + a'y + n'p$ ), & en intégrant,  $\frac{1}{c} \cdot l. m = S \left( \frac{1}{F} dx + \frac{a'}{F} dy + \frac{n'}{F} dp \right)$ . Il ne s'agit donc plus que de trouver  $n'$ . Or par le dernier théorème, à cause de l'équation  $dm = ndx + na' dy + na' dp$ , on a  $a' \frac{dn'}{dx} - n' \frac{da'}{dx} + \frac{da'}{dp} \frac{dn'}{dy} = 0$ . (L)*

$+ \frac{dA}{dz} - \frac{dB}{dy} = 0$ ; car par le théorème précédent  $\frac{dM}{dy} = A \frac{dM}{dx} + M \frac{dA}{dx}$  (à cause de  $AM = N$ ),  $\frac{dM}{dz} = B \frac{dM}{dx} + M \frac{dB}{dx}$ ,  $A \frac{dM}{dz} + M \frac{dA}{dz} = B \frac{dM}{dy} + M \frac{dB}{dy}$ . Si on égale les valeurs de  $\frac{dM}{dz}$  prises des deux dernières équations, il viendra en transposant,  $M \left( A \frac{dB}{dx} + \frac{dA}{dz} - \frac{dB}{dy} \right) + B \left( A \frac{dM}{dx} - \frac{dM}{dy} \right) = 0$  (P). Mais par la première équation,  $A \frac{dM}{dx} - \frac{dM}{dy} = -M \frac{dA}{dx}$ . Donc en substituant cette valeur dans l'équation (P), & divisant par M, on aura  $A \frac{dB}{dx} - B \frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dz} - \frac{dB}{dy} = 0$  (\*).

COROLLAIRE. Donc pour quatre termes  $M dx + A M dy + A M dz + C M du$ , on aura les trois équations.

$$A \frac{dB}{dx} - B \frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dz} - \frac{dB}{dy} = 0.$$

(\*) On auroit pu trouver cette équation par le n°. (100) car si dans la première équation de condition de l'endroit cité, on fait  $A = 1$ , A désigne dans cet endroit le coefficient de  $x$ , on aura  $dA = 0$ ; & l'on en tirera une équation de condition qui sera la même aux coefficients près, que celle que nous venons de trouver; & en changeant les lettres elle sera exactement la même.

$$A \frac{dC}{dx} - C \frac{dA}{dx} + \frac{dA}{du} - \frac{dC}{dy} = 0.$$

$$B \frac{dC}{dx} - C \frac{dB}{dx} + \frac{dB}{du} - \frac{dC}{dz} = 0.$$

On trouvera de même les équations de condition pour cinq termes de la différence de V, pour six, &c.

PROBLEME. *Intégrer l'équation*  $dx + a' dy = 0$ , *dans laquelle*  $a'$  *est une fonction de dimension nulle de*  $x$ , *de*  $y$  *& de*  $p$ . La question se réduit à trouver une fonction  $m$  de  $x$ , de  $y$  & de  $p$ , dont la différentielle en faisant  $p$  constante, divisée par le coefficient de  $dx$ , soit  $dx + a' dy = 0$ . Si l'on n'eût pas fait  $dp = 0$ , on auroit eu  $dx + a' dy + n' dp = 0$ ;  $n'$  étant une fonction de dimension nulle de  $x$  de  $y$  & de  $p$  qui est inconnue; & si l'on n'eût pas divisé par le coefficient de  $dx$  que je suppose  $= n$ , on auroit eu  $n dx + n a' dy + n n' dp = 0$ ;  $n$  étant une fonction homogène de  $x$ , de  $y$ , & de  $p$ , qui est aussi inconnue. En supposant que la dimension de  $m$  est  $= c$ , on aura (par le premier théorème)  $em = nx + n a' y + n n' p$ ; donc

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{dm}{m} = \frac{1}{F} \cdot dx + \frac{a'}{F} dy + \frac{n'}{F} dp; \text{ (en faisant } F = x + a' y + n' p), \text{ \& en intégrant,}$$

$$\frac{1}{c} \cdot l. m = S \left( \frac{1}{F} dx + \frac{a'}{F} dy + \frac{n'}{F} dp \right). \text{ Il ne}$$

s'agit donc plus que de trouver  $n'$ . Or par le dernier théorème, à cause de l'équation  $dm$

$$= n dx + n a' dy + n a' dp, \text{ on a } a' \frac{dn'}{dx} -$$

$$n' \frac{da'}{dx} + \frac{da'}{dp} \frac{dn'}{dy} = 0. \text{ (L)}$$

Pour trouver par cette équation la valeur de la fonction  $n'$ , remarquons qu'en faisant tout varier, on doit avoir (théorème 1<sup>er</sup>) l'équation  $dm = A dx + B dy + C dp$ . Si en supposant que les facteurs  $A, B, C$ , sont fractionnaires, on réduit tous les coefficients au même dénominateur  $D$ , on aura  $\frac{1}{D} (E dx + G dy + H dp) = dm$ ; & en divisant les fonctions  $E, G, H$ , par leur plus grand diviseur  $P$ , il vient  $\frac{P}{D} (g dx + i dy + K dp)$ . Divisant encore  $g$  &  $i$  par leur plus grand commun diviseur  $Q$ , & faisant  $g = MQ$ ,  $i = NQ$ , il viendra  $\frac{P}{D} (MQ dx + NQ dy + K dp) = 0$ , en faisant  $dm = 0$ . Si on fait  $dp = 0$ , on aura  $\frac{P}{D} (QM dx + NQ dy) = 0$ , ou  $dx + \frac{N}{M} dy = 0$ , &  $a' = \frac{N}{M}$ . De plus on a  $\frac{K}{MQ} = n'$ ; car en divisant tout par  $QM$ , il vient  $dx + a' dy + n' dp = 0$ , ce qui donne  $n' = \frac{K}{MQ}$ ; de sorte que  $M$  &  $N$  sont des fonctions homogènes de  $x$ , de  $y$  & de  $p$ ,  $K$  &  $MQ$  étant aussi des fonctions homogènes de même dimension de  $x$ , de  $y$  & de  $p$ .

En substituant ces valeurs de  $a'$  & de  $n'$  dans l'équation (L), il vient  $NQ \frac{dK}{dx} - NK \frac{dQ}{dx}$

$$-QK \frac{dN}{dx} + Q^2 \left( M \frac{dN}{dp} - N \frac{dM}{dp} \right) - MQ \frac{dK}{dy} + KM \frac{dQ}{dy} + QK \frac{dM}{dy} = 0.$$

La fonction  $a'$  étant donnée, on aura  $N$  &  $M$ , en faisant  $N$  égal au numérateur, &  $M$  égal au dénominateur de la fonction  $a'$ ; si de plus  $Q$  étoit donnée, on trouveroit  $K$  par la méthode des indéterminées. L'on prendroit pour  $K$  une fonction homogène de  $x$ ,  $y$  &  $p$ , de même dimension que  $QM$  la plus générale qu'il seroit possible, & avec des coefficients indéterminés; on substituerait cette valeur de  $K$  dans l'équation de condition qu'on vient de trouver entre  $M$ ,  $N$ ,  $K$ ,  $Q$ , & l'on détermineroit les coefficients de  $K$  par des équations du premier degré, en satisfaisant à cette équation supposée identique, comme on le verra dans l'exemple que nous rapporterons bientôt: mais comme  $Q$  &  $K$  sont des fonctions inconnues, on pourra faire 1°.  $Q = 1$  pour avoir l'équation de condition

$$N \frac{dK}{dx} - K \frac{dN}{dx} + M \frac{dN}{dp} - N \frac{dM}{dp} - M \frac{dK}{dy} + K \frac{dM}{dy} = 0, (A).$$

- On pourra 2°. faire  $Q = p$ , &  $dQ = dp = 0$ ; & en divisant l'équation générale de condition par  $p$ , on trouvera pour ce cas,  $N \frac{dK}{dx} - K \frac{dN}{dx} + p \left( M \frac{dN}{dp} - N \frac{dM}{dp} \right) - M \frac{dK}{dy} + K \frac{dM}{dy} = 0$ . 3°. S'il n'entre aucun radical dans  $M$  ni dans  $N$ ; on

pourra faire  $Q = ap + bx + cy$ . 4°.  $Q = ap^2 + bpx + cpy + Dx^2 + exy + fy^2$ . 5°.  $Q = ap^3 + bp^2x + \&c$ . 6°.  $Q = ap^4 + bpx^3 + \&c$ . Et l'on déterminera les coefficients de K comme si ceux de Q étoient donnés, on examinera ensuite quels doivent être les coefficients de Q pour qu'il n'y ait point de contradiction dans ceux de K.

Mais s'il entre des radicaux dans les fonctions N, M, après avoir essayé les hypothèses de  $Q = 1$  & de  $Q = p$ , on fera entrer ces radicaux dans les valeurs successives de Q & de K comme autant de nouvelles variables, & de la manière la plus générale qu'il sera possible.

Soit proposé d'intégrer l'équation  $dx + \frac{ap + bx + cy}{ep + fx + gy} dy = 0$ . En supposant  $Q = 1$ ,

on aura  $a' = \frac{ap + bx + cy}{ep + fx + gy}$ ,  $N = ap + bx + cy$ ,  $M = ep + fx + gy$ ,  $K = Ap + Bx + Cy$ , les coefficients A, B, C, étant inconnus,  $\frac{dN}{dx} = b$ ,  $\frac{dN}{dp} = a$ ,  $\frac{dM}{dy} = g$ ,  $\frac{dM}{dp} = e$ ,  $\frac{dK}{dx} = B$ ,  $\frac{dK}{dy} = C$ , & en substituant dans

l'équation (A) de condition, nous aurons  $(aB - eC - bA + gA)p + (-be - fC + gB + af)x + (cB - ce + ag - bC)y = 0$ ; mais cette équation ne sauroit subsister dans toutes les suppositions des valeurs de  $x$  &  $y$ , à moins que les coefficients de  $y$ ,  $x$  &  $p$ , ne soient chacun  $= 0$ ; donc  $aB - eC - bA + gA$



$= 0$ ,  $-be - fC + af + gB = 0$ ,  $cB - ce + ag - bC = 0$ . Regardant maintenant  $A, B, C$ , comme trois inconnues, on trouvera par le moyen de ces trois équations  $A = \frac{-a(be - af)}{cf - bg}$ ;  $B = \frac{f(ce - ag) - b(be - af)}{cf - bg}$ ;  $C = \frac{g(ce - af) - c(be - af)}{cf - bg}$ . Substituant ces valeurs dans l'équation  $K = Ap + Bx + Cy$ , & ensuite les valeurs de  $M$  &  $K$  dans  $n' = \frac{K}{QM} = \frac{K}{M}$ , à cause de  $Q = 1$ , nous aurons  $n' = [-a(be - af) + (f(ce - ag) - b(ce - af))x + (g(ce - af) - c(be - af))y] : (cf - bg) \cdot (cp + fx + gy)$ . (\*)

Reprenons maintenant l'équation  $\frac{1}{e} L, m = S \left( \frac{1}{F} dx + \frac{a'}{F} dy + \frac{n'}{F} dp \right)$ ; si on intègre cette équation en regardant 1°.  $x$  seule comme variable; 2°.  $y$  seule comme variable; 3°.  $p$  seule comme variable, & en ajoutant à l'intégrale dans le premier cas une fonction de  $y$  & de  $p$  (parce que dans ce cas, on regarde  $y$  &  $p$  comme constantes) que nous désignerons par  $f(y \& p)$ ; dans le second cas, une fonction arbitraire de  $x$  & de  $p$ , que nous désignerons par  $f(x \& p)$ , dans le troisième cas une fonction arbitraire de  $x$  & de  $y$  que nous représenterons par  $f(x \& y)$ , nous aurons

(\*) Les deux points indiquent une division.

$$\frac{1}{\epsilon} L. m = S \left( \frac{1}{F} dx \right) + f(y \& p)$$

$$\frac{1}{\epsilon} L. m = S \left( \frac{d}{F} dy \right) + f(x \& p)$$

$$\frac{1}{\epsilon} L. m = S \left( \frac{n'}{F} dp \right) + f(x \& y)$$

Ces intégrales doivent être égales entr'elles, & chacune étant différenciée, doit rendre la proposée.

Lorsqu'il entrera des radicaux dans  $a'$ , au lieu de l'équation  $dx + a'dy = 0$ , on écrira  $dx + a'dy + n'dp = 0$ , prenant la valeur de  $n'$  dans la supposition que la dimension  $\epsilon$  de  $V$  est  $= 0$ . On égalera le radical qu'on veut faire disparaître à une fonction rationnelle & homogène de  $p, x, y$ , & d'une nouvelle variable  $z$ , & choisissant cette fonction telle qu'on puisse avoir  $p$  ou  $x$  ou  $y$ , par une équation du premier degré. Supposons que ce soit  $p$  que l'on ait ainsi: en différenciant & faisant varier  $x, y$  &  $z$ , on aura  $zdp$ ; substituant les valeurs de  $dp$  & de  $p$ , au lieu de l'équation entre  $x, y, p, dx, dy, dp$ , on aura une équation entre  $x, y, z, dx, dy, dz$  dans laquelle il y aura un radical de moins. Lorsqu'on aura intégré cette équation (qu'on pourra intégrer si l'on veut en supposant  $dx$ , ou  $dy$ , ou  $dz = 0$ , par une méthode dont on parlera dans la suite), on chassera  $z$ , & l'on aura la vraie intégrale en  $p, x$  &  $y$ . Ceux qui voudront en savoir davantage sur cette méthode, peuvent consulter l'ouvrage de M. Fontaine. Passons à la seconde méthode.

206. Toute équation différentielle ou intégrale qui ne contient ni fonctions transcendentes, ni

dénominateurs, ni radicaux, est dite rationnelle, algébrique & entière.

On peut délivrer toute équation de ses dénominateurs, en multipliant l'équation par un multiplicateur divisible par tous les dénominateurs, ce qui est évident : or il est facile dans tous les cas de trouver un tel multiplicateur, qui tout au plus sera égal au produit de tous les dénominateurs.

Si l'équation proposée renferme des puissances dont les exposans soient négatifs, en faisant passer ces puissances dans les dénominateurs, on les rendra positives, & ensuite on pourra débarrasser l'équation de dénominateurs.

Si une équation contient des radicaux, on pourra l'en débarrasser dans quelques cas sans augmenter le nombre des variables; ainsi si l'on avoit l'équation  $ay\sqrt{x}.dx - bxdy = 0$ , en faisant  $\sqrt{x} = z$ , on auroit  $x = zz$ ,  $dx = 2zdz$ ,  $dx\sqrt{x} = 2z^2dz$ ; & l'équation deviendrait  $2ayzzdz - bzdzdy = 0$ . Mais on pourra l'en débarrasser dans tous les cas en égalant chaque radical à une nouvelle variable. Si l'équation contient des fonctions transcendentes, ou des intégrales sous le signe d'intégration, on pourra toujours l'en délivrer en égalant ces fonctions à de nouvelles variables. On pourra aussi quelquefois faire disparaître les fonctions intégrales, en différenciant l'équation. Si l'équation proposée étoit  $adxS.ydx - bx^2dy = 0$ , on auroit  $S.ydx = \frac{bx^2dy}{adx}$ ; donc en différenciant, & faisant  $dx$

constante, on aura  $y dx = \frac{2bx dx dy + bxx ddy}{adx}$  ;

$$\& ay dx^2 - 2bx dx dy - bx^2 ddy = 0.$$

Il n'y a point d'équations finies algébriques, entières, rationnelles & homogènes, qu'on ne puisse exprimer par quelque'une des suites suivantes.

$$1^{\text{re}} \text{ suite. } \begin{cases} Ap + Bx = 0. \\ Ap^2 + Bp^2x + Cx^2 = 0. \\ Ap^3 + Bp^3x + Cp^3x^2 + Dx^3 = 0. \\ Ap^4 + Bp^4x + Cp^4x^2 + Dp^4x^3 \\ + E^4 = 0. \\ \&c. \text{ à l'infini.} \end{cases}$$

$$2^{\text{e}} \text{ suite. } \begin{cases} Ap + Bx + Cy = 0. \\ Ap^2 + Bp^2x + Cpy + Dx^2 \\ + Exy + Fy^2 = 0. (V) \\ Ap^3 + Bp^3x + Cp^2y + Dpx^2 \\ + Epxy + Fpy^2 + Gx^3 \\ + Hx^2y + Ixy^2 + Ky^3 = 0. \\ Ap^4 + Bp^4x + Cp^4y + \&c. = 0. \\ \&c. \text{ à l'infini.} \end{cases}$$

$$3^{\text{e}} \text{ suite. } \begin{cases} Ap + Bx + Cy + Dz = 0. \\ Ap^2 + Bp^2x + Cpy + Dpz \\ + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hxz \\ + Iyz + Kz^2 = 0. \\ Ap^3 + Bp^3x + \&c. = 0. \\ \&c. \text{ à l'infini.} \end{cases}$$

$$4^{\text{e}} \text{ suite. } \begin{cases} Ap + Bx + Cy + Dz + Eu = 0. \\ Ap^2 + Bp^2x + \&c. = 0. \\ \&c. \text{ à l'infini.} \end{cases}$$

$$5^{\text{e}} \text{ suite. } . . . . . \\ \&c. \text{ à l'infini.}$$

6<sup>e</sup> suite.

6<sup>e</sup> suite. . . . .

&c. à l'infini.

&c. . . . &c. . . . &c. . . .

En continuant de même on trouvera toutes les suites qui sont des fonctions rationnelles, entières & homogènes d'un nombre quelconque de variables, lesquelles renfermeront routes les équations rationnelles, entières, homogènes & finies. Les coefficients A, B, C, &c. désignent des constantes où 0, & p est l'unité arbitraire qui sert à conserver l'homogénéité dans les termes de chaque suite.

207. POUR intégrer une équation différentielle, entière, rationnelle & algébrique, on pourra la comparer avec les différentielles des suites ci-dessus. Ainsi pour intégrer l'équation  $dx + 2dy - 2xdx - 3ydy = 0$ , je la compare avec la différentielle de la suite (V) qui est  $Bpdx + Cpdy + 2Dxdx + E ydx + Exdy + 2Fydy = 0$ . La comparaison me donne  $Bp = 1$ ,  $Cp = 2$ ,  $2D = -2$ ,  $E = 0$ ,  $2F = -3$ ; donc l'intégrale sera  $Ap^2 + x + 2y - x^2 - \frac{1}{2}y^2 = 0$ , qui est complète, parce que A est une constante arbitraire. Si on proposoit d'intégrer l'équation différentielle du second ordre  $dx^2 + 2dy^2 + 2yddx = 0$ , dans laquelle dx est supposé constant (lorsqu'il s'agira d'intégrer par cette méthode une équation, on fera toujours dx constant); je la compare avec la seconde différentielle de la suite (V) qui est  $Cpddy + 2Ddx^2 + 2E ydx + Exddy + 2Fdy^2 + 2Fyddx = 0$ , dans laquelle, comme il est aisé de le comprendre,

Tome V.

B

on a supposé  $dx$  constant. La comparaison donne  $C = 0$ ,  $2D = 1$ ,  $E = 0$ ,  $2F = 2$ , & l'intégrale finie, sera  $Ap^2 + Bpx + \frac{x^2}{2} + yy = 0$ , dans laquelle  $A$  &  $B$  sont deux constantes arbitraires. On ne doit pas s'étonner si l'on trouve  $Bpx$  dans l'intégrale, parce que la supposition de  $dx$  constant avoit fait disparaître le terme qui auroit contenu  $B$ , & qui auroit été  $Bp ddx$ , lequel s'est évanoui à cause de  $ddx = 0$ .

Nous supposons que dans la seconde suite d'équations ci-dessus, les coefficients constants  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , &c. désignent des fonctions d'un nombre arbitraire  $n$ , s'il s'agit d'une équation aux premières différences; de deux nombres arbitraires  $n$ ,  $m$ , s'il s'agit d'une équation aux secondes différences; de trois nombres arbitraires  $n$ ,  $m$ ,  $m'$ ; s'il s'agit d'une équation aux troisièmes différences, &c.

Cela posé, prenez une de ces équations, celle du premier degré ou celle du second, ou celle du troisieme, &c. substitués au lieu des coefficients indéterminés  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , &c. des fonctions de  $n$  à votre choix, vous aurez une équation qui sera l'intégrale d'une équation aux premières différences. Pour avoir cette équation dont vous avez l'intégrale; différenciez cette intégrale, vous aurez deux équations, éliminés  $n$ , & l'équation qui restera entre  $x$ ,  $y$ ,  $p$ ,  $dx$ ,  $dy$ , sera celle dont vous avez l'intégrale.

Prenons pour exemple l'équation  $Ap + Bx + Cy = 0$ , & faisons  $A = 1 - n$ ,  $B = 2$ ,  $C = \frac{2 - 5n}{n}$ , il viendra l'équation  $(1 - n)p$

$+ 2x + \frac{2-5n}{n}y = 0$ , qui sera l'intégrale

d'une équation aux premières différences. Afin de connoître cette équation différentielle, différencions cette intégrale pour avoir  $2n dx + (2-5n)dy = 0$ ; prenant la valeur de  $n$  dans cette équation, & la substituant dans l'équation précédente, on aura après les opérations ordinaires,  $3pdy^2 + 10xdy^2 - 10ydx dy - 2pdx dy - 4xdx dy + 4ydx^2 = 0$ , équation dont l'intégrale est  $(1-n)p + 2x + \frac{2-5n}{n}y = 0$ . Supposons maintenant qu'à

la place des coefficients  $A, B, C$ , &c. on substitue des fonctions arbitraires de  $n$  & de  $m$  dans l'équation (V), qu'on fasse par exemple  $A = 3$ ,  $B = 2n$ ,  $C = n - m$ ,  $D = 0$ ,  $E = 3 - 2m$ ,  $F = -nm$ , pour avoir l'équation  $3p^2 + 2npx + (n-m)py + (3-2m)xy - nmy^2 = 0$ , qui sera l'intégrale d'une équation aux secondes différences. Pour avoir cette équation aux secondes différences, je différencie cette intégrale deux fois; la première différenciation donne  $2npdx + (n-m)pdy + (3-2m)xdy + (3-2m)ydx - 2nmydy = 0$ ; & la seconde donne  $(n-m)pddy + (3-2m)xddy + 2(3-2m)dx dy - 2nmyddy - 2nmdy^2 = 0$ . (\*) Chassez les nombres  $n$  &  $m$  de ces trois équations, & l'équation qui résultera entre  $x, y, p, dx, dy, ddy$ , sera celle dont il s'agit.

(\*) On suppose  $dx$  constant.

Si au lieu de  $A, B, C, \&c.$  on substitue dans la même équation (V) des fonctions de  $n$ , de  $m$  & de  $m'$ ; on aura une équation qui sera l'intégrale d'une équation aux troisièmes différences. Pour avoir cette équation aux troisièmes différences, on différenciera cette intégrale trois fois, & l'on aura quatre équations, desquelles chassant  $n, m, m'$ , l'équation restante entre  $x, y, p, dx, dy, ddy, d^3y$ , sera l'équation aux troisièmes différences dont vous avez l'intégrale.

Pour avoir l'intégrale d'une équation différentielle donnée, les valeurs des coefficients  $A, B, \&c.$  (dans la formule qu'on choisira) en  $n$  si c'est une équation aux premières différences, en  $n$  &  $m$  si c'est une équation aux secondes différences, &c. doivent être telles que l'on arrive de cette intégrale à la différentielle proposée.

De même que pour chaque intégrale il n'y a qu'une seule équation aux premières, aux secondes, aux troisièmes, &c. différences dont elle soit l'intégrale; pour chaque équation aux premières différences, il n'y a qu'une seule équation en  $x, y, p$  &  $n$ , qui en soit l'intégrale; pour chaque équation aux secondes différences, il n'y a qu'une seule équation entre  $x, y, p, n$  &  $m$ , qui en soit l'intégrale; pour chaque équation aux troisièmes différences, il n'y a qu'une équation entre  $x, y, p, n, m$  &  $m'$ , qui en soit l'intégrale, &c. cette intégrale peut se présenter sous une infinité de formes différentes; mais ce sera toujours essentiellement la même équation.

Si l'on a l'intégrale d'une équation aux premières différences; & que l'on détermine  $n$  en faisant par exemple  $n = 0$ , ou  $n = 5$ ; &c.



l'équation qui en résultera ne sera pas l'intégrale de l'équation proposée aux premières différences, mais elle sera un des cas de cette intégrale; il en est de même des équations aux secondes différences, aux troisièmes, &c. à chaque fois qu'on détermine un des nombres  $n$ ,  $m$ , &c. l'équation résultante n'est plus qu'un des cas de l'intégrale: si par, exemple, on fait  $n=1$  dans l'intégrale  $(1-n)p + 2x + \frac{2-5n}{n}y = 0$

de l'équation  $3pdy^2 + 10xdy^2 - 10ydx dy - 2pdx dy - 4xdx dy + 4ydx^2 = 0 \dots (H)$ , l'équation  $2x - 3y = 0$ , que vous aurez par cette supposition, ne sera pas l'intégrale de cette équation aux premières différences, c'est-à-dire, que l'équation différentielle  $2dx - 3dy = 0$ , ne sera pas la même que l'équation (H); mais l'équation  $2x - 3y = 0$  sera un des cas de l'intégrale complète de l'équation (H); c'est-à-dire, si l'on prend la valeur  $x = \frac{3}{2}y$  que donne l'équation  $2x - 3y = 0$ , pour avoir  $dx = \frac{3}{2}dy$ , & qu'on substitue les valeurs de  $x$  & de  $dx$  dans l'équation (H), celle-ci sera identique: en effet elle deviendra  $3pdy^2 + 15ydy^2 - 15ydy^2 - 3pdy^2 - 9ydy^2 + 9ydy^2 = 0$ .

208. Pour chaque équation aux secondes différences, on peut avoir deux intégrales aux premières différences; car après avoir différencié une fois seulement l'intégrale d'une équation aux secondes différences, on pourra chasser le nombre  $n$ , ou le nombre  $m$ , & par conséquent avoir une équation aux premières différences dans laquelle il ne restera que  $m$ , & une autre équation dans laquelle il ne restera que  $n$ ; & chacune de ces

équations sera également l'intégrale de l'équation aux secondes différences que l'on auroit en différenciant l'intégrale deux fois, & en éliminant  $n$  &  $m$ . Par la même raison ; pour chaque équation aux troisièmes différences, on aura trois intégrales aux secondes différences, celle dans laquelle il ne restera que le nombre  $n$ , celle dans laquelle il ne restera que le nombre  $m$ , & celle qui ne contiendra que le nombre  $m'$ , &c.

Ordonnons l'équation  $(1 - n) p + 2x + \frac{2 - 5n}{n} y = 0 \dots (T)$  par rapport à

$n$ , pour avoir  $nn - n \cdot \frac{p + 2x - 5y}{p} = \frac{2y}{p}$ , &

$$n = \frac{p + 2x - 5y}{2p} \pm \sqrt{\frac{(p + 2x - 5y)^2 + 8py}{2p}}$$

fonction de dimension nulle de  $p$ , de  $x$  & de  $y$  (\*). En différenciant l'équation (T), nous

aurons  $2 dx + \frac{2 - 5n}{n} dy = 0$ , ou  $dx +$

$a' dy = 0$ , en faisant  $a' = \frac{2 - 5n}{2n}$ . Si

on n'eût pas fait  $dp = 0$ , on auroit eu

l'équation  $dx + a' dy + \left( \frac{-x - a'y}{p} \right) dp$

$= 0$ , comme on peut le conclure de ce qu'on

(\*) Il est facile de substituer à la place des coefficients  $A$ ,  $B$ , &c. d'une formule proposée, des fonctions de  $n$  telles que l'on ait ensuite  $n$  égale à une dimension nulle de  $x, y, p$ .

a dit ci-devant (202). Si on n'eût pas divisé par le coefficient de  $dx$ , que nous ferons  $\equiv h$ , & qu'on n'eût pas fait la fonction  $V \equiv 0$ , on auroit eu  $h dx + h n' dp \equiv dV$ ,  $n'$ ,  $h$ , étant des fonctions de dimension nulle de  $p$ ,  $x$  &  $y$ . On peut toujours supposer  $V$  de dimension nulle, puisque l'on peut la multiplier ou la diviser par  $p$ , jusqu'à ce qu'elle devienne telle. On aura donc par le premier théorème ci-dessus  $hx + a'hy + hn'p \equiv 0$ ; & par conséquent  $x + a'y + n'p \equiv 0$ , &  $n' = \frac{-x - a'y}{p}$ .

209. Soit maintenant l'équation  $dx + \frac{N}{M} dy \equiv 0$ ,  $M$  &  $N$  étant des fonctions de même dimension de  $p$ , de  $x$  & de  $y$ , qui n'ont aucun facteur commun, & dont tous les termes sont homogènes & composés de puissances positives. Si les fonctions  $M$  &  $N$  ne contiennent aucun radical, c'est-à-dire, si l'équation est contenue dans quelqu'une des formules suivantes.

$$dx + \frac{b_1.p + b_2.x + b_3.y}{b'_1.p + b'_2.x + b'_3.y} dy \equiv 0. (*)$$

$$dx + \left\{ \frac{b_1.p^2 + b_2.px + b_3.py + b_4.x^2}{b'_1.p^2 + b'_2.px + b'_3.py + b'_4.x^2} + \frac{b_5.xy + b_6.y^2}{b'_5.xy + b'_6.y^2} \right\} dy \equiv 0.$$

(\*) Les expressions  $b_1, b_2, b_3$ , &c. indiquent les coefficients de  $p$ , de  $x$ , de  $y$ ; de sorte que  $b_2$  n'est pas la même chose que  $b^2$ . Il en est de même des expressions  $b'_1, b'_2$ , &c. Il est aisé maintenant de comprendre la signification de  $a_1, a_2, a_3$ , &c.  $a'_1, a'_2, a'_3$ , &c.

$$dx + \left\{ \begin{array}{l} \frac{b_1.p^3 + b_2.p^2x + b_3.p^2y + b_4.px^2}{b'_1.p^3 + b'_2.p^2x + b'_3.p^2y + b'_4.px^2} \\ + \frac{b_5.pxy + b_6.py^2 + b_7.x^3}{b'_5.pxy + b'_6.py^2 + b'_7.x^3} \\ + \frac{b_8.x^2y + b_9.xy^2 + b_{10}.y^3}{b'_8.x^2y + b'_9.xy^2 + b'_{10}.y^3} \\ \&c. \dots \dots \&c. \dots \dots \end{array} \right\} dy = 0.$$

Et l'intégrale sera

$$n = \frac{a_1.p + a_2.x + a_3.y}{a'_1.p + a'_2.x + a'_3.y}, \text{ ou}$$

$$n = \left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1.p^2 + a_2.px + a_3.py + a_4.x^2}{a'_1.p^2 + a'_2.px + a'_3.py + a'_4.x^2} \\ + \frac{a_5.xy + a_6.y^2}{a'_5.xy + a'_6.y^2} \end{array} \right\}, \text{ ou}$$

$$n = \frac{a_1.p^3 + a_2.p^2x + \&c.}{a'_1.p^3 + a'_2.p^2x + \&c.}, \text{ ou}$$

$$n = \frac{a_1.p^4 + \&c.}{a'_1.p^4 + \&c.}, \text{ ou}$$

$$n = \frac{a_1.p^5 + \&c.}{a'_1.p^5 + \&c.}$$

&c. . . . . &c. . . . .

Ceux qui voudront en savoir davantage sur cette méthode, pourront consulter l'Ouvrage du célèbre M. Fontaine.



*Des marques auxquelles on peut reconnoître si une fonction différentielle est intégrable dans l'état où elle est.*

210. QUOIQUE nous ayons déjà dit beaucoup de choses sur cette matière, nous croyons devoir la traiter d'une manière plus générale ; mais afin que les commençants ne trouvent aucun embarras dans des questions d'ailleurs assez difficiles, nous allons expliquer la signification de certaines expressions. L'expression  $\frac{dA}{dy}$  indiquera la différentielle de A prise en faisant varier y & divisée par dy, l'expression  $\frac{dA}{dy} dy$  représente par conséquent la différentielle de A prise en faisant varier y ; l'expression  $\frac{dA}{dx}$  indique la différentielle de A prise en faisant varier x & divisée par dx ; l'expression  $\frac{ddA}{dx dy}$  indique la différentielle de  $\frac{dA}{dy}$  prise en faisant varier x, & divisée par dx ; ou la différentielle de  $\frac{dA}{dx}$  prise en faisant varier y & divisée par dy ; car cela revient au même (\*). L'expression  $\frac{ddA}{dx^2}$  indique la dif-

(\*) On fait que si l'équation différentielle  $A dx + B dy = 0$ , est intégrable, on a  $\frac{dB}{dx} = \frac{dA}{dy}$  (88) ; donc si on fait  $A = \frac{dV}{dx}$ ,  $B = \frac{dV}{dy}$ , on aura  $\frac{ddV}{dy dx} = \frac{ddV}{dx dy}$ .

férentielle de  $\frac{dA}{dx}$  prise en faisant varier  $x$  & divisée par  $dx$ . Mais on ne doit pas conclure que  $\frac{ddA}{ddydy}$  est  $= \frac{ddA}{dyddy}$  par les raisons qu'on dira bientôt. Ce que nous venons de dire, joint aux théorèmes suivans, suffira pour mettre tout Lecteur, un peu instruit, en état d'entendre cette matiere.

211. THÉOREME I. La différentielle de  $\frac{dA}{d^m y} d^m y$ , prise en faisant varier  $d^m y$ , ou  $\frac{ddA}{d^{m+1} y d^m y} d^m y d^{m+1} y$ ,

est égale à  $d^{m+1} y \cdot \frac{dA}{d^m y} + \frac{ddA}{d^m y d^{m+1} y} \cdot d^{m+1} y d^m y$ .

Comme on peut réduire tous les termes qui sont dans  $A$  à la forme  $B \cdot \overline{d^m y^n}$ , &c que ce qu'on dira d'un terme, doit s'entendre de tous les autres, nous supposerons pour plus de simplicité que  $A = B \cdot \overline{d^m y^n}$ ;

donc  $\frac{dA}{d^m y} d^m y = \frac{dB}{d^m y} d^m y \overline{d^m y^n}$ ; (car dans cette différenciation on regarde  $d^{m+1} y$  seule comme variable); mais  $d^m y$  se trouve dans le numérateur &c le dénominateur de  $\frac{dB}{d^m y}$ ; donc on peut supposer que  $d^m y$ , a

disparu dans cette expression; de sorte que si l'on fait  $\frac{dB}{d^m y} = M$ , on aura  $\frac{dA}{d^m y} d^m y = M \cdot \overline{d^m y^{n+1}}$ . donc en différenciant dans la supposition de  $d^m y$  variable, tout le reste étant constant, &c remettant la valeur

de M, on aura  $\frac{d d A}{d^{m+1} y d^m y} d^m y \cdot d^{m+1} y = (n+1) \times$   
 $\frac{d B}{d^m y} \cdot \frac{d^m y}{d^{m+1} y} d^{m+1} y (G)$  ; mais  $\frac{d A}{d^{m+1} y} \cdot d^{m+1} y$   
 $= n \cdot B \cdot d^m y \cdot d^{m+1} y$ , &  $\frac{d d A}{d^m y \cdot d^{m+1} y} \cdot d^m y \cdot d^{m+1} y$   
 $= n \cdot \frac{d B}{d^m y} \cdot d^m y \cdot d^{m+1} y = n \cdot \frac{d B}{d^m y} \cdot (d^m y)^n \cdot$   
 $d^{m+1} y$ ; &  $\frac{1}{n} \cdot \frac{d d A}{d^m y d^{m+1} y} d^m y d^{m+1} y = \frac{d B}{d^m y} \cdot \frac{d^m y}{d^{m+1} y} \times$   
 $d^{m+1} y$ ; mais si l'on divise tous les termes de l'équa-  
 tion (G) par  $n+1$ , son second membre devient égal  
 à celui de la dernière équation qu'on vient de trou-  
 ver ; donc on a  $\frac{1}{n+1} \cdot \frac{d d A}{d^{m+1} y d^m y} \cdot d^m y d^{m+1} y$   
 $= \frac{1}{n} d \frac{d d A}{d^m y d^{m+1} y} \cdot d^m y d^{m+1} y$ , ou  $\frac{d d A}{d^{m+1} y d^m y}$   
 $d^{m+1} y d^m y = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{d d A}{d^m y d^{m+1} y} \cdot d^m y d^{m+1} y$   
 $= \left( \frac{1}{n} \cdot \frac{d d A}{d^m y d^{m+1} y} + \frac{d d A}{d^m y d^{m+1} y} \right) \cdot (d^m y d^{m+1} y)$  ;  
 équation que nous désignons par (D). Mais  $\frac{d A}{d^{m+1} y} \cdot$   
 $d^{m+1} y = n \cdot B \cdot d^m y \cdot d^{m+1} y$ , &  $\frac{d A}{d^{m+1} y} = n \cdot B \cdot$   
 $\frac{d^m y}{d^{m+1} y}$  ; donc  $\left( \frac{d d A}{d^m y d^{m+1} y} \right) d^m y = n \cdot \frac{d B}{d^m y} \cdot \frac{d^m y}{d^{m+1} y} \times$   
 $d^m y = n \cdot \frac{d B}{d^m y} \cdot d^m y$  ; &  $\frac{1}{n} \cdot \frac{d d A}{d^m y d^{m+1} y} \cdot d^m y =$   
 $\frac{d B}{d^m y} \cdot (d^m y)$ . De plus il est évident que  $\frac{d A}{d^m y} = \frac{d B}{d^m y} \times$

$(d^m y)^n$  ; donc  $\frac{1}{n} \cdot \frac{d d A}{d^m y d^{m+1} y} \cdot d^m y = \frac{d A}{d^m y}$ , &c  
 $\frac{1}{n} \cdot \frac{d d A}{d^m y d^{m+1} y} \cdot d^m y d^{m+1} y = \frac{d A}{d^m y} \cdot d^{m+1} y$ . Si  
 l'on substitue cette valeur dans l'équation (D), on  
 trouvera facilement  $\frac{d d A}{d^{m+1} y d^m y} \cdot d^m y d^{m+1} y = \frac{d A}{d^m y} \cdot$   
 $d^{m+1} y + \frac{d d A}{d^m y d^{m+1} y} \cdot d^{m+1} y d^m y$ .

212. COROLLAIRE I. Si A ne contient pas la différen-  
 tielle  $d^m y$ , dans ce cas  $\frac{d A}{d^{m+1} y} \cdot d^{m+1} y$  fera  $= 0$ ,  
 parce qu'alors on ne peut différencier A, en faisant  
 varier  $d^m y$ , &c le dernier terme de l'équation du  
 théorème devient  $= 0$  ; ainsi en faisant  $dy = p'$ , si A  
 ne contient pas  $p'$ , on aura  $\frac{d d A}{d p' d y} \cdot p' d p' = \frac{d A}{d y} d p'$ .

COROLLAIRE II. Ce qu'on vient de dire par rapport  
 aux différentielles de  $y$ , doit s'entendre également lorf-  
 qu'il s'agira des différentielles de  $x, y, z$ , &c.

213. THÉOREME II. La différentielle de  $\frac{d A}{d^{m+1} x}$   
 $d^{m+1} x$ , prise en faisant varier  $d^{m+1} x$ , ou  $\frac{d d A}{d^m x d^{m+1} x} \times$   
 $d^{m+1} x d^m x$ , est  $= d^m x \frac{d d A}{d^{m+1} x d^m x} \cdot d^{m+1} x$ , c'est-  
 à-dire, est égale au produit de  $d^m x$  multiplié par la dif-  
 férentielle de  $\frac{d A}{d^m x}$  prise en faisant varier  $d^m x$ . Soit sup-  
 posé  $A = B \cdot (d^m x)^n$ , car on peut réduire à cette  
 forme tous les termes qui composent A. Prenons



la différence en faisant seulement varier  $d^m x$ , nous aurons  $\frac{dA}{d^{m+1}x} \cdot d^{m+1}x = n \cdot B \cdot d^m x \cdot d^{m+1}x$ ; prenant maintenant les différences en faisant seulement  $d^{m-1}x$ , on aura  $\frac{d d A}{d^m x d^{m+1}x} \cdot d^{m+1}x d^m x = n \frac{dB}{d^m x} d^m x \cdot d^m x \cdot d^{m+1}x$ . D'ailleurs  $\frac{dA}{d^m x} d^m x = \frac{dB}{d^m x} d^m x d^m x$ , &  $\frac{dA}{d^m x} = \frac{dB}{d^m x} \cdot d^m x$ . Mais à cause du diviseur  $d^m x$ , il est visible que cette différentielle ne se trouve pas dans  $\frac{dB}{d^m x}$ , parce que la division la fait disparaître; ainsi en différenciant dans la supposition de  $d^m x$  variable, on aura  $\frac{d d A}{d^{m+1}x d^m x} \times d^{m+1}x = n \cdot \frac{dB}{d^m x} \cdot d^m x \cdot d^{m+1}x$ ; donc  $\frac{d d A}{d^m x d^{m+1}x} \times d^{m+1}x \cdot d^m x = n \cdot \frac{dB}{d^m x} \cdot d^m x (d^m x) \cdot d^{m+1}x = d^m x \cdot \frac{d d A}{d^{m+1}x \cdot d^m x} \cdot d^{m+1}x$ .

COROLLAIRE I. Il ne faut donc pas confondre l'expression  $dx \cdot \frac{d d A}{d^2 x dx} d^2 x$ , avec l'expression  $\frac{d d A}{d^2 x dx} \times d^2 x dx$ . La première signifiant qu'on a multiplié par  $dx$  la différentielle de  $\frac{dA}{dx}$  prise en faisant varier  $dx$ , & la seconde indiquant qu'on a pris la différentielle de  $\frac{dA}{dx} dx$  en faisant varier  $dx$ .

COROLLAIRE II. Ce que l'on vient de dire par rapport à la variable  $x$ , doit s'entendre également de la variable  $y$ , & de toute autre variable.

REMARQUE. Excepté les cas dont on vient de parler dans les deux théorèmes précédens, on peut indifféremment écrire les différentielles de  $x$  ou de  $y$ , l'une

avant l'autre. Ainsi  $\frac{ddA}{d^n x d^m y} = \frac{ddA}{d^m y d^n x}$ ,  $\frac{ddA}{d^m x d^n y} = \frac{ddA}{d^n y d^m x}$ , pourvu que dans ce dernier cas  $m$  &  $n$

diffèrent plus que d'une unité. En général, si l'on doit différencier  $A$  deux fois en faisant varier différentes quantités,  $y, x, dy, dx, d^m y, d^n x, d^m x, &c.$  La différentielle sera toujours la même lorsqu'on fera

varier différentes variables; ainsi  $\frac{ddA}{dx dy} = \frac{ddA}{dy dx}$ , il en

sera de même lorsqu'il s'agira de la même variable, pourvu que la différence des exposans soit plus grande

que l'unité; ainsi  $\frac{ddA}{d^3 x dx} = \frac{ddA}{dx d^3 x}$ , parce que si

l'on prend d'abord  $\frac{dA}{dx}$ , & ensuite la différentielle de

cette quantité en faisant varier  $dx$ , la seconde différenciation ne peut affecter  $dx$  & réciproquement. De même si  $p$  diffère de plus d'une unité de  $m$ , on aura

$\frac{1}{d^p x} \cdot \frac{ddA}{d^m x d^n y} = d \left( \frac{dA}{d^n y} \cdot \frac{1}{d^p x} \right)$  prise en faisant varier  $d^{m-1} x$ , & divisée par  $d^m x$ .

Avant de passer plus loin, nous allons exposer un principe qui peut être utile dans la question que nous traitons.

215. PRINCIPE. Deux quantités identiques resteront identiques, si on les différencie en faisant varier la même variable. Ce principe n'a besoin d'aucune démonstration.

216. PROBLEME. Trouver l'équation de condition qui doit avoir lieu pour qu'une fonction différentielle d'un ordre quelconque à deux variables  $x$  &  $y$ , ou  $dx$  est supposé

constant, soit une différentielle exacte d'un ordre inférieur d'une unité. Soit  $V$  la différentielle proposée,  $A$  la différentielle moins élevée d'une unité, dont  $V$  est supposée la différentielle; je fais dans  $V$  & dans  $A$ ,  $dx = p$ ,  $dp = 0$ , à cause de  $dx$  constant,  $dy = p'$ ,  $ddy = dp' = q'$ ,  $d^3y = d^2p' = dq' = r'$ ,  $d'r' = s'$ , &c. On aura  $V$  &  $A$  fonctions de  $x, y, p, p', q', r', s',$  &c.; la dernière de ces lettres  $p, q, r, s',$  &c. qui se trouve dans la fonction  $V$ , ne pouvant se trouver dans  $A$ ; par exemple, si  $r' = d^3y$ , est la dernière de ces lettres qui se trouve dans  $V$ ,  $q' = ddy$  sera la dernière de ces lettres qui se trouvera dans  $A$  qui est d'un ordre inférieur d'une unité; de sorte qu'alors  $A$  sera du second ordre, &  $V$  du troisième ordre.

Cela posé, on aura  $V = dA = \frac{dA}{dx} dx + \frac{dA}{dy} dy + \frac{dA}{dp'} dp' + \frac{dA}{dq'} dq',$  &c. & en mettant dans les numérateurs de la valeur de  $V$  que nous venons de trouver, à la place de  $dx, dy, dp',$  &c. leurs valeurs  $p, p', q',$  &c. on aura  $V = \frac{dA}{dx} p + \frac{dA}{dy} p' + \frac{dA}{dp'} q' + \text{&c.}$  forme que doit avoir  $V$  pour être différentielle de  $A$ .

Si nous différencions les deux membres de cette équation, l'on aura en différenciant le premier membre selon la méthode ordinaire, on aura, dis-je,  $dV = N dx + N' dy + P dp + Q dq,$  &c. où les coefficients  $N, N', P,$  &c. sont censés connus. En différenciant le second membre selon l'autre méthode,

$$\begin{aligned} \text{on a } d. \left( \frac{dA}{dx} p + \frac{dA}{dy} p' + \frac{dA}{dp'} q' + \text{&c.} \right) &= \left( \frac{ddA}{dx^2} p \right. \\ &+ \frac{ddA}{dx dy} p' + \frac{ddA}{dx dp'} q' + \frac{ddA}{dx dq'} r' + \frac{ddA}{dx d'r'} s' \\ &+ \text{&c.} \Big) dx + \left( \frac{ddA}{dy dx} p + \frac{ddA}{dy^2} p' + \frac{ddA}{dy dp'} q' \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{ddA}{dydq'} r' + \&c.) dy + \left( \frac{dA}{dy} + \frac{ddA}{dp'dx} p + \right. \\
& + \frac{ddA}{dp'dy} p' + \frac{ddA}{dp'^2} q' + \frac{ddA}{dp'dq'} r' + \&c.) dp' \\
& + \left( \frac{dA}{dp'} + \frac{ddA}{dq'dx} p + \frac{ddA}{dq'dy} p' + \frac{ddA}{dq'dp'} q' \right. \\
& + \frac{ddA}{dq'^2} r' + \frac{ddA}{dq'dr'} s', \&c.) dq' + \left( \frac{dA}{dq'} + \frac{ddA}{dr'dx} p \right. \\
& + \frac{ddA}{dr'dy} p' + \frac{ddA}{dr'dp'} q' + \frac{ddA}{dr'dq'} r' + \frac{ddA}{dr'^2} s', \\
& \&c.) dr' + \left( \frac{dA}{dr'} + \dots + \&c.) ds' + \&c.
\end{aligned}$$

équation que nous désignerons par (B).

La différentielle du second membre  $\frac{dA}{dx} p + \frac{dA}{dy} p' + \&c.$  se trouve en prenant en particulier la différentielle de chacun de ses termes. 1°. En faisant varier  $x$ , 2°. en faisant varier  $y$ , 3°. en faisant varier  $p'$ , 4°. en ne faisant varier que  $q'$ , &c ainsi de suite. Mais la différence du second membre en ne faisant varier que  $x$  est

$$\begin{aligned}
& \frac{ddA}{dx^2} p dx + \frac{ddA}{dx dy} p' dx + \frac{ddA}{dx dp'} q' dx + \\
& \frac{ddA}{dx dq'} r' dx + \frac{ddA}{dx dr'} s' dx + \&c. = \left( \frac{ddA}{dx^2} p \right. \\
& + \frac{ddA}{dx dy} p' + \frac{ddA}{dx dp'} q' + \&c.) dx; \text{ de même} \\
& \text{la différence du second membre prise en ne faisant} \\
& \text{varier que } y, \text{ est} = \left( \frac{ddA}{dy dx} p + \frac{ddA}{dy^2} p' + \frac{ddA}{dy dp'} q' \right. \\
& + \frac{ddA}{dy dq'} r' + \frac{ddA}{dy dr'} s' + \&c.) dy; \text{ la différence} \\
& \text{du}
\end{aligned}$$

du second membre prise en ne faisant varier que  $p' = dy$ , sera (en ayant égard à l'avant-dernier théo-

$$\begin{aligned} \text{rême}) &= \frac{ddA}{dp'dx} p dp' + \frac{dA}{dy} dp' + \frac{ddA}{dp'dy} p' dp' \\ &+ \frac{ddA}{dp'^2} q' dp', \&c. = \left( \frac{dA}{dy} + \frac{ddA}{dp'dx} p + \frac{ddA}{dp'dy} p' \right. \\ &+ \left. \frac{ddA}{dp'^2} q' + \frac{ddA}{dp'dq'} r' + \frac{ddA}{dp'dr'} s' + \&c. \right) dp'. \end{aligned}$$

On trouve de même les autres différentielles du second membre, en ne faisant varier que  $q'$ , ensuite en ne faisant varier que  $r'$ , &c. mais la différence de

$\frac{dA}{dx}$  prise en faisant tout varier (\*), & que nous dési-

$$\text{gnerons par } d. \frac{dA}{dx} \text{ est } = \frac{ddA}{dx^2} dx + \frac{ddA}{dx dy} dy$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{ddA}{dx dp'} dp' + \frac{ddA}{dx dq'} dq' + \frac{ddA}{dx dr'} dr' + \\ &\frac{ddA}{dx ds'} ds' + \&c. = \frac{ddA}{dx^2} p + \frac{ddA}{dx dy} p' + \&c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \& \text{ par conséquent } dx. d. \frac{dA}{dx} &= \left( \frac{ddA}{dx^2} p + \frac{ddA}{dx dy} p' \right. \\ &+ \left. \frac{ddA}{dx dp'} q' + \frac{ddA}{dx dq'} r' + \frac{ddA}{dx dr'} s' + \&c. \right) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{on trouvera de même que } dy. d. \frac{dA}{dy} &= \left( \frac{ddA}{dy dx} p \right. \\ &+ \left. \frac{ddA}{dy^2} p' + \frac{ddA}{dy dp'} q' + \&c. \right) dy. \end{aligned}$$

$$\text{On trouvera assez facilement que } \left( \frac{dA}{dy} + d. \frac{dA}{dp'} \right) dp' = \left( \frac{dA}{dy} \right.$$

(\*) On doit cependant supposer  $dx$  constant & faire  $dp = ddx = 0$ .

$$\begin{aligned}
& + \frac{d d A}{d p' d x} p + \frac{d d A}{d p' d y} p' + \frac{d d A}{d p'^2} q' + \frac{d d A}{d p' d q'} r' \\
& + \frac{d d A}{d p' d r'} s' + \&c. \Big) . d p' ; \&c \text{ encore que } \left( \frac{d A}{d p'} \right. \\
& + d . \frac{d A}{d q'} \Big) d q' = \left( \frac{d A}{d p'} + \frac{d d A}{d q' d x} p + \frac{d d A}{d q' d y} p' \right. \\
& + \frac{d d A}{d q' d p'} q' + \frac{d d A}{d q'^2} r' + \frac{d d A}{d q' d r'} s' + \&c. \Big) . d q' .
\end{aligned}$$

Si l'on substitue dans l'équation (B) à la place des suites qui multiplient les  $dx$ ,  $dy$ ,  $dp'$ ,  $dq'$ ,  $dr'$ ,  $\&c.$

$$\begin{aligned}
& \text{leurs valeurs } d . \frac{d A}{d x}, d . \frac{d A}{d y}, \frac{d A}{d y} + d . \frac{d A}{d p'}, \frac{d A}{d p'} \\
& + d . \frac{d A}{d q'}, \frac{d A}{d q'} + d . \frac{d A}{d r'}, \&c. \text{ on aura } d . \left( \frac{d A}{d x} p \right. \\
& + \frac{d A}{d y} p' + \frac{d A}{d p'} q' + \frac{d A}{d q'} r' + \frac{d A}{d r'} s' + \&c. \Big) = \\
& dx . \frac{d A}{d x} + dy . d . \frac{d A}{d y} + \left( \frac{d A}{d y} + d . \frac{d A}{d p'} \right) dp' + \\
& \left( \frac{d A}{d p'} + d . \frac{d A}{d q'} \right) . dq' + \left( \frac{d A}{d q'} + d . \frac{d A}{d r'} \right) . dr' + \\
& \left( \frac{d A}{d r'} . . . . . \right) . ds' + \&c. ; \text{ mais puisque } V \& \frac{d A}{d x} p \\
& + \frac{d A}{d y} p' + \&c. \text{ sont une même chose ; leurs diffé-} \\
& \text{rences doivent être égales terme à terme. On aura} \\
& \text{donc } N dx = dx . d . \frac{d A}{d x}, \& N = d . \frac{d A}{d x} ; N' dy \\
& = dy . d . \frac{d A}{d y}, \& N' = d . \frac{d A}{d y} ; P' dp' = \left( \frac{d A}{d y} \right. \\
& + d . \frac{d A}{d p'} \Big) . dp', \& P' = \frac{d A}{d y} + d . \frac{d A}{d p'} ; Q' = \frac{d A}{d p'}
\end{aligned}$$

$$+ d. \frac{dA}{dq'}; R' = \frac{dA}{dq'} + d. \frac{dA}{dr'}; S' = \frac{dA}{dr'} + \dots$$

équations qui donnent les valeurs que doivent avoir N, N', P', &c. pour que V soit la différentielle exacte de A. On peut remarquer maintenant que dans la suite d'équations

$$N' = d. \frac{dA}{dy}$$

$$P' = \frac{dA}{dy} + d. \frac{dA}{dp'}$$

$$Q' = \frac{dA}{dp'} + d. \frac{dA}{dq'}$$

$$R = \frac{dA}{dq'} + d. \frac{dA}{dr'}$$

$$S' = \frac{dA}{dr'} + \dots (*)$$

Le second membre de la première, n'a qu'un seul terme, & que le second membre de la dernière, ne peut avoir non plus qu'un seul terme. Car supposons que la quatrième de ces équations soit la dernière, c'est-à-dire, que A soit une différentielle du second degré qui contienne par conséquent  $ddy$ , & non  $d^3y$ ;

dans ce cas le terme  $d. \frac{dA}{dr'}$  est  $= 0$ , & cette équation devient  $R' = \frac{dA}{dq'}$  Mais si on prend la première

différence de la seconde équation, la seconde différence de la troisième, la troisième différence de la quatrième, & ainsi de suite, on aura, en laissant la première équation telle qu'elle est, on aura, dis-je,

---

(\*) La lettre S' ne désigne pas ici l'intégrale.

$$\begin{aligned} N' &= d. \frac{dA}{dy} \\ dP' &= d. \frac{dA}{dy} + dd \frac{dA}{dp'} \\ ddQ' &= d^2 \frac{dA}{dp'} + dd d \frac{dA}{dq'} \\ d^3R' &= d^3 \frac{dA}{dq'} + d^4 \frac{dA}{dr'} \\ d^4S' &= d^4 \frac{dA}{dr'} + \dots \end{aligned}$$

Maintenant si l'on retranche la seconde de la première ; & qu'on ajoute la troisième au résultat pour en retrancher la quatrième , & qu'on continue de même , en ajoutant toutes celles de rang impair , & retranchant toutes celles de rang pair , on aura  $N' - dP' + d^2Q' - d^3R' + d^4S' - \&c. = 0$ , équation identique qui doit avoir lieu pour que V soit la différentielle exacte d'une fonction A , d'un ordre inférieur d'une unité , & qui est l'équation de condition cherchée.

217. REMARQUE. Nous démontrerons dans le calcul des variations que si  $S. V dx$  est un *maximum* ou un *minimum*, V étant une fonction des variables  $x, y, p, q, r, s$ , &c.  $dx$  étant constant, & en supposant  $p = \frac{dy}{dx}$ ,  $q = \frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$ ,  $r = \frac{dq}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3}$ ,  $s = \frac{dr}{dx} = \frac{d^4y}{dx^4}$ , &c. & par conséquent  $dV = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds + \&c.$  (\*), nous démontrerons, dis-je, que la relation entre  $x$  &  $y$  sera exprimée par l'équation  $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} +$

(\*) La lettre S désigne, dans notre équation, le coefficient de  $ds$ .



$\frac{d^3 R}{dx^3}$ , &c. = 0 (A) (a). Mais en supposant  $p' = dy$ ,  $q' = dp' = d^2 y$ ,  $r' = dq'$ , &c. V sera une fonction des variables  $x, y, p', q', r'$ , &c.  $dx$  étant constant; donc on aura  $dV = M'dx + N'dy + P'dp' + Q'dq' + R'dr'$ , &c. égalant terme à terme les deux valeurs de  $dV$ , on aura  $M = M'$ ,  $N = N'$ ,  $Pdp' = P \cdot \frac{d^2 y}{dx} = P'dp' = P'd^2 y$ , &  $P' = \frac{P}{dx} = \frac{1}{dx} \cdot P$ ;  $\frac{1}{dx} \cdot dP = dP'$ ;  $Qdq' = Q \cdot \frac{d^3 y}{dx^2} = Q'dq' = Q'd^3 y$ ;  $\frac{1}{dx^2} \cdot Q = Q'$ ,  $\frac{1}{dx^2} \cdot d^2 Q = d^2 Q'$ . On trouvera de même  $\frac{1}{dx^3} \cdot d^3 R = d^3 R'$ ,  $\frac{1}{dx^4} \cdot d^4 S = d^4 S'$ , &c. donc en substituant ces valeurs dans l'équation (A) qui rend  $S \cdot V dx$  un *maximum* ou un *minimum*; on aura  $N' - dP' + d^2 Q' + d^3 R' + d^4 S' - \&c. = 0$ . On voit par-là que les deux formules d'équations sont les mêmes; mais il faut remarquer que quand il s'agit du *maximum* ou du *minimum* l'équation doit contenir une relation entre les variables, & ne doit pas avoir une forme identique (b), autrement elle ne feroit point connoître le *maximum* ou le *minimum*.

218. PROBLEME II. *Trouver les équations de condition qui doivent avoir lieu pour qu'une fonction différentielle d'un ordre quelconque à deux variables  $x, y$ , où aucune des différences n'est supposée constante, soit une différentielle exacte d'une fonction d'un ordre moins élevé d'une unité. Soit V la fonction proposée, A la fonction d'un ordre*

(a) Les  $dx$  dans cette équation, sont diviseurs simplement, & n'indiquent pas qu'on doit différencier les numérateurs en faisant seulement varier  $x$ .

(b) Nous entendons ici, par équation identique, une équation, telle que dans la fonction égalée à zéro, tous les termes se détruisent.

moins élevé d'une unité, dont V doit être la différentielle exacte. Je fais  $dx = p$ ,  $ddx = dp = q$ ,  $dq = d^3x = r$ ,  $dr = d^4x = s$ , &c.  $dy = p'$ ,  $dp' = q'$ ,  $dq' = r'$ , &c. A & V seront donc des fonctions de  $x, y, p, q$ , &c.  $p', q', r'$ , &c. les dernières de ces lettres qui se trouvent dans V ne pouvant se trouver dans A différentielle d'un ordre inférieur d'une unité par rapport à V. Cela posé l'on a

$$V = dA = \frac{dA}{dx} dx + \frac{dA}{dp} dp + \frac{dA}{dq} dq + \frac{dA}{dr} dr + \frac{dA}{ds} ds + \&c. + \frac{dA}{dy} dy + \frac{dA}{dp'} dp' + \frac{dA}{dq'} dq' + \frac{dA}{dr'} dr' + \frac{dA}{ds'} ds' + \&c.$$

Mais parce que  $dx = p$ ,  $dp = q$ ,  $dq = r$ ,  $dy = p'$ ,  $dp' = q'$ , &c. on doit avoir

$$V = \left\{ \begin{aligned} &\frac{dA}{dx} p + \frac{dA}{dp} q + \frac{dA}{dq} r + \frac{dA}{dr} s, \&c. \\ &+ \frac{dA}{dy} p' + \frac{dA}{dp'} q' + \frac{dA}{dq'} r' + \frac{dA}{dr'} s', \&c. \end{aligned} \right.$$

Mais en différenciant à l'ordinaire, on trouve

$$dV = N dx + P dp + Q dq + R dr + S ds + \&c. (*) \\ + N' dy + P' dp' + Q' dq' + R' dr' + S' ds' + \&c.$$

De plus, en faisant les réductions nécessaires, on a

$$d. \left\{ \begin{aligned} &\frac{dA}{dx} p + \frac{dA}{dp} q + \frac{dA}{dq} r + \frac{dA}{dr} s + \&c. \\ &+ \frac{dA}{dy} p' + \frac{dA}{dp'} q' + \frac{dA}{dq'} r' + \frac{dA}{dr'} s' + \&c. \end{aligned} \right\} =$$

(\*) S désigne ici le coefficient de  $ds$ .

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} dx d \frac{dA}{dx} + \left( \frac{dA}{dx} + d \frac{dA}{dp} \right) dp \\ + dy d \frac{dA}{dy} + \left( \frac{dA}{dy} + d \frac{dA}{dp'} \right) dp' \end{aligned} \right. \\ & + \left( \frac{dA}{dp} + d \frac{dA}{dq} \right) dq + \left( \frac{dA}{dq} + d \frac{dA}{dr} \right) dr \\ & \quad + \left( \frac{dA}{dr} \dots \dots \right) ds, \&c. \\ & + \left( \frac{dA}{dp'} + d \frac{dA}{dq'} \right) dq' + \left( \frac{dA}{dq'} + d \frac{dA}{dr'} \right) dr' \\ & \quad + \left( \frac{dA}{dr'} \dots \dots \right) ds', \&c. \end{aligned}$$

Si on égale cette quantité avec la valeur de la différentielle de V qu'on vient de trouver, on aura ces deux suites d'équations.

$N = d. \frac{dA}{dx}$	$N' = d. \frac{dA}{dy}$
$P = \frac{dA}{dx} + d. \frac{dA}{dp}$	$P' = \frac{dA}{dy} + d. \frac{dA}{dp'}$
$Q = \frac{dA}{dp} + d \frac{dA}{dq}$	$Q' = \frac{dA}{dp'} + d. \frac{dA}{dq'}$
$R = \frac{dA}{dq} + d \frac{dA}{dr}$	$R' = \frac{dA}{dq'} + d. \frac{dA}{dr'}$
$S = \frac{dA}{dr} \dots \dots$	$S' = \frac{dA}{dr'} \dots \dots$
$\&c.$	$\&c.$

Dans lesquelles le premier & le dernier membre des premières & dernières équations ne peuvent avoir qu'un seul terme. Maintenant si dans chaque suite on retranche les équations de rang pair, & qu'on ajoute celles de rang impair, après avoir pris la première différence de la seconde, la seconde différence de la troisième,

&c ainsi de suite pour chacune des suites , on aura

$$N - dP + ddQ - d^3R + d^4S - \&c. = 0.$$

$$N' - dP' + ddQ' - d^3R' + d^4S' - \&c. = 0.$$

Equations identiques qui doivent avoir lieu pour que V soit la différentielle exacte de A , ou pour que V puisse avoir une intégrale d'un ordre inférieur d'une unité.

219. PROBLEME III. *Trouver les équations de condition qui doivent avoir lieu pour qu'une fonction différentielle V contenant un nombre quelconque de variables x, y, z, &c. soit une différentielle exacte d'une fonction A d'un ordre moins élevé d'une unité. Soit  $dx = p$ ,  $dp = q$ ,  $dq = r$ , &c.  $dy = p'$ ,  $dp' = q'$ ,  $dq' = r'$ , &c.  $dz = p''$ ,  $dp'' = q''$ ,  $dq'' = r''$ , &c. &c ainsi de suite, s'il y a d'autres variables ; j'aurai*

$$\begin{aligned} V = dA = & \frac{dA}{dx} p + \frac{dA}{dp} q + \frac{dA}{dq} r + \&c. \\ & + \frac{dA}{dy} p' + \frac{dA}{dp'} q' + \frac{dA}{dq'} r' + \&c. \\ & + \frac{dA}{dz} p'' + \frac{dA}{dp''} q'' + \frac{dA}{dq''} r'' + \&c. \\ & + \&c. \dots \dots \&c. \dots \dots \end{aligned}$$

J'aurai aussi

$$\left. \begin{aligned} dV = & Ndx + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + \&c. \\ & + N'dy + P'dp' + Q'dq' + R'dr' + S'ps' + \&c. \\ & + N''dz + P''dp'' + Q''dq'' + R''dr'' + S''ds'' + \&c. \end{aligned} \right\} =$$

$$\begin{aligned} dx. & \frac{dA}{dx} + \left( \frac{dA}{dx} + d \frac{dA}{dp} \right) dp + \left( \frac{dA}{dq} + d \frac{dA}{dq} \right) dq \\ & + \left( \frac{dA}{dq} + d \frac{dA}{dr} \right) dr + \left( \frac{dA}{dx} \dots \dots \right) ds, \&c. \\ + dy. & d \frac{dA}{dy} + \left( \frac{dA}{dy} + d \frac{dA}{dp'} \right) dp' + \left( \frac{dA}{dp'} + d \frac{dA}{dq'} \right) dq' \\ & + \left( \frac{dA}{dq'} + d \frac{dA}{dr'} \right) dr' + \left( \frac{dA}{dr'} \dots \dots \right) ds' + \&c. \end{aligned}$$

$$+ d \frac{dA}{d\zeta} d\zeta + \left( \frac{dA}{d\zeta} + d \frac{dA}{dp''} \right) dp'' + \left( \frac{dA}{dp''} + d \frac{dA}{dq''} \right) dq'' \\ + \left( \frac{dA}{dq''} + d \frac{dA}{dr''} \right) dr'' + \left( \frac{dA}{dr''} \dots \right) ds'', \&c. + \&c.$$

Egalant maintenant les coefficients de  $dx$ ,  $dp$ ,  $dq$ ,  $\&c.$   $d\zeta$ ,  $dp''$ ,  $\&c.$  j'aurai les trois suites suivantes d'équations.

$N = d. \frac{dA}{dx}$	$N' = d. \frac{dA}{dy}$
$P = \frac{dA}{dx} + d. \frac{dA}{dp}$	$P' = \frac{dA}{dy} + d. \frac{dA}{dp'}$
$Q = \frac{dA}{dp} + d. \frac{dA}{dq}$	$Q' = \frac{dA}{dp'} + d. \frac{dA}{dq'}$
$R = \frac{dA}{dq} + d. \frac{dA}{dr}$	$R' = \frac{dA}{dq'} + d. \frac{dA}{dr'}$
$S = \frac{dA}{dr} + \dots$	$S' = \frac{dA}{dr'} \dots$
$\&c. \dots$	$\&c. \dots$

$$N'' = d \frac{dA}{d\zeta}$$

$$P'' = \frac{dA}{d\zeta} + d \frac{dA}{dp''}$$

$$Q'' = \frac{dA}{dp''} + d \frac{dA}{dq''}$$

$$R'' = \frac{dA}{dq''} + d \frac{dA}{dr''}$$

$$S'' = \frac{dA}{dr''} \dots$$

$$\&c. \dots$$

Chacune de ces suites me donnera une équation de condition de la même forme, & j'aurai les équations identiques.

$$N - dP + d^2Q - d^3R + d^4S, \&c. = 0.$$

$$N' - dP' + d^2Q' - d^3R' + d^4S', \&c. = 0.$$

$$N'' - dP'' + d^2Q'' - d^3R'' + d^4S'', \&c. = 0.$$

& ainsi de suite pour chaque variable.

REMARQUE. Dans le premier problème nous n'avons trouvé qu'une équation de condition, parce que l'on a supposé  $dx$  constant : en général si on suppose constante la première différence d'une des variables, l'équation de condition, qui se rapporte à cette variable, disparaîtra, & le nombre des équations de condition sera inférieur d'une unité à celui des variables.

220. ON peut aussi résoudre le même problème de la manière suivante. Supposons que  $V$  soit une fonction différentielle de l'ordre  $p$ , de sorte que les différentielles les plus élevées, qui se trouvent dans  $V$ , soient  $d^p x, d^p y$ , on demande les équations de condition qui doivent avoir lieu pour que  $V$  ait une intégrale  $A$  d'un ordre inférieur d'une unité.

A cause de  $V = dA$ , on aura les équations

$$\frac{dV}{dx} dx = \frac{d.(dA)}{dx} dx \quad (*)$$

$$\frac{dV}{ddx} d^2x = \frac{d.(dA)}{ddx} d^2x$$

$$\frac{dV}{d^3x} d^3x = \frac{d.(dA)}{d^3x} d^3x$$

$$\dots \dots \dots \frac{dV}{d^{p-1}x} d^{p-1}x = \frac{d.(dA)}{d^{p-1}x} d^{p-1}x$$

$$\frac{dV}{d^p x} d^p x = \frac{d.(dA)}{d^p x} d^p x$$

$$\frac{dV}{d^{p+1}x} d^{p+1}x = \frac{d.(dA)}{d^{p+1}x} d^{p+1}x$$


---

(\*) Cette expression désigne qu'après avoir pris la différentielle de  $A$ , en faisant tout varier, il faut prendre celle du résultat, en faisant seulement varier  $x$ ; il est maintenant aisé de comprendre les valeurs des autres.

Mais

$$dA = \left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dx} dx + \frac{dA}{d^2x} d^2x + \frac{dA}{d^3x} d^3x + \dots + \\ \frac{dA}{d^{p-1}x} d^{p-1}x + \frac{dA}{d^px} d^px + d'A(a) \end{array} \right.$$

on doit substituer cette valeur de  $dA$  dans toutes les équations, afin d'en pouvoir tirer, en les comparant, une équation de condition.

La première équation se change en celle-ci.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} dx = & \frac{ddA}{dx^2} dx^2 + \frac{ddA}{dx d^2x} dx d^2x + \frac{ddA}{dx d^3x} \times \\ & dx d^3x + \dots + \frac{ddA}{dx d^{p-1}x} dx d^{p-1}x + \frac{ddA}{dx d^px} \times \\ & dx d^px + \frac{d.(d'A)}{dx} dx. \end{aligned}$$

En réduisant le second membre, selon la méthode du second théorème ci-dessus, on aura

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} dx = & \frac{ddA}{dx^2} dx^2 + dx. \frac{ddA}{d^2x dx} d^2x + \frac{ddA}{d^3x dx} \times \\ & dx d^3x \dots + \frac{ddA}{d^px dx} dx d^px + d' \left( \frac{dA}{dx} dx \right) \end{aligned}$$

Si l'on divise par  $dx$ , on aura

$$\frac{dV}{dx} = d. \left( \frac{dA}{dx} \right). dx (b) + \frac{ddA}{d^2x dx} d^2x + \frac{ddA}{d^3x dx} \times$$

$$d^3x \dots + d' \left( \frac{dA}{dx} \right) = d. \frac{dA}{dx} (c).$$

(a) L'expression  $dA$  indique la différentielle de  $A$  prise en faisant varier  $y$ , & les différentielles  $dy$ ,  $ddy$ , &c.

(b) Cette expression indique la différentielle de  $\frac{dA}{dx}$  prise en faisant varier  $x$ .

(c) Cette expression indique la différence de  $\frac{dA}{dx}$  prise en faisant tout varier.

Ainsi l'on a  $\frac{dV}{dx} = d \frac{dA}{dx}$ . La seconde équation après la substitution, deviendra  $\frac{dV}{d^2x} d^2x = \frac{ddA}{d^2x dx} dx d^2x + \frac{ddA}{d^2x d^2x} ddxd^2x + \frac{ddA}{ddxd^3x} d^3x d^2x \dots \dots + \frac{ddA}{d^2x d^p x} d^p x + \frac{d.(d'A)}{ddx} dd x (*)$ .

Faisant usage du premier théorème dans le premier terme, & du second théorème dans le troisième terme du second membre, & disposant convenablement tous les termes, on aura

$$\begin{aligned} \frac{dV}{ddx} ddx &= ddx \frac{dA}{dx} + \frac{ddA}{dx d^2x} d^2x dx + \frac{ddA}{d^2x d^2x} \times \\ &\quad d^2x d^2x + ddx. \frac{ddA}{d^3x d^2x} d^3x \dots \dots + \\ &\quad \frac{ddA}{d^p x d^2x} d^p x + d' \left( \frac{dA}{d^2x} d^2x \right). \end{aligned}$$

Donc, en divisant par  $ddx$ , on aura

$$\begin{aligned} \frac{dV}{ddx} &= \frac{dA}{dx} + d. \frac{dA}{d^2x}; \text{ \& } d. \frac{dV}{d^2x} = d. \frac{dA}{dx} \\ &\quad + d^2 \frac{dA}{d^2x}. \end{aligned}$$

En employant la même méthode, & se servant des deux théorèmes précédens pour le second & le quatrième terme où la différence de l'ordre des exposans n'est que d'une unité, on trouvera  $\frac{dV}{d^3x} = \frac{dA}{d^2x}$

---

(\*) Cette expression indique la différentielle de  $d'A$  prise en faisant varier  $dx$ .



$$+ d. \frac{dA}{d^3 x}. \text{ Donc } dd \frac{dV}{d^3 x} = dd \frac{dA}{d^2 x} + d^3 \frac{dA}{d^3 x}.$$

La quatrième équation nous fera trouver  $d^3 \frac{dV}{d^4 x} =$

$$d^3 \frac{dA}{d^3 x} + d^4 \frac{dA}{d^4 x}, \text{ \& ainsi de suite ; de sorte que}$$

$$\text{l'avant-dernière équation donnera } d^{p-1} \frac{dV}{d^p x} =$$

$$d^{p-1} \frac{dA}{d^{p-1} x} + d^p \frac{dA}{d^p x}; \text{ mais la dernière équation don-}$$

$$\text{nera seulement } d^p \frac{dV}{d^{p+1} x} = d^p \frac{dA}{d^p x}; \text{ parce que le}$$

$$\text{terme } d^{p+1} \frac{dA}{d^{p+1} x} = 0; \text{ car A ne contenant pas}$$

$d^p x$ , la différentielle de A, prise en faisant varier  $d^p x$ , est nulle. On aura donc cette suite d'équations.

$$\frac{dV}{dx} = d \frac{dA}{dx}$$

$$d. \frac{dV}{d^2 x} = d \frac{dA}{dx} + dd \frac{dA}{d^2 x}$$

$$dd. \frac{dV}{d^3 x} = dd. \frac{dA}{dx} + d^3 \frac{dA}{d^3 x}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$d^{p-1} \frac{dV}{d^p x} = d^{p-1} \frac{dA}{d^{p-1} x} + d^p \frac{dA}{d^p x}$$

$$d^p \frac{dV}{d^{p+1} x} = d^p \frac{dA}{d^p x} (*).$$

$$\dots \dots \dots$$

(\*) Avec un peu d'attention il est aisé de voir que la quantité  $\frac{dV}{dx} = N$ , que  $d. \frac{dV}{d^2 x} = dP$ , \&c. de sorte que

Si on retranche la première de la seconde, qu'on retranche ensuite le résultat de la troisième, qu'on retranche encore le résultat de la quatrième, & ainsi de suite, on aura la valeur des différentes fonctions de A, exprimées en V, & l'on déterminera une équation de condition : les équations suivantes représentent les résultats.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= d \frac{dA}{dx} \\ d \frac{dV}{d^2x} - \frac{dV}{dx} &= dd \frac{dA}{ddx} \\ dd \frac{dV}{d^3x} - d \frac{dV}{ddx} + \frac{dV}{dx} &= d^3 \frac{dA}{d^3x} \\ &\dots \dots \dots \\ d^{p-1} \frac{dV}{d^p x} - d^{p-2} \frac{dV}{d^{p-1} x} + \&c. &= d^p \frac{dA}{d^p x} \\ d^p \frac{dV}{d^{p+1} x} - d^{p-1} \frac{dV}{d^p x} + d^{p-2} \frac{dV}{d^{p-1} x} - \&c. &= 0. \end{aligned}$$

Ces formules doivent être poussées jusqu'au terme  $\frac{dV}{dx}$  inclusivement ; la dernière équation donne la condition nécessaire pour que V ait une intégrale A d'un ordre inférieur d'une unité.

Il est facile de voir que la variable y doit fournir une semblable équation, & que si la fonction V contenoit d'autres variables u, z, &c. chacune fourniroit une semblable équation.

221. PROBLEME IV. *Trouver les équations de condition qui doivent avoir lieu pour qu'une fonction différentielle V ait une intégrale finie* Soit V une différentielle de l'ordre p, & supposons qu'elle doit avoir une intégrale A de l'ordre p-1, & que A doit avoir une

l'équation de condition que nous allons trouver, ne sera pas essentiellement différente de celle que donne la première méthode.

intégrale  $A'$  de l'ordre  $p-2$  : puisque  $A$  doit avoir une intégrale  $A'$  de l'ordre  $p-2$ , selon ce qu'on vient de dire, on aura l'équation de condition

$$d^{p-1} \frac{dA}{d^p x} - d^{p-2} \frac{dA}{d^{p-1} x} + d^{p-3} \frac{dA}{d^{p-2} x} - \&c. = 0.$$

Maintenant si l'on substitue dans cette équation, après l'avoir différenciée, les valeurs en  $V$  de  $d^p \frac{dA}{d^p x}$ ,  $d^{p-1}$ .

$$\frac{dA}{d^{p-1} x}, \&c. \text{ qu'on peut aisément tirer des formules qu'on a données dans le problème précédent, on aura } d^{p-1} \frac{dV}{d^p x} - 2 d^{p-2} \frac{dV}{d^{p-1} x} + 3 d^{p-3} \frac{dV}{d^{p-2} x} - 4 d^{p-4} \frac{dV}{d^{p-3} x} + \&c. = 0;$$

ainsi la fonction  $V$  admettra une double intégration, si l'on a les deux équations suivantes.

$$d^p \frac{dV}{d^{p+1} x} - d^{p-1} \frac{dV}{d^p x} + d^{p-2} \frac{dV}{d^{p-1} x} - \&c. = 0, \\ d^{p-1} \frac{dV}{d^p x} - 2 d^{p-2} \frac{dV}{d^{p-1} x} + 3 d^{p-3} \frac{dV}{d^{p-2} x} - 4 d^{p-4} \frac{dV}{d^{p-3} x} + 5 d^{p-5} \frac{dV}{d^{p-4} x} - \&c. = 0,$$

donc si  $A$  différentielle de l'ordre  $p-1$  a deux intégrales  $A'$ ,  $A''$ , la première de l'ordre  $p-2$ , la seconde de l'ordre  $p-3$ , on aura les deux équations,

$$d^{p-1} \frac{dA}{d^p x} - d^{p-2} \frac{dA}{d^{p-1} x} + d^{p-3} \frac{dA}{d^{p-2} x} - \&c. = 0, \\ d^{p-2} \frac{dA}{d^{p-1} x} - 2 d^{p-3} \frac{dA}{d^{p-2} x} + 3 d^{p-4} \frac{dA}{d^{p-3} x} - \&c. = 0.$$

Si dans ces équations différenciées on substitue les valeurs des différentielles de  $A$  données en  $V$ , &c

qu'on écrive encore l'équation qui doit avoir lieu lorsque  $V$  a une intégrale  $= A$ , on aura les équations,

$$\begin{aligned} d^p \frac{dV}{d^{p+1}x} - d^{p-1} \frac{dV}{d^p x} + d^{p-2} \frac{dV}{d^{p-1}x} - \\ d^{p-3} \frac{dV}{d^{p-2}x} + \&c. = 0, \\ d^{p-1} \frac{dV}{d^p x} - 2 d^{p-2} \frac{dV}{d^{p-1}x} + 3 d^{p-3} \frac{dV}{d^{p-2}x} - \\ 4 d^{p-4} \frac{dV}{d^{p-3}x} + \&c. = 0, \\ d^{p-2} \frac{dV}{d^{p-1}x} - 3 d^{p-3} \frac{dV}{d^{p-2}x} + 6 d^{p-4} \frac{dV}{d^{p-3}x} - \\ 10 d^{p-5} \frac{dV}{d^{p-4}x} + \&c. = 0. \end{aligned}$$

En continuant de même, on trouvera les équations de condition qui doivent avoir lieu pour que  $V$  puisse être intégrée quatre fois, cinq fois, &c.

Pour pouvoir facilement trouver ces équations, on doit faire attention à leurs coefficients : or si l'on a les séries suivantes :

Séries.	Termes généraux.
1, 1, 1, 1, &c.	1
1, 2, 3, 4, &c.	$\frac{n}{n \cdot (n+1)}$
1, 3, 6, 10, 15, &c.	$\frac{2}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$
1, 4, 10, 20, 35, &c....	$\frac{3}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}$
1, 5, 15, 35, 70, &c....	$\frac{4}{2 \cdot 3 \cdot 4}$
&c. ....	(*) &c. ....

(\*) La première de ces séries est celle des unités, la  
La

La premiere équation aura  $d^p \frac{dV}{d^{p+1}x}$  pour premier terme, & tous les coefficients seront  $= 1$ , toutes les équations ont le signe  $+$  &  $-$  alternativement; la seconde équation a  $d^{p-1} \frac{dV}{d^p x}$  pour premier terme, & ses coefficients sont les nombres de la seconde suite; la troisieme équation a  $d^{p-2} \frac{dV}{d^{p-1} x}$  pour premier terme, & ses coefficients sont les nombres de la troisieme suite; la quatrieme équation auroit  $d^{p-3} \frac{dV}{d^{p-2} x}$  pour premier terme, & pour coefficients les nombres de la quatrieme suite, & ainsi de suite; mais toutes les équations ont  $\frac{dV}{dx}$  pour dernier terme. Si la premiere équation a lieu la fonction  $V$  aura une intégrale  $A$ , elle en aura deux; c'est-à-dire, qu'elle pourra être intégrée deux fois, si les deux premieres équations ont lieu, trois fois si les trois premieres équations ont lieu; & si la fonction  $V$  est du cinquieme ordre, on pourra l'intégrer cinq fois, ou trouver son intégrale finie, lorsqu'on aura cinq équations de la forme de celles dont on vient de parler.

Ce qu'on vient de dire d'une fonction différentielle  $V$ , doit s'entendre également d'une équation  $V = 0$ ; mais il arrive rarement que les équations & fonctions différentielles aient les conditions nécessaires pour que les équations, dont on vient de parler, puissent avoir

seconde celle des nombres naturels, la troisieme celle des nombres triangulaires, la quatrieme celle des nombres pyramidaux, & ainsi de suite. Il est aisé de voir que le terme général de la seconde est le terme sommatoire de la premiere, & qu'en général le terme général de l'une de ces séries est le terme sommatoire de la précédente.

Tome V.

D

lieu : il est vrai qu'en les multipliant par un facteur  $M$ , les Géomètres trouvent souvent une expression  $MV$ , dans laquelle les équations de condition peuvent avoir lieu : mais par quelle méthode générale pourra-t-on trouver ce multiplicateur  $M$  ?

Au reste il est aisé de comprendre que la variable  $y$  doit donner une suite d'équations semblables à celles que donne la variable  $x$ , qu'il en est de même de la variable  $z$ , &c. de toute autre variable qui se trouve dans  $V$ , &c. qu'il faut que toutes ces équations aient lieu ensemble, pour pouvoir déterminer le nombre d'intégrations dont  $V$  est susceptible dans l'état où elle est.

222. ON ne fera peut-être pas fâché que nous résolvions le même problème de la manière suivante. Si l'on compare les valeurs de  $N, P, Q, R, S$ , &c. que nous avons trouvées dans le Problème II, avec les

valeurs de  $\frac{dV}{dx}, \frac{d^2V}{dx^2}$ , &c. que donne la suite d'équations qu'on a trouvées dans le problème précédent ;

on verra que  $\frac{dV}{dx} = N, \frac{d^2V}{dx^2} = P$ , &c. Si dans la suite, dont on vient de parler, on retranche les équations de rang pair, &c. qu'on ajoute celles de rang impair, on aura

$$\frac{dV}{dx} - d \frac{dV}{dx^2} + dd \frac{dV}{dx^3} - d^3 \frac{dV}{dx^4} + d^4 \frac{dV}{dx^5}$$

&c.  $= 0$  (\*), équation qui a lieu lorsque  $V$  doit avoir une intégrale  $A$  d'un ordre inférieur d'une unité ; donc lorsque  $A$  doit avoir une intégrale  $A'$  d'un ordre inférieur d'une unité (à  $A$ ), c'est-à-dire, lorsque  $V$  doit avoir deux intégrales, l'on aura (B)

$$\frac{dA}{dx} - d \frac{dA}{dx^2} + dd \frac{dA}{dx^3} - d^3 \frac{dA}{dx^4} + d^4 \frac{dA}{dx^5}, \&c.$$

(\*) Cette équation est la même que celle-ci :

$$N - dP + ddQ - d^3R + d^4S, \&c. = 0.$$

$= 0$ ; mais on a vu ci-dessus (Problème III.) que

$$P = \frac{dA}{dx} + d \frac{dA}{dp}$$

$$Q = \frac{dA}{dp} + d \frac{dA}{dq}$$

$$R = \frac{dA}{dq} + d \frac{dA}{dr}$$

&c. . . . .

Cela posé, si l'on fait attention aux valeurs de  $p, q, r$ , &c. qu'on prenne la première différence de la seconde de ces équations, la seconde différence de la troisième, & ainsi de suite; qu'on retranche ensuite les équations de rang pair, qu'on ajoute celles de rang impair, & qu'on transpose dans la première, on aura

$$\frac{dA}{dx} = P - dQ + ddR - d^3S, \text{ \&c.}$$

Si l'on regarde ensuite la seconde équation comme la première, & qu'on prenne la première différence de la troisième, la seconde de la quatrième, & qu'on fasse sur ces équations les opérations dont on vient de parler, c'est-à-dire, si l'on ajoute alors celles de rang impair, & qu'on retranche celles de rang pair,

en prenant l'équation  $Q = \frac{dA}{dp} + d \frac{dA}{dq}$  pour la première, & qu'on continue de même, on aura

$$\frac{dA}{dp} = Q - dR + ddS, \text{ \&c.}$$

$$\frac{dA}{dq} = R - dS + ddT, \text{ \&c.}$$

$$\frac{dA}{dr} = S - dT, \text{ \&c.}$$

Maintenant si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (B), on aura l'équation de condition  $P - 2dQ + 3d^2R - 4d^3S, \text{ \&c.} = 0$ , ou (en mettant les

D 2

valeurs de P, Q, &c.)  $\frac{dV}{d^2x} - 2d \frac{dV}{d^3x} + 3dd \frac{dV}{d^4x} - \&c. = 0$ ; ainsi lorsque V doit avoir deux intégrales successives, on aura ces équations,

$$\frac{dV}{dx} - d \frac{dV}{d^2x} + dd \frac{dV}{d^3x} - d^3 \frac{dV}{d^4x} + \&c. = 0,$$

$$\frac{dV}{ddx} - 2d \frac{dV}{d^3x} + 3dd \frac{dV}{d^4x} - \&c. = 0,$$

donc si A doit avoir une intégrale A' d'un ordre inférieur d'une unité, & que A' doive avoir une intégrale A'' d'un ordre inférieur d'une unité (à A'), c'est-à-dire, si V doit avoir trois intégrales, on aura ces équations,

$$\frac{dA}{dx} - d. \frac{dA}{d^2x} + \&c. = 0,$$

$$\frac{dA}{ddx} - 2d \frac{dA}{d^3x} + 3dd. \frac{dA}{d^4x} - \&c. = 0:$$

si dans cette dernière équation on fait les mêmes substitutions pour  $\frac{dA}{dp}$  ou  $\left(\frac{dA}{ddx}\right)$ ,  $\frac{dA}{dq}$  ou  $\left(\frac{dA}{d^3x}\right)$ , &c. on aura l'équation  $Q - 3dR + 6d^2S - \&c. = 0$ , qui devient

$$\frac{dV}{d^3x} - 3d. \frac{dV}{d^4x} + 6d^2 \frac{dV}{d^5x} - 10d^3 \frac{dV}{d^6x} + \&c. = 0.$$

Donc lorsque V doit avoir trois intégrales, on a les trois équations,

$$\frac{dV}{dx} - d. \frac{dV}{d^2x} + \&c. = 0,$$

$$\frac{dV}{d^2x} - 2d \frac{dV}{d^3x} + \&c. = 0,$$

$$\frac{dV}{d^3x} - 3d. \frac{dV}{d^4x} + 6d^2 \frac{dV}{d^5x} - \&c. = 0;$$



donc si  $A$  doit avoir trois intégrales  $A'$ ,  $A''$ ,  $A'''$ , c'est-à-dire, si  $V$  doit avoir quatre intégrales successives, on aura ces trois équations:

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dx} - d \frac{dA}{d^2x} + dd \frac{dA}{d^3x} - \&c. &= 0, \\ \frac{dA}{d^2x} - 2d \frac{dA}{d^3x} + 3dd \frac{dA}{d^4x} - \&c. &= 0, \\ \frac{dA}{d^3x} - 3d \frac{dA}{d^4x} + 6dd \frac{dA}{d^5x} - \&c. &= 0.\end{aligned}$$

Si dans cette dernière équation on substitue, comme ci-dessus, les valeurs de  $\frac{dA}{d^3x}$  (qui est la même que  $\frac{dA}{dq}$ ),  $\frac{dA}{d^4x}$ , c'est-à-dire, de  $\frac{dA}{dr}$ , &c.; on trouvera, en s'y prenant comme ci-devant, l'équation

$$\frac{dV}{d^4x} - 4d \frac{dV}{d^5x} + 10dd \frac{dV}{d^6x} - 20d^3 \frac{dV}{d^7x} + \&c. = 0.$$

Donc si  $V$  doit avoir quatre intégrales successives, on aura les quatre équations,

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dx} - d. \frac{dV}{d^2x} + \&c. &= 0; \\ \frac{dV}{d^2x} - 2d. \frac{dV}{d^3x} + \&c. &= 0. \\ \frac{dV}{d^3x} - 3d. \frac{dV}{d^4x} + \&c. &= 0. \\ \frac{dV}{d^4x} - 4d. \frac{dV}{d^5x} + \&c. &= 0.\end{aligned}$$

Il est aisé de continuer, en faisant attention que dans la première équation de condition, les coefficients sont chacun  $= 1$ , que dans la seconde ce sont les nombres naturels, dans la troisième les nombres triangulaires, dans la quatrième les nombres pyramidaux, &c. ainsi de suite; de sorte que les coefficients sont les mêmes

que ceux des séries dont on a parlé ci-dessus. Si l'on vouloit chasser les  $V$  de ces équations, on auroit alors les équations suivantes :

$$1^{\circ}. N - dP + ddQ - d^3R + d^4S - \&c. = 0.$$

$$2^{\circ}. P - 2dQ + 3ddR - 4d^3S + 5d^4T - \&c. = 0.$$

$$3^{\circ}. Q - 3dR + 6ddS - 10d^3T + \&c. = 0.$$

$$4^{\circ}. R - 4dS + 10d^2T - \&c. = 0.$$

$$5^{\circ}. S - 5dT + \dots \&c. = 0.$$

$$6^{\circ}. T - \dots \&c. = 0.$$

$$\&c. \dots \&c. \dots$$

Telles sont les équations que fournit la variable  $x$  ; chacune des autres variables doit donner une suite d'équations semblables , le nombre des équations dans chaque suite étant égal à l'ordre de la différentielle  $V$ . Si la première équation de chaque suite peut avoir lieu ,  $V$  aura une intégrale  $A$  d'un ordre inférieur d'une unité ; si les deux premières équations de chaque suite ont lieu en même-tems ,  $V$  aura deux intégrales , c'est-à-dire , pourra être intégré deux fois , &c ainsi de suite.



## SECONDE PARTIE

### DE LA TROISIEME SECTION.

223. CETTE seconde partie contient quelques méthodes d'intégrer qui sont encore bien peu connues, quoique très-vastes & très-intéressantes, avec le calcul des variations. Mais avant de passer plus loin, nous ferons remarquer qu'une équation du premier ordre, telle que  $Pdx^2 + Qdy^2 + Rdz^2 + 2pdx dy + 2qdx dz + 2rdy dz = 0$ , ne peut être réelle, à moins qu'on puisse la réduire en facteurs de cette forme  $P'dx + Q'dy + R'dz = 0$ ; car quelle que soit l'intégrale, il est visible que  $z$  sera une fonction de  $y$  & de  $x$ , telle que l'on aura une équation de cette forme  $dz = P'dx + Q'dy$ ; donc en substituant cette valeur de  $dz$  dans la proposée, tous les termes doivent se détruire mutuellement; ce qui ne pourroit avoir lieu, si en prenant la valeur de  $dz$  par la résolution de la proposée, les différentielles  $dx$  &  $dy$  étoient affectées de radicaux, de manière qu'on ne pût les en délivrer; ainsi la proposée donnant  $dz = [ -qdx - rdy \pm \sqrt{(qq - PR)dx^2 + 2(qr - Rp)dx dy + (rr - QR)dy^2} ] : R$  (\*), ne peut être réelle si on ne peut extraire la racine.

*De l'intégration des différentielles du premier ordre à trois variables.*

224. PROBLEME. Intégrer l'équation du premier

---

(\*) Ces deux points indiquent que la quantité qui les précède doit être divisée par  $R$ .

ordre  $A dx + B dy + C dz = 0$ , dans laquelle  $A, B, C$ , sont supposées des fonctions des variables  $x, y, z$ . On cherchera par la méthode, dont a parlé ci-devant, si elle est réelle, si elle est absurde, on l'abandonnera; si elle est réelle, on supposera une des variables, (par exemple  $z$ ) constante, ce qui donnera  $dz = 0$ , &  $C dz = 0$ ; donc on aura  $A dx + B dy = 0$ , équation qu'on intégrera en supposant  $z$  constante, ayant soin d'ajouter une constante  $M$ : or cette constante  $M$  peut être entièrement constante, ou renfermer  $z$ . Considérant maintenant  $z$  comme variable, on différenciera l'intégrale trouvée, pour comparer sa différentielle avec l'équation proposée. Les fonctions  $A$  &  $B$  se présenteront d'elles-mêmes; mais la fonction  $M$  doit être différenciée en supposant  $z$  variable, pour avoir  $dM = C dz$ , ce qui fera connoître  $C$ . De cette manière on obtiendra l'intégrale cherchée qui sera complète, parce que il restera toujours dans  $M$  une partie arbitraire.

**COROLLAIRE I.** On peut donc par cette méthode réduire l'intégration des équations à trois variables à celle des équations à deux variables.

**COROLLAIRE II.** Cette intégration peut se faire de trois manières, en supposant successivement  $x, y, z$  constans; mais il doit toujours en résulter la même intégrale complète.

**EXEMPLE I.** Soit proposée l'équation  $2 dx. (x + y) + dy (2x + 3y + x) + dz (x + y) = 0$ . Considérant  $y$  comme constant, pour avoir  $dy = 0$ , il vient  $2 dx (x + y) + dz (x + y)$

$= 0$ , ou  $\frac{2dx}{x+y} + \frac{dz}{y+z} = 0$ ; dont l'intégrale, en supposant  $y$  constant, est  $2L.(x+y) + L.(y+z) = C$  ou  $M$  constante ( $A$ ). Soit  $dM = dC = Ddy$ : si l'on différencie l'équation  $A$ , en faisant varier  $x, y, z$ , l'on trouvera  $\frac{2dx + 2dy}{x+y} + \frac{dy + dz}{y+z} = Ddy$ , ou  $2dx(y+z) + 2dy(y+z) + dy(x+y) + dz(x+y) = Ddy(x+y)(y+z)$ . Mais le premier membre de cette équation, étant évidemment égal au premier membre de la proposée, le second doit être  $= 0$ ; donc  $dC = Ddy$  est  $= 0$ : & par conséquent  $C$  est une véritable constante; & l'intégrale complète est  $2L.(x+y) + L.(y+z) = C$  constante, ou  $(x+y)^2.(y+z) = B$  constante.

**EXEMPLE II.** Soit l'équation  $bzz y dx + bzz x dy + (2bxy z + a) dz = 0$ . Supposant  $z$  constant, on a  $bzz y dx + bzz x dy = 0$ , dont l'intégrale, en regardant  $z$  comme constant, donne  $bzz yx = M$ . Différenciant cette équation, en faisant varier  $x, y, z$ , on aura  $bzz y dx + bzz x dy + 2bxy z dz = dM$ . Si de cette équation on retranche la proposée; il restera  $-a dz = dM$ ; donc en intégrant,  $-az + C = M$ ; donc l'intégrale complète sera  $bzz xy = -az + C$ , ou  $bzz xy + az = C$  constante. Mais il n'est pas toujours aussi aisé que dans les exemples précédens d'obtenir l'intégrale complète par cette méthode.

*De la nature des équations différentielles du premier ordre, par lesquelles on détermine en général les fonctions de deux variables.*

225. PROBLEME. *V étant supposée une fonction de deux variables  $x$  &  $y$ , si dans la formule intégrale  $S. V dx$ , on a considéré  $y$  comme constant; on demande de trouver la différentielle de  $S. V dx$ , en supposant aussi  $y$  variable. Soit  $S V dx = m$ , il est visible que  $m$  doit être une fonction de  $x$  & de  $y$ , en regardant même  $y$  comme constant. Il est évident aussi, qu'en supposant  $y$  constant dans la différenciation, on aura  $dm = V dx$ ; mais en supposant  $y$  variable, on doit avoir  $dm = V dx + P dy$ ; or selon ce qu'on a dit ci-dessus, cette différentielle étant vraie, on a  $\left(\frac{dV}{dy}\right) = \left(\frac{dP}{dx}\right)$ ; donc  $dx \left(\frac{dV}{dy}\right) = dx \left(\frac{dP}{dx}\right)$ . Mais  $dx \left(\frac{dP}{dx}\right)$  est la différentielle de  $P$ , en supposant  $y$  constant; donc on trouvera  $P$  en intégrant  $dx \left(\frac{dV}{dy}\right)$  dans la supposition de  $y$  constant; donc  $P = S dx \left(\frac{dV}{dy}\right) (*)$ , &  $dm = V dx + dy S dx \left(\frac{dV}{dy}\right)$ .*

226. PROBLEME. *Trouver la nature de la fonction  $z$  de deux variables  $y$  &  $x$ , pour que  $p$  étant*

---

(\*) Voyez la remarque ci-dessus (92).

une fonction de  $x$ , on ait  $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$  (\*). Soit  $dz = p dx + q dy$ . Puisqu'on connoît  $p dx$ , si on fait  $y$  constant, on aura  $z = \int p dx + C$ ; mais parce que  $C$  peut renfermer une fonction quelconque de  $y$ , nous ferons  $C = f(y)$ , cette expression désignant une fonction quelconque de  $y$ ; donc  $z = \int p dx + f(y)$ .

COROLLAIRE. Donc en supposant que la fonction  $z$  ne renferme pas d'autre variable que  $x$  &  $y$ , la différentielle  $dz = p dx + q dy$ , ne peut être réelle, à moins que  $q$  ne soit une fonction de  $y$  sans  $x$ . Si l'on suppose  $p = 3axx$ , on aura  $\left(\frac{dz}{dx}\right) = 3axx$ ; & si l'on fait  $f(y) = A + By + by^2 + \&c.$ , on aura  $z = axxx + A + By + by^2 + \&c.$ : mais ce sera une intégrale particulière, quelque nombre de constantes arbitraires  $A, B, b, \&c.$  qu'elle renferme: car l'intégrale complete  $z = axxx + f(y)$ , est infiniment plus étendue.

*De la résolution des équations à deux variables, lorsqu'une formule différentielle est donnée en quantités finies.*

227. PROBLEME. Déterminer la nature de la fonction  $z$  de deux variables  $x$  &  $y$ , lorsque la formule  $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p = a$ , quantité constante. Soit

---

(\*) L'expression  $\left(\frac{dz}{dx}\right)$  indique la différentielle de  $z$ , prise en faisant varier  $x$ , & divisée par  $dx$ .

$d\zeta = p dx + q dy = a dx + q dy$ . Si l'on fait  $y$  constant, on a  $d\zeta = a dx$ ,  $\zeta = ax + C$ . Mais il est visible que  $C = f(y)$ . Si l'on suppose  $x$  constant, on aura  $d\zeta = dC = q dy$ ,  $\left(\frac{d\zeta}{dy}\right) = q = \left(\frac{dC}{dy}\right)$ ;  $q$  est donc une fonction de  $y$  sans  $x$ .

Si l'on vouloit que  $\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)$  fût  $= 0$ , dans ce cas  $\zeta$  seroit une fonction de  $y$  sans  $x$ ; car cette formule ne devant subir aucun changement par la variation de  $x$ , ne sauroit renfermer  $x$ . C'est d'ailleurs ce que fait voir l'équation  $d\zeta = p dx + q dy$ , qui dans la supposition de  $y$  constant, donne  $d\zeta = p dx$ ,  $\left(\frac{d\zeta}{dx}\right) = p$ , équation qui, lorsque  $p = 0$ , donne  $\left(\frac{d\zeta}{dx}\right) = 0$ : or dans ce cas  $\zeta$  ne contient point  $x$ .

REMARQUE I. Nous pouvons donc supposer  $C = f(y)$ , quantité qui reste entièrement indéterminée. On peut la concevoir telle que les abscisses d'une courbe, étant représentées par  $y$ , les ordonnées soient représentées par  $f(y)$ ; & il n'est pas nécessaire que cette courbe soit régulière, elle peut résulter de l'assemblage de plusieurs arcs de différentes courbes. On peut appeler ces sortes de fonctions irrégulières, des *fonctions discontinues*.

REMARQUE II. Comme dans les intégrations vulgaires on détermine la constante arbitraire par la nature du problème; de même dans les pro-



blèmes dont on trouve la solution par la manière d'intégrer dont il est ici question, on déterminera par la nature du problème la fonction  $C = f(y)$  qui entre dans l'intégrale. Ainsi si l'on fait prendre à une corde tendue une figure quelconque, & qu'on lui laisse tout-à-coup la liberté de faire ses oscillations, on pourra par les principes de la mécanique déterminer pour un instant quelconque la figure que doit alors avoir la corde, & cela se fera en introduisant dans l'intégrale de l'espèce dont il s'agit, une fonction arbitraire, qu'il convient ensuite de déterminer, de manière qu'au commencement du mouvement on ait la figure qu'on avoit fait prendre à la corde: & comme la solution doit être générale, afin de satisfaire à une figure primitive quelconque, elle doit s'étendre aux cas dans lesquels on auroit donné à la corde, avant de la lâcher, une figure irrégulière sans continuité, je veux dire une figure composée de plusieurs arcs de courbes différentes.

228. PROBLÈME.  $z$  étant toujours une fonction des variables  $x$  &  $y$ ,  $p$  étant aussi une certaine fonction des mêmes variables, trouver en général la nature de  $z$  pour que l'on ait  $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$ .

Soit  $dz = p dx + q dy$ , regardant  $y$  comme constant & intégrant, il vient  $z = S. p dx + f(y)$ ,  $f(y)$  exprimant une fonction quelconque de  $y$ , sans en excepter les discontinues qu'on ne sauroit représenter par des expressions analytiques. Soit  $V$  la fonction demandée de  $x$  & de  $y$ , l'on aura  $V = p$ ,  $dz = V dx + q dy$ . Si l'on considère  $y$  comme constant, on aura  $dz = V dx$ , & en

intégrant dans la même supposition, il viendra  $z = S V dx + f(y)$ .

Selon ce qu'on a dit ci-dessus (225), en regardant  $x$  &  $y$  comme variables, on doit avoir  $d z = V dx + d y S dx \left( \frac{d V}{d y} \right) + d y f'(y)$ , en faisant la différentielle de  $f(y)$  égale à  $d y f'(y)$ ; d'où l'on tirera  $q = S dx \left( \frac{d V}{d y} \right) + f'(y)$ .

Mais dans la formule  $d x \left( \frac{d V}{d y} \right)$  on doit regarder  $x$  seule comme variable.

Si on demande, par exemple, que  $p = \frac{x}{\sqrt{(xx + yy)}}$ , on aura  $S V dx = S. \frac{x dx}{\sqrt{(xx + yy)}} = \sqrt{(xx + yy)}$ ; donc  $z = \sqrt{(xx + yy)} + f(y)$ , &  $q = \frac{y}{\sqrt{(xx + yy)}} + f'(y)$ .

Quoique par cette méthode on détermine la valeur de  $p$ , celle de  $q$  ne paroît pas également déterminée; il semble au contraire qu'elle doit introduire une indéterminée, indépendante de la première. Pour éviter une telle signification vague, il est à propos d'employer dans la détermination de  $S dx \left( \frac{d V}{d y} \right)$ , la même condition dont on se sert pour déterminer  $S. V dx$ . Si, par exemple,  $S. V dx$  doit être  $= 0$ , lorsque  $x = a$ , il faudra aussi que l'on ait  $S dx \left( \frac{d V}{d y} \right) = 0$ , lorsque  $x = a$ . Dans l'exemple proposé, si on

suppose que  $S. V dx$  doit s'évanouir lorsque  $x=0$ ,  
l'on aura  $S. V dx = \sqrt{(xx + yy)} - y$ ; &  
 $S dx \left( \frac{dV}{dy} \right) = \frac{y}{\sqrt{(xx + yy)}} - 1$ , mais on  
a le même résultat en supposant  $f(y) = -y$   
&  $f'(y) = -1$ .

Le principe de cette détermination est fondé  
sur ce théorème : si  $z$  est une fonction de deux  
variables  $x$  &  $y$ , qui devienne  $= 0$ , lorsque  $x=a$ ,  
& que l'on ait  $d z = p dx + q dy$ , la quantité  
 $q$  s'évanouira dans la même supposition de  $x=a$  :  
d'où il est aisé de tirer cette conclusion; que si  
 $z$  devient  $= 0$ , lorsque  $y=b$ , on aura aussi  
 $p=0$  dans la même supposition de  $y=b$ .

*De la résolution des équations, dans lesquelles  
deux formules différentielles, l'une est donnée  
par l'autre.*

229. PROBLEME. Si  $z$  doit être une fonction des  
variables  $x$  &  $y$ , telle que  $a \left( \frac{dz}{dx} \right) + b \left( \frac{dz}{dy} \right)$   
 $= c$  quantité constante, déterminer  $z$ . Soit  $d z =$   
 $p dx + q dy$ , on aura  $ap + bq = c$ , puisque  $\left( \frac{dz}{dx} \right)$   
 $= p$  &  $\left( \frac{dz}{dy} \right) = q$ . Donc  $q = \frac{c - ap}{b}$ ; &  
 $d z = p dx + \left( \frac{c - ap}{b} \right) dy = \frac{c}{b} dy +$   
 $\frac{p}{b} (b dx - a dy)$ , formule qui doit être intégrable.  
Mais la partie  $\frac{c}{b} dy$  étant intégrable par elle-même,

l'autre partie doit être intégrable séparément. C'est pourquoi ayant fait  $bx - ay = t$ , afin que cette partie devienne  $\frac{p}{b} dt$ , il est visible que  $p$  doit être une fonction de  $t$ , & que l'intégrale doit aussi être une fonction de  $t$ . Ainsi nous pouvons supposer  $S.p(bdx - a dy) = F(t) = f(bx - ay)$ , cette expression marquant une fonction de  $bx - ay$ ; donc on aura  $z = \frac{c}{b}y + \frac{1}{b}f(bx - ay)$ .

COROLLAIRE. Si  $b = 1$ ,  $c = 0$ ,  $a = -1$ , on aura  $z = f(x + y)$ , si  $b = c = a = 1$ , on a  $z = y + f(x - y)$ .

REMARQUE. Par les premiers élémens du calcul intégral, on a  $S p dx = px - S x dp$ ,  $S q dy = qy - S y dq$ ; mais à cause de  $dz = p dx + q dy$ , on a  $z = S(p dx + q dy)$ ; donc  $z = px + qy - S(x dp + y dq)$ .

230. PROBLEME. Si  $z$  doit être une fonction de deux variables  $x$  &  $y$ , telle qu'en supposant  $dz = p dx + q dy$ , on ait  $p q = 1$  & par conséquent  $q = \frac{1}{p}$ , déterminer la fonction  $z$ . Par la remarque précédente  $z = px + qy - S(x dp + y dq) = px + \frac{y}{p} - S\left(x dp - \frac{y dp}{p}\right)$ , dans le cas du problème; donc la formule  $\left(x - \frac{y}{p}\right) dp$  doit être intégrable: donc en faisant  $x - \frac{y}{p} = t$ , la formule  $t dp$  sera intégrable;

grable; mais généralement parlant, cette formule n'est intégrable que lorsque  $\epsilon$  est une fonction de  $p$  (\*); donc  $x - \frac{y}{pp}$  doit être une fonction de  $p$  seulement; & l'intégrale de  $\left(x - \frac{y}{pp}\right) dp$  fera une fonction que nous ferons  $= f(p)$ ; donc  $z = px + qy - f(p)$ ,  $x - \frac{y}{pp} = f'(p)$ , en faisant  $= dp f'(p)$  la différentielle de  $f(p)$ ; donc  $x = \frac{y}{pp} + f'(p)$  &  $z = \frac{2y}{p} + p f'(p) - f(p)$ , équation qui donne la solution générale du problème.

REMARQUE. Toutes les fois que l'on prend pour  $f(p)$  une fonction algébrique de  $p$ , on peut par le moyen des deux dernières équations, parvenir à une équation entre  $z$ ,  $x$  &  $y$ . Mais on ne peut pas trouver cette équation dans tous les cas: on peut cependant construire le problème par le moyen d'une courbe régulière ou irrégulière, dont l'abscisse seroit  $= p$ , & l'ordonnée perpendiculaire  $= f'(p) = \epsilon$ ; car alors  $f(p) = S. \epsilon dp$ , aire de la courbe que nous supposons  $= u$  (\*\*), de sorte que les équations  $x - \frac{y}{pp} = \epsilon$ ,  $z = px + \frac{y}{p} - u$ , donneront

(\*) Si  $\epsilon$  étoit une constante  $= a$ , on pourroit supposer  $\epsilon = ap^0$  à cause de  $p^0 = 1$ , & regarder  $ap^0$  comme une fonction de  $p$ .

(\*\*) Il est visible que  $u = f(p)$ .

la solution générale du problème; c'est-à-dire, qu'en prenant pour  $x$  une valeur quelconque, on aura  $y = pp(x - t)$ , &  $z = 2px - pt - u$ .

231. PROBLEME. Si  $z$  est une fonction de  $x$  & de  $y$ , telle qu'en faisant  $dz = p dx + q dy$ ,  $q$  doive être une fonction de  $p$ , trouver en général la nature de  $z$ . Puisque  $q$  est une fonction de  $p$ , nous pouvons supposer  $dq = t dp$ ,  $t$  étant une fonction de  $p$ ; & l'on aura  $z = px + qy - S(x dp + y dq) = px + qy - S(x + ty) dp$ ; donc  $S(x + ty) dp$  doit être une fonction de  $p$ , c'est-à-dire, doit être  $= f(p)$ , dont nous ferons la différentielle  $= dp f'(p)$ . Ainsi  $z = px + qy - f(p)$ ; &  $x + ty = f'(p)$ , équations qui donnent la solution générale du problème,  $f'(p)$  représentant une fonction de  $p$ , continue ou discontinue.

COROLLAIRE. Si  $p$  représente l'abscisse,  $f'(p)$  l'ordonnée perpendiculaire d'une courbe,  $f(p)$  représentera l'aire  $u$  de la courbe, par le moyen de laquelle on pourra construire le problème.

*De la résolution des équations dans lesquelles on donne le rapport entre deux formules différentielles, & une seule des trois variables.*

232. PROBLEME. Si  $z$  doit être une fonction de  $x$  & de  $y$ , telle qu'ayant supposé  $dz = p dx + q dy$ , l'on doive avoir  $q = \frac{p^x}{a}$ , déterminer  $z$ .

L'on aura  $dz = p dx + \frac{p^x}{a} dy = p x \times \left( \frac{dx}{x} + \frac{dy}{\frac{x}{a}} \right) = p x (du)$ , en faisant  $L. x$

+  $\frac{y}{a} = u$ . Or cette formule ne peut être intégrable, à moins que  $px$ , & par conséquent  $z$  ne soit une fonction de  $u$ , ou de  $L.x + \frac{y}{a}$ ; donc  $z = f\left(L.x + \frac{y}{a}\right)$ : mais en désignant la différentielle de  $f(u)$  par  $f'(u)du$ , on a  $px du = f'(u) du$ , ou  $px = f'\left(L.x + \frac{y}{a}\right)$ . Ainsi la solution complète du problème est renfermée dans les deux équations  $z = f\left(L.x + \frac{y}{a}\right)$ , &  $px = f'\left(L.x + \frac{y}{a}\right)$ .

233. PROBLEME.  $z$  étant une fonction de  $x$  & de  $y$ , telle qu'en supposant  $dz = p dx + q dy$ , on ait  $q = pm + t$ ,  $m$  &  $t$  étant des fonctions quelconques de  $x$ , déterminer  $z$ . L'on aura  $dz = p dx + pm dy + t dy$ ; donc en faisant  $p = r - \frac{t}{m}$ , on aura  $dz = r dx - \frac{t dx}{m} + rm dy = -\frac{t dx}{m} + rm\left(\frac{dx}{m} + dy\right)$ . Donc  $rm$  &  $S.rm\left(\frac{dx}{m} + dy\right)$  doivent être des fonctions de  $S.\frac{dx}{m} + y$ ; donc  $S.rm\left(\frac{dx}{m} + dy\right) = f\left(y + S.\frac{dx}{m}\right)$ ,  $rm = f'\left(y + S.\frac{dx}{m}\right)$  (\*), équation

(\*) On comprend assez par la solution du problème précédent quelle est la signification de  $f$ .

que nous désignerons par (A). Donc  $z = -$   
 $S. \frac{t dx}{m} + f\left(y + S. \frac{dx}{m}\right)$ , &  $p = r - \frac{t}{m}$   
 $= -\frac{t}{m} + \frac{1}{m} \cdot f'\left(y + S. \frac{dx}{m}\right)$ , en substituant  
la valeur de  $r$  prise de l'équation A. On aura aussi  
 $q = pm + t = f'\left(y + S. \frac{dx}{m}\right)$ ; mais parce  
que  $m$  &  $t$  sont des fonctions de  $x$ , les formules  
 $S. \frac{dx}{m}$ ,  $S. \frac{t dx}{m}$  ne troublent pas la solution.

234. PROBLEME. Soit  $dz = p dx + q dy$ , si  
la relation entre  $p$ ,  $q$  &  $x$  est donnée par une équation  
quelconque, trouver la fonction  $z$ , exprimée  
par les variables  $x$  &  $y$ . Supposant que par l'équation  
proposée entre  $p$ ,  $q$  &  $x$  (\*), on ait trouvé  
la valeur de  $x$  exprimée par une fonction de  
 $p$  & de  $q$ , on pourra dans l'équation  $z = px +$   
 $qy - S.(x dp + y dq)$ , intégrer  $x dp$ , en  
supposant  $q$  constant, pour avoir  $S. x dp = V$   
 $+ f(q)$ ,  $V$  étant censée une fonction connue de  
 $p$  & de  $q$ , telle que l'on ait  $dV = x dp + T dq$ ,  
 $T$  étant aussi une fonction de  $p$  & de  $q$ . Mais  
parce que  $(x dp + y dq)$  doit admettre l'in-  
tégration, on a  $S.(x dp + y dq) = V + f(q)$ .  
Donc, en différenciant,  $x dp + y dq = x dp +$   
 $T dq + dq f'(q)$ ; & par conséquent  $y = T$   
 $+ f'(q)$ , &  $z = px + qy - V - f(q)$ ,  
ou  $z = px + Tq + qf'(q) - f(q) - V$ .  
Ainsi par l'équation donnée on exprimera  $x$  en

---

(\*) Ici les équations finies sont supposées toujours  
résolubles.



$p$  &  $q$ , en prenant ensuite  $q$  pour constant, on aura  $V = S. x dp$ , &  $dV = x dp + T dq$ . Ayant trouvé  $V$  &  $T$ , ou  $p$  &  $q$ ,  $y$  &  $z$  seront exprimés par les formules qu'on vient de trouver.

On peut aussi, par l'équation donnée, chercher  $p$  en  $x$  &  $q$ ; mais  $z = px + qy - S. (x dp + y dq) = qy + S. (p dx + x dp - x dp - y dq) = qy + S. (p dx - y dq)$ . Mais  $p$  est une fonction de  $x$  & de  $q$ ; donc il y a une fonction  $V$  de ces variables, telle que  $dV = p dx + R dq$ . Soit faite  $S. (p dx - y dq) = V + f(q)$ , équation que nous désignerons par (A); donc  $z = qy + V + f(q)$ , &  $y = -R - f'(q)$ , ce qu'on tire de l'équation A après avoir différencié, en se souvenant que  $dV = p dx + R dq$ ; l'une & l'autre solution peut être employée aussi commodément, si par la relation donnée entre  $x$ ,  $p$  &  $q$  on peut aussi facilement déterminer  $x$  que  $p$ ; mais on emploiera la première lorsqu'il sera plus aisé de déterminer  $x$  que  $p$ , & la dernière lorsqu'on pourra déterminer  $p$  plus aisément que  $x$ .

235. PROBLEME. Supposant  $dz = p dx + q dy$ , de manière que l'on ait  $p + q = \frac{z}{a}$ , déterminer la relation de  $z$  par rapport aux variables  $x$  &  $y$ . On aura  $q = \frac{z}{a} - p$ ,  $dz = p dx + \frac{z dy}{a} - p dy$ ,  $p(dx - dy) = \frac{adz - z dy}{a} = z \left( \frac{dz}{z} - \frac{dy}{a} \right)$ . Mais les formules  $dx - dy$ ,  $\frac{dz}{z} - \frac{dy}{a}$

E 3

étant intégrables par elles-mêmes, & de plus  $\frac{dz}{z} - \frac{dy}{a}$  étant  $= \frac{p}{z}(dx - dy)$ ; il est nécessaire que  $\frac{p}{z}$  soit une fonction de  $x - y$ . Supposant donc  $S. \frac{p}{z}(dx - dy) = f(x - y)$ , il viendra  $L. z - \frac{y}{a} = f(x - y)$ . Mais  $e$  étant le nombre dont le logarithme hyperbolique  $= 1$ ,  $e^{f(x-y)}$  fera une fonction de  $x - y$ , que nous désignerons par  $F(x - y)$ , & l'on aura  $L. z = f(x - y) + \frac{y}{a} = f(x - y) L. e + \frac{y}{a} L. e$ , &  $z = e^{\frac{y}{a}} \times e^{f(x-y)} = e^{\frac{y}{a}} F(x - y)$ ; d'où l'on tire  $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p = e^{\frac{y}{a}} F'(x - y)$ ,  $F'$  ayant une signification analogue à celle de  $f'$  dans les problèmes précédens: on aura aussi  $\left(\frac{dz}{dy}\right) = q = -e^{-\frac{y}{a}} F'(x - y) + \frac{1}{a} e^{\frac{y}{a}} F(x - y)$ ; &  $p + q = \frac{1}{a} e^{\frac{y}{a}} F(x - y) = \frac{z}{a}$  comme on le demande.

236. PROBLEME. Si  $dz = p dx + q dy$ , de manière que  $z$  doive être une fonction de  $p$  & de  $q$ , déterminer la relation entre  $z$ ,  $x$  &  $y$ . On aura  $dy = \frac{dz}{q} - \frac{p dx}{q}$ . Soit supposée  $p = q r$ , afin

que  $\zeta$  soit une fonction de  $q$  & de  $r$ , on aura  $dy = \frac{d\zeta}{q} - r dx$ ; donc  $y = \frac{\zeta}{q} - rx - S. \left( -\frac{\zeta dq}{qq} - x dr \right) = \frac{\zeta}{q} - rx + S. \left( \frac{\zeta dq}{qq} + x dr \right)$ .

Cherchons maintenant l'intégrale de  $\frac{\zeta dq}{qq}$ , en supposant  $r$  constant ( $\zeta$  est une fonction de  $q$  & de  $r$ ), pour avoir  $S. \frac{\zeta dq}{qq} = V + f(r)$  &  $dV = \frac{\zeta dq}{qq} + R dr$ . Mais la différentielle de  $f(r)$ , étant désignée par  $dr f'(r)$ , celle de  $V + f(r)$  sera  $= \frac{\zeta dq}{qq} + (R + f'(r)) dr$ . Ainsi la formule  $\left( \frac{\zeta dq}{qq} + x dr \right)$  ne peut être intégrable qu'autant que  $x = R + f'(r)$ ; donc  $y = \frac{\zeta}{q}$

$- Rr - rf'(r) + V + f(r) = \frac{\zeta}{q} - rx + V + f(r)$  à cause de  $x = R + f'(r)$ . Ainsi 1°. ayant supposé  $p = qr$ , on a  $\zeta$  exprimé en  $q$  &  $r$ , 2°. regardant ensuite  $r$  comme constant, il vient  $V = S. \frac{\zeta dq}{qq}$ , qui est aussi donnée en  $q$  &  $r$ , d'où,

en prenant  $q$  pour constant, on tire  $R = \left( \frac{dV}{dr} \right)$ .

Supposons, par exemple, que l'on ait  $\zeta = apq$ ; à cause de  $d\zeta = p dx + q dy$ , on aura  $d\zeta = \frac{\zeta dx}{aq} + q dy$ ; &  $dy = \frac{d\zeta}{q} -$

$\frac{z dx}{a q q}$ . Donc  $y = \frac{z}{q} + S \left( \frac{z dq}{q q} - \frac{z dx}{a q q} \right) = \frac{z}{q} + S. \frac{z}{q q} \left( dq - \frac{dx}{a} \right)$ . Ce qui fait comprendre que  $\frac{z}{q q}$  doit être une fonction de  $q - \frac{x}{a}$ . Donc en faisant  $\frac{z}{q q} = f' \left( q - \frac{x}{a} \right)$ , on aura  $y = \frac{z}{q} + f \left( q - \frac{x}{a} \right)$ , &  $z = q q. f' \left( q - \frac{x}{a} \right)$ .

*De la résolution des équations dans lesquelles on donne le rapport entre les quantités  $\left( \frac{dz}{dx} \right)$ ,  $\left( \frac{dz}{dy} \right)$  & deux des trois variables  $x, y, z$ .*

237. PROBLÈME. Si en supposant  $dz = p dx + q dy$ , on doit avoir  $px + qy = 0$ , trouver la relation entre  $z, y$  &  $x$ . On aura  $q = -\frac{px}{y}$ , &  $dz = p dx - \frac{px dy}{y} = px \left( \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} \right) = py \left( \frac{dx}{y} - \frac{xy dy}{yy} \right) = py d. \frac{x}{y}$ ; donc  $py$  doit être une fonction de  $\frac{x}{y}$ ; donc  $z = f \left( \frac{x}{y} \right)$ , fonction de dimension nulle de  $x$  &  $y$ , &  $py = f' \left( \frac{x}{y} \right)$ .

Mais si on demandoit que  $pu + qv$  fût  $= a$ ,  $a$  étant une constante,  $u$  une fonction

de  $x$ , &  $t$  une fonction de  $y$ , on auroit  
 $q = \frac{a}{t} - \frac{pu}{t}$ ,  $d\zeta = \frac{ady}{t} + p dx -$   
 $\frac{pudy}{t} = \frac{ady}{t} + pu \left( \frac{dx}{u} - \frac{dy}{t} \right)$ . Donc on  
 auroit  $pu = f' \left( S. \frac{dx}{u} - S. \frac{dy}{t} \right)$ , &  $\zeta = a S. \frac{dy}{t}$   
 $+ f \left( S. \frac{dx}{u} - S. \frac{dy}{t} \right)$ , où les formules  $\frac{dx}{u}$ ,  $\frac{dy}{t}$   
 sont des différentielles à une seule variable.

238. PROBLEME. Supposant  $d\zeta = p dx + q dy$ ,  
 &  $q = pV + u$ ,  $V$  &  $u$  étant des fonctions quel-  
 conques de deux variables  $x$  &  $y$ , déterminer  $\zeta$ .  
 On aura  $d\zeta = p(dx + V dy) + u dy$ . Sup-  
 posons que le multiplicateur  $M$  rende intégrale  
 la formule  $dx + V dy$ , & que l'on ait  $M(dx + V dy) = dr$ ;  $M$  &  $r$  seront des fonctions  
 de  $x$  & de  $y$ , & l'on aura  $d\zeta = \frac{p dr}{M} + u dy$ .

Mais parce que  $r$  est une fonction de  $x$  & de  $y$ ,  
 on peut déterminer  $x$  en  $y$  &  $r$ , & cette valeur  
 de  $x$  étant substituée dans  $u$  &  $M$ , ces quantités  
 deviendront des fonctions de  $y$  & de  $r$ . Regardant  
 maintenant  $r$  comme une constante, nous aurons  
 $S. u dy = T + f(r)$ , & ayant supposé  $dT = u dy$   
 $+ t dr$ , &  $d\zeta = u dy + t dr + dr f'(r) = dT$   
 $+ f'(r) dr$ , on aura  $\frac{p}{M} = t + f'(r)$ , &  $\zeta$

$= T + f(r)$ . Si l'on doit avoir  $q = \frac{p x}{y} + \frac{y}{x}$ ,

on aura  $V = \frac{x}{y}$ ,  $u = \frac{y}{x}$ ; & à cause de  $dx +$   
 $V dy = dx + \frac{x dy}{y}$ , le multiplicateur  $M$  sera

$= y$ , &  $dr = y dx + x dy$ ; donc  $r = xy$ ,  
 $x = \frac{r}{y}$ , &  $u = \frac{yy}{r}$ . Maintenant on aura  $T =$   
 $S. u dy = \frac{y^3}{3r}$  en regardant  $r$  comme constant,  
 &  $t = -\frac{y^3}{3r^2}$  (ce qu'on tire aisément de l'équa-  
 tion  $dT = u dy + t dr$ , en faisant  $y$  constant);  
 donc  $\frac{p}{y} = \frac{p}{M} = \frac{-y^3}{3rr} + f'(r)$ ; &  $z = \frac{y^3}{3r} +$   
 $f(xy) = \frac{y^3}{3x} + f(xy)$ .

239. PROBLEME. Supposant toujours  $dy = p dx + q dy$ , déterminer  $z$ , en supposant qu'il y a une telle relation entre  $p$ ,  $q$ ,  $x$  &  $y$ , qu'une fonction quelconque  $P$  de  $p$  & de  $x$  soit égale à une certaine fonction  $Q$  de  $q$  & de  $y$ . Soit  $P = t$ ,  $Q = t$ , par la première équation on pourra avoir  $p$  exprimé par une fonction de  $t$  & de  $x$ ; par la seconde on aura  $q$  en  $y$  &  $t$ . Cela posé, dans la formule  $dz = p dx + q dy$ , on doit intégrer  $p dx$  en supposant  $t$  constant, pour avoir  $S. p dx = R$ . On doit de même intégrer  $q dy$ , en supposant  $t$  constant, pour avoir  $S. q dy = r$ . C'est pourquoi  $R$  sera une fonction de  $x$  & de  $t$ , &  $r$  une fonction de  $y$  & de  $t$ . Mais en faisant aussi varier  $t$ , on a  $dR = p dx + V dt$ , &  $dr = q dy + u dt$ ; donc  $dz = dR + dr - dt (V + u)$ . Donc  $V + u = f'(t)$ , équation que nous désignerons par (A); ainsi  $z = R + r - f(t)$ . Puisque  $p$ ,  $R$ ,  $V$ , sont des fonctions de  $x$  & de  $t$ ,  $q$  &  $r$  des fonctions de  $y$  & de  $t$ , l'équation A donnera la valeur de  $t$  en  $x$  &  $y$ , laquelle étant substituée dans la dernière équation qu'on vient de trouver, on aura  $z$  déterminée en  $x$  &  $y$ .

*De la résolution des équations dans lesquelles on donne un rapport entre les deux formules  $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ ,  $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ , & les trois variables  $x$ ,  $y$  &  $z$ .*

240. PROBLEME. Si ayant fait  $dz = p dx + q dy$  (A), on doit avoir  $apx + bqy = mz$ , déterminer la fonction  $z$ . Par la nature du problème on a  $q = \frac{mz}{by} - \frac{apx}{by}$ . Substituant cette valeur de  $q$  dans l'équation A & transposant, il vient  $dz - \frac{mz dy}{by} = p dx - \frac{apx dy}{by}$ . Cette équation étant divisée par  $y^{\frac{m}{b}}$ , donnera  $d \cdot \frac{z}{y^{\frac{m}{b}}} = \frac{p}{y^{\frac{m}{b}}} \left( dx - \frac{ax dy}{by} \right) = \frac{py^{a:b}}{y^{m:b}} d \cdot \frac{x}{y^{a:b}}$  (\*). Maintenant si on suppose  $py^{(a-m):b} = f\left(\frac{x}{y^{a:b}}\right)$ , nous aurons  $z = y^{m:b} f\left(\frac{x}{y^{a:b}}\right)$ . Mais en élevant à la puissance  $b$ , la fonction de  $\frac{x}{y^{a:b}}$  se réduit à une fonction de  $\frac{x^b}{y^a}$ ; donc on peut déterminer  $z$  en  $x$  &  $y$ , de manière que  $z = y^{m:b} \times F\left(\frac{x^b}{y^a}\right)$ .

---

(\*) L'expression  $a:b$  a la même signification que  $\frac{a}{b}$ .

241. PROBLÈME. Si, ayant supposé  $d\zeta = p dx + q dy$ , on doit avoir  $q = pT + V$ ,  $T$  étant une fonction de  $x$  & de  $y$ , &  $V$  une fonction de  $y$  &  $\zeta$ , déterminer la fonction  $\zeta$ . Substituant dans l'équation  $d\zeta = p dx + q dy$  la valeur de  $q$ , & transposant, on aura  $d\zeta - V dy = p(dx + T dy)$ . Mais parce que  $V$  est une fonction de  $y$  & de  $\zeta$ , il y aura un multiplicateur  $M$  qui rendra le premier membre intégrable; & parce que  $T$  est une fonction de  $x$  & de  $y$ , il y aura aussi un multiplicateur  $m$  qui rendra  $dx + T dy$  intégrable. Soit donc  $M(d\zeta - V dy) = dr$ ,  $m(dx + T dy) = dR$ , notre équation deviendra  $\frac{dr}{M} = \frac{p dR}{m}$ , ou  $dr = \frac{M p dR}{m}$ . Pour que le second nombre soit intégrable, il faut que  $\frac{Mp}{m}$  soit une fonction de  $R$  que nous ferons  $= f'(R)$ , pour avoir  $r = f(R)$ , équation qui contient le rapport cherché entre  $\zeta$ ,  $x$  &  $y$ .

COROLLAIRE. Ce problème renferme, comme un cas particulier, celui dans lequel on demanderoit que  $\zeta\zeta$  fût  $= pxx + qyy$ , ou  $q = \frac{\zeta\zeta}{yy} - \frac{p x x}{yy}$ , & une infinité d'autres. Cependant il paroît d'abord qu'on ne peut absolument pas résoudre cette forme:  $\zeta = py + qx$ , ou  $q = \frac{\zeta - py}{x}$ , ce qui donne  $d\zeta - \frac{\zeta dy}{x} = p(dx - \frac{y dy}{x})$ . La cause de la difficulté vient de ce



que la formule  $d\zeta - \frac{\zeta dy}{x}$  ne peut être rendue intégrable par aucun multiplicateur, ou de ce que l'équation  $d\zeta - \frac{\zeta dy}{x} = 0$ , est impossible, parce que  $x$  est variable comme  $\zeta$  &  $y$ . Cependant en faisant  $\zeta = n(x+y)$ , &  $p = q = n$ , on aura  $\zeta = px + qy$ , ce qui fournit une solution particulière; mais nous donnerons bientôt la solution générale.

242. PROBLEME. Supposant  $d\zeta = p dx + q dy$  (A), si l'on a l'équation  $p = qT + V$ ,  $T$  étant une fonction de  $x$  & de  $y$ ,  $V$  une fonction de  $x$  & de  $\zeta$ , déterminer  $\zeta$ . Substituant la valeur de  $p$  dans l'équation A & transposant, il vient  $d\zeta - V dx = q(dy + T dx)$ . Donc  $M$  &  $m$  étant des multiplicateurs qui puissent rendre intégrables les formules qu'ils multiplient, on aura  $M(d\zeta - V dx) = dr$ , &  $m(dy + T dx) = dR$ ; donc  $\frac{dr}{M} = \frac{q dR}{m}$ , ou  $dr = \frac{Mq dR}{m}$ , d'où l'on tire aisément cette solution  $\frac{Mq}{m} = f'(R)$ , &  $r = f(R)$ .

243. PROBLEME. Si ayant  $d\zeta = p dx + q dy$ , on doit avoir  $\zeta = Np + nq$ ,  $N$  &  $n$  étant des fonctions de deux variables  $x$  &  $y$ , déterminer la valeur générale de  $\zeta$  par une solution particulière qui donne  $\zeta = V$ ,  $V$  étant une fonction de  $x$  & de  $y$ . Soit  $dV = P dx + Q dy$ , cette valeur de  $V$  étant substituée au lieu de  $\zeta$ , satisfait à l'équation  $d\zeta = p dx + q dy$ , lorsque  $P = p$  &  $Q = q$ ; ainsi (dans ce cas)  $V = NP + nQ$ .

Supposons que la valeur générale de  $z$  soit  $z = Vu$ ,  
 & que  $du = r dx + t dy$ , On aura  $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$   
 $= Pu + Vr$ , &  $q = \left(\frac{dz}{dy}\right) = Qu + Vt$  (\*);  
 donc  $z = Np + nq = (NP + nQ)u + V \times$   
 $(Nr + nt) = Vu$ . Mais  $V = NP + nQ$ ;  
 donc  $Nr + nt = 0$ , &  $t = \frac{-Nr}{n}$ . Donc  $du$   
 $= r \left( dx - \frac{N dy}{n} \right) = \frac{r}{n} (n dx - N dy)$ . Sup-  
 posons maintenant que par le moyen d'un mul-  
 tiplificateur convenable  $M$ , on ait  $M (n dx -$   
 $N dy) = dT$ , on aura  $du = \frac{r}{n.M} dT$ ; donc  
 $\frac{r}{n.M} = f'(T)$ ,  $u = f(T)$ , &  $z = V f(T)$ .

Etant donc proposée l'équation  $z = Np + nq$ ,  
 de maniere que  $dz = p dx + q dy$ , on peut  
 considérer tout de suite l'équation  $M (n dx -$   
 $N dy) = dT$ , qui doit faire trouver le multi-  
 plicateur  $M$  & l'intégrale  $T$ , & cette opération  
 ne dépend pas de la valeur particulière  $V$  de  $z$ .  
 Ayant trouvé  $T$ , si on connoît la valeur particu-  
 lière de  $V$ , de quelle maniere que ce soit, la  
 solution générale sera  $z = V \cdot f(T)$ . Mais on  
 doit bien remarquer que cette solution suppose  
 que la condition prescrite est de cette forme  
 $z = Np + nq$ .

(\*) En différenciant  $z = Vu$ , on fait seulement va-  
 rier  $x$ , lorsqu'il s'agit de la valeur de  $p$ ; mais on ne fait  
 varier que  $y$  lorsqu'il est question de la valeur de  $q$ .

Supposons que  $d\zeta$  étant  $= p dx + q dy$ , l'on ait  $\zeta = py + qx$ , c'est-à-dire, que l'on ait  $N = x^0 y = y$  &  $n = x$ . L'équation  $\zeta = y + x$  donne une solution particulière, & l'on a l'équation  $M(x dx - y dy) = dT$ , dans laquelle le multiplicateur  $M$  est constant. Ainsi en le supposant  $= 1$ , on aura  $T = f(xx - yy)$ ; & l'on aura  $\zeta = (x + y) \cdot f(xx - yy)$ , équation qui contient la solution générale que nous avons annoncée dans l'avant-dernier problème.

*De la résolution des équations du premier degré à trois variables, étant donnée une certaine relation entre leurs différentielles (\*).*

244. PROBLEME. Supposant que  $u$  est une fonction des trois variables  $x, y, \zeta$ , telle que  $du$  étant  $= p dx + q dy + r d\zeta$  (A), l'on ait  $ap + bq + cr = 0$  (B), déterminer  $u$ . Substituant dans l'équation A la valeur de  $r$  prise de l'équation B, on trouvera aisément  $c du = p(c dx - a d\zeta) + q(c dy - b d\zeta) = p d\epsilon + q dT$ , en faisant  $c x - a \zeta = \epsilon$ , &  $c y - b \zeta = T$ . Donc  $u$  est une fonction des variables  $\epsilon$  &  $T$ , c'est-à-dire,  $u = f(\epsilon \& T) = f(\overline{cx - a\zeta} \& \overline{cy - b\zeta})$ . Ce qui donne la solution du problème, lorsqu'on demande que  $a \left(\frac{du}{dx}\right) + b \left(\frac{du}{dy}\right) + c \left(\frac{du}{d\zeta}\right) = 0$ .

(\*) Sous le nom d'équations différentielles nous comprenons toutes les équations dans lesquelles il entre des différentielles, soit que tous les termes se trouvent d'un seul côté du signe  $=$  ou non.

245. PROBLEME.  $u$  étant une fonction de  $x, y$  &  $z$ , telle que  $du = p dx + q dy + r dz$  (A), déterminer  $u$  lorsque  $apx + bqy + crz = nu$  (B). Si l'on substitue dans l'équation A la valeur de  $r$  prise de l'équation (B), on trouvera facilement

$$\begin{aligned} \text{l'équation } du - \frac{nu dz}{cz} &= p \left( dx - \frac{ax dz}{cz} \right) \\ &+ q \left( dy - \frac{by dz}{cz} \right); \text{ donc } \frac{c du}{u} - \frac{n dz}{z} = \frac{p x}{u} \times \\ &\left( \frac{c dx}{x} - \frac{a dz}{z} \right) + \frac{q y}{u} \left( \frac{c dy}{y} - \frac{b dz}{z} \right), \text{ d'où} \\ \text{l'on peut conclure que l'intégrale du premier} \\ \text{membre } c L.u - n L.z &\text{ est égale à une fonction} \\ \text{quelconque des quantités } c L.x - a L.z, &c L.y - b L.z, \text{ ou en passant des logarithmes aux nombres,} \\ \text{que } \frac{u^c}{z^n} &= f\left(\frac{x^c}{z^a} \& \frac{y^c}{z^b}\right); \text{ si } a = b = c = 1, \\ \text{on aura } u &= z^n \cdot f\left(\frac{x}{z} \& \frac{y}{z}\right). \end{aligned}$$

246. PROBLEME. Si  $du = p dx + q dy + r dz$  (A) & que  $px + qy + rz$  soit  $= nu + t$  (B),  $t$  étant une fonction donnée de  $x, y, z$ , déterminer  $u$ . En substituant dans l'équation A la valeur de  $r$  prise de l'équation B, on trouvera aisément

$$\begin{aligned} du - \frac{nu dz}{z} &= \frac{t dz}{z} + p \left( dx - \frac{x dz}{z} \right) + \\ &q \left( dy - \frac{y dz}{z} \right). \text{ Donc en multipliant par } \frac{1}{z^n}, \\ \text{on aura } d. \frac{u}{z^n} &= \frac{t dz}{z^{n+1}} + \frac{p}{z^{n-1}} \cdot d. \frac{x}{z} + \frac{q}{z^{n-1}} \cdot \\ &d. \frac{y}{z}. \text{ Supposons maintenant } x = Tz \& y = Rz, \\ &\text{ afin} \end{aligned}$$

afin que  $z$  devienne une fonction de trois variables  $T, R, z$ ; & intégrant la formule  $\frac{r dz}{z^{n+1}}$  en regardant  $T$  &  $R$  comme constans, supposons cette intégrale  $= V$ , il est visible qu'on aura  $\frac{u}{z^n} = V + f\left(\frac{x}{z} \text{ \& } \frac{y}{z}\right)$ , &  $u = Vz^n + z^n \cdot f\left(\frac{x}{z} \text{ \& } \frac{y}{z}\right)$ .

Le principe de la solution du problème est fondé sur ce théorème : si  $dV = r dz' + p dx' + q dy'$ ,  $r$  désignant une fonction donnée,  $p$  &  $q$  des fonctions indéfinies, l'on doit avoir  $V = S. r dz' + f(x' \text{ \& } y')$ . Mais il ne suffit pas de remarquer que dans l'intégration de la formule  $r dz'$ , on doit regarder  $z'$  seule comme variable; il faut encore avoir attention de traiter  $x'$  &  $y'$  comme constans. De manière que si  $r$  est une fonction de  $x, y$  &  $z$ , d'où l'on ait formé  $x', y', z'$ , il faudra 1°. introduire  $x', y', z'$ , & chasser  $x, y, z$ , afin que  $r$  devienne une fonction de  $x', y', z'$ ; 2°. on doit prendre l'intégrale  $S. r dz'$  en regardant  $z'$  seule comme variable, &  $x'$  &  $y'$  comme constans. Dans le cas du problème, on doit intégrer  $\frac{r dz}{z^{n+1}}$  en regardant  $z$  seule comme variable, & traiter les quantités  $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$  comme constantes; de sorte qu'en faisant  $P = \frac{x}{z}$  &  $Q = \frac{y}{z}$ , afin que  $r$  devienne une fonction de  $z, P$  &  $Q$ , on doit traiter  $P$  &  $Q$  comme constans.

247. PROBLEME. Déterminer la fonction,  $u$  lorsqu'on a  $V$ .

F

que  $du = p dx + q dy + r dz$  (A), &  $pm + qM + rn = 0$  (B),  $m$  étant une fonction de  $x$ ,  $M$  une fonction de  $y$ , &  $r$  une fonction de  $z$ . Ayant substitué dans l'équation A, la valeur de  $r$  prise de l'équation B, on aura  $du = p \left( dx - \frac{mdz}{n} \right) + q \left( dy - \frac{Mdz}{n} \right)$ , ou  $du = pm \left( \frac{dx}{m} - \frac{dz}{n} \right) + qM \left( \frac{dy}{M} - \frac{dz}{n} \right)$ . Supposons  $t = S. \frac{dx}{m} - S. \frac{dz}{n}$ , &  $T = S. \frac{dy}{M} - S. \frac{dz}{n}$ , pour avoir  $du = pm dt + qM dT$ ; il est aisé de voir que  $u$  sera une fonction des deux variables  $t$  &  $T$ ; donc  $u = f(t \& T)$ .

248. PROBLEME. Ayant supposé  $du = p dx + q dy + r dz$ , &  $pqr = 1$ , déterminer  $u$ . On aura  $r = \frac{1}{pq}$ , &  $du = p dx + q dy + \frac{dz}{pq}$ ; donc  $u = px + qy + \frac{z}{pq} - S. \left( x dp + y dq - \frac{z dp}{pq} - \frac{z dq}{pq} \right)$ . Puisque cette formule intégrale ne renferme que deux différentielles  $dq$ ,  $dp$ , il est visible qu'elle doit être une fonction de  $p$  & de  $q$ . Supposons cette intégrale  $= t$ , nous aurons  $u = px + qy + \frac{z}{pq} - t$ , &  $dt = \left( x - \frac{z}{pq} \right) dp + \left( y - \frac{z}{pq} \right) dq$ ; donc  $\left( \frac{dt}{dp} \right) = x - \frac{z}{pq}$ ,  $\left( \frac{dt}{dq} \right) = y - \frac{z}{pq}$ , équations qui feront connaître  $p$  &  $q$ , & ces valeurs étant substituées dans

celle de  $u$ , on aura  $u$  exprimée en  $x, y$  &  $z$ .  
 Si  $t$  est une constante  $= a$ , on aura  $dt = 0$ ,  
 $x - \frac{z}{ppq} = 0$ , ou  $ppq = \frac{z}{x}$ . On aura aussi  $pqq$   
 $= \frac{z}{y}$ ,  $p^3 q^3 = \frac{zz'}{xy}$ ,  $pq = \sqrt[3]{\frac{zz'}{xy}}$ ,  $p = \sqrt[3]{\frac{yz'}{xx}}$ ,  
 $q = \sqrt[3]{\frac{xz'}{yy}}$ , &  $u = 3 \sqrt[3]{xyxz} - a$ .

249. PROBLEME.  $du$  étant supposée  $= p dx + q dy + r dz$ ,  $pqr = \frac{u^3}{xyz}$ , on demande la valeur de  $u$ . Supposons  $p = \frac{Pu}{x}$ ,  $q = \frac{Qu}{y}$ ,  $r = \frac{Ru}{z}$ , nous aurons  $\frac{PQRu^3}{xyz} = pqr = \frac{u^3}{xyz}$ . Donc  $PQR = 1$ ;  $du = \frac{P u dx}{x} + \frac{Q u dy}{y} + \frac{R u dz}{z}$ ;  $\frac{du}{u} = \frac{P dx}{x} + \frac{Q dy}{y} + \frac{R dz}{z}$ . Supposant maintenant  $L.u = V$ ,  $L.x = x'$ ,  $L.y = y'$ ,  $L.z = z'$ , on aura  $dV = P dx' + Q dy' + R dz'$ , équation dans laquelle  $PQR = 1$ , & qui contient la question que nous avons traitée dans le problème précédent.

*Recherche des fonctions de deux variables par la relation des formules différentielles du second degré.*

250. Avant de passer plus loin, nous observerons que comme  $\left(\frac{dz}{dx}\right)$  marque la différentielle de  $z$ , prise en faisant varier  $x$  & divisée par  $dx$ , de

même  $\left(\frac{d d \zeta}{d x^2}\right)$  indique la différentielle de  $\left(\frac{d \zeta}{d x}\right)$  prise en faisant varier  $x$  & divisée par  $d x$ . En général  $\left(\frac{d^m \zeta}{d x^m}\right)$  marque la différentielle de l'ordre  $m$  de la fonction  $\zeta$  différenciée un nombre de fois en faisant varier chaque fois  $x$  & divisant par  $d x$ . L'expression  $\left(\frac{d d \zeta}{d y d x}\right) = \left(\frac{d d \zeta}{d x d y}\right)$  indique qu'on a pris d'abord la différentielle de  $\zeta$ , en faisant varier  $x$  & divisant par  $d x$ , & qu'on a pris ensuite la différentielle du résultat en faisant varier  $y$ , & divisant par  $d y$ , ou réciproquement. Il est facile de comprendre ce que signifient les expressions  $\left(\frac{d d \zeta}{d y^2}\right)$ ,  $\left(\frac{d^3 \zeta}{d x d y^2}\right)$ , &c.

Comme une fonction  $\zeta$  de deux variables  $x$  &  $y$  a deux formules différentielles  $\left(\frac{d \zeta}{d x}\right)$ ,  $\left(\frac{d \zeta}{d y}\right)$  du premier degré, la même fonction a trois différentielles du second degré,  $\left(\frac{d d \zeta}{d x^2}\right)$ ,  $\left(\frac{d d \zeta}{d y^2}\right)$ ,  $\left(\frac{d d \zeta}{d x d y}\right)$  ou  $\left(\frac{d d \zeta}{d y d x}\right)$ ; car ces deux dernières formules sont égales.

La même fonction  $\zeta$  a quatre formules différentielles du troisième degré, savoir,  $\left(\frac{d^3 \zeta}{d x^3}\right)$ ,  $\left(\frac{d^3 \zeta}{d x^2 d y}\right)$ ,  $\left(\frac{d^3 \zeta}{d x d y^2}\right)$ ,  $\left(\frac{d^3 \zeta}{d y^3}\right)$ ; elle en a cinq du quatrième degré, six du cinquième degré, &c.



251. PROBLEME. Supposant que  $z$  doit être une fonction de  $x$  & de  $y$ , telle que  $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = t$ ,  $t$  étant une fonction donnée de  $x$  & de  $y$ , déterminer  $z$ .  
 Considérant  $y$  comme constant, on a  $d\left(\frac{dz}{dx}\right) = dx\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = t dx$ , par la nature du problème; donc  $\left(\frac{dz}{dx}\right) = S t dx + C$ . Mais il est visible que  $C$  peut exprimer une fonction quelconque  $f(y)$  de  $y$ ; donc  $\left(\frac{dz}{dx}\right) = S. t dx + f(y)$ . En considérant encore  $y$  comme constant, nous aurons  $dz = dx S. t dx + dx f(y)$ , où  $S. t dx$  doit être prise en regardant  $y$  comme constant. Si l'on intègre dans la même supposition, & qu'on désigne par  $F(y)$  une nouvelle fonction de  $y$  qu'on doit ajouter, on aura  $z = S dx S. t dx + x f(y) + F(y)$ , ce qui donne l'intégrale complete de l'équation  $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = t$ , parce que cette intégrale contient deux fonctions arbitraires de  $y$ .

Si l'on demandoit que  $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = 0$ , on auroit  
 $d\left(\frac{dz}{dx}\right) = dx\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = 0$ ; &  $\left(\frac{dz}{dx}\right) = f(y)$ ,  
 $dz = dx f(y)$ , &  $z = x f(y) + F(y)$ , ou  
 en changeant  $f$  en  $F$ , ce qui est très-permis,  
 $z = x F(y) + f(y) = f(y) + x F(y)$ .

On auroit pu conclure la même chose par la formule précédente, en supposant  $t = 0$ .

Si on différencie la formule  $z = S. dx S. t dx + x f(y) + F(y)$ , en regardant  $y$  comme constant, on aura d'abord  $\left(\frac{dz}{dx}\right) = S. t dx + f(y)$ , & ensuite  $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = t$ .

Il est aisé de voir que si l'on doit avoir  $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right) = T$ ,  $T$  étant une fonction de  $x$  & de  $y$ , l'intégrale complete sera  $z = S dy S T dy + y f(x) + F(x)$ , ou dans la double intégrale  $S. dy S. T dy$ ,  $x$  est considéré comme constant.

A l'égard des fonctions ajoutées, on les détermine dans les cas particuliers par la nature du problème. Si  $t = \frac{xy}{a}$ , on aura  $S. t dx = \frac{xy}{2a}$ ; &  $S. dx S. t dx = \frac{x^3 y}{3 \cdot 2 \cdot a} = \frac{x^3 y}{6a}$ . Ainsi par une première intégration on a  $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{xy}{2a} + f(y)$ . Donc en supposant  $x = a$ , on pourra égaler  $\left(\frac{dz}{dx}\right)$  à une certaine fonction, par exemple, à l'ordonnée d'une courbe dont l'abscisse seroit  $= y$ , ce qui fera connoître  $f(y)$ ; & ayant fait la seconde intégration, on aura  $z = \frac{x^3 y}{3 \cdot 2 \cdot a} + x f(y) + F(y)$ , valeur qu'on peut, dans la même supposition de  $x = a$ ,

égalier à une fonction de  $y$ , ce qui fera connoître  $F(y)$  dans ce cas particulier.

252. PROBLEME. Si  $\zeta$  doit être une fonction de  $x$  & de  $y$ , telle que  $\left(\frac{d\zeta}{dx}\right) = T\left(\frac{d\zeta}{dy}\right) + t$ ,  $T$  &  $t$  étant des fonctions quelconques de  $x$  & de  $y$ , déterminer  $\zeta$ . Soit  $\left(\frac{d\zeta}{dx}\right) = u$ , on aura  $\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{du}{dy}\right) = Tu + t$ . Regardant maintenant  $x$  seule comme variable, il vient  $du = T u dx + t dx$ , équation, qui en multipliant par  $e^{-STdx}$  ( $e$  étant le nombre dont le logarithme hyperbolique  $= 1$ ), transposant & intégrant, donne  $e^{-STdx} u = S e^{-STdx} t dx + f(y)$ . Donc  $u = \left(\frac{d\zeta}{dx}\right) = e^{STdx} \times S. e^{-STdx} t dx + e^{STdx} f(y)$ . Maintenant en regardant  $x$  seul comme variable, on a  $d\zeta = dx \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)$ , &  $\zeta = S. e^{STdx} dx S. e^{-STdx} t dx + f(y). S. e^{STdx} dx + F(y)$ , équation qui donne l'intégrale complete de la proposée.

On doit chercher 1°. l'intégrale  $S. T dx$  que nous ferons  $= L. m$ , pour avoir  $e^{STdx} = m$  (\*).

(\*) Soit  $STdx = p = L. m$ , donc  $p L. e = L. m$ , parce que  $L. e = 1$ ; donc  $e^p = e^{STdx} = m$ .

On doit ensuite chercher  $S. e^{STdx} dx = S. m dx$ , que nous ferons  $= M$ , reste l'intégrale  $S. m dx$ .  
 $S. \frac{t dx}{m} = S. dM S. \frac{t dx}{m}$  qui devient  $= M S. \frac{t dx}{m} - S. \frac{M t dx}{m}$ , de manière qu'il faut encore intégrer ces deux formules.

COROLLAIRE. Si on supposoit que  $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$  est  $= T \left(\frac{dz}{dx}\right) + t$ ,  $T$  &  $t$  étant des fonctions données de  $x$  & de  $y$ , on auroit  $z = S. e^{STdy} dy e^{-STdy} t dy + f(x) S. e^{STdy} dy + F(x)$ .

Pour faire l'application du problème à un exemple, supposons qu'on demande la fonction  $z$  de  $x$  & de  $y$ , lorsque  $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \frac{n}{x} \frac{dz}{dx} + \frac{a}{xy}$ . Supposant  $u = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ , & considérant  $y$  comme constant, on a  $du = \frac{n u dx}{x} + \frac{a dx}{xy}$ , ou en transférant & divisant par  $x^n$ ,  $\frac{du}{x^n} = \frac{n u dx}{x^{n+1}} + \frac{a}{xy} \frac{dx}{x^{n+1}}$ ; donc  $\frac{u}{x^n} = \frac{a}{y} \cdot S. \frac{dx}{x^{n+1}} = \frac{-a}{nyx^n} + f(y)$ , ou  $u = \left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{-a}{ny} + x^n f(y)$ .  
 Considérant encore  $y$  comme constant, il vient

$d\zeta = \frac{-a dx}{ny} + f(y) x^n dx$ , d'où l'on tire

$$\zeta = \frac{-ax}{ny} + \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} f(y) + F(y).$$

Si on suppose  $a=0$ , on aura  $\zeta = \frac{1}{n+1} \cdot f(y) \times x^{n+1} + F(y)$ .

253. PROBLEME.  $\zeta$  étant une fonction de  $x$  & de  $y$ , telle que  $\left(\frac{d d \zeta}{d x^2}\right) = T \left(\frac{d \zeta}{d x}\right) + t$ ,  $T$  &  $t$  étant des fonctions données de  $x$ ,  $y$  &  $\zeta$ , déterminer la fonction  $\zeta$ . Ayant supposé  $y$  constant, on a  $d d \zeta = T dx d\zeta + t dx^2$ , équation du second degré qui est censée ne renfermer que deux variables  $x$  &  $\zeta$ , parce que nous regardons  $y$  comme constant. On essayera donc d'intégrer cette équation par les méthodes précédentes; & si l'intégration a lieu, au lieu des deux constantes arbitraires qu'on devoit ajouter, on écrira  $f(y)$  &  $F(y)$ , & l'on aura l'intégrale complete de la proposée.

254. PROBLEME. Supposant que  $\zeta$  soit une fonction de  $x$  & de  $y$ , telle que  $T$  étant une fonction donnée de  $x$  &  $y$ , l'on ait  $\left(\frac{d d \zeta}{d x d y}\right) = T$ , déterminer  $\zeta$ . Soit  $\left(\frac{d \zeta}{d x}\right) = u$ , on aura  $\frac{d d \zeta}{d y d x} = \left(\frac{d u}{d y}\right) = T$ ; & en supposant  $x$  constant, il viendra  $du = T dy$ , &  $u = \left(\frac{d \zeta}{d x}\right) = S. T dy$

+  $f'(x)$ . Considérons maintenant  $y$  comme constant, nous aurons  $d\zeta = dx \text{ S. T } dy + dx f'(x)$ , &  $\zeta = \text{S. } dx \text{ S. T } dy + f(x) + F(y)$ . Les fonctions  $f(x)$ ,  $F(y)$ , marquent que l'intégrale est complète.

COROLLAIRE I. Si on eût renversé l'ordre en supposant d'abord  $y$  & ensuite  $x$  constant &  $\left(\frac{d\zeta}{dy}\right) = u$ ,

on auroit trouvé  $\left(\frac{d\zeta}{dy}\right) = \text{S. T } dx + f'(y)$ , &  $\zeta = \text{S. } dy \text{ S. T } dx + f(y) + F(x)$ , équation qui satisfait aussi au problème.

COROLLAIRE II. De-là il suit que  $\text{S. } dy \text{ S. T } dx = \text{S. } dx \text{ S. T } dy$ , ou du moins que la différence de ces quantités est exprimée par un assemblage d'une fonction de  $x$  & d'une fonction de  $y$ . Si l'on suppose que  $\text{S. } dx \text{ S. T } dy$  soit  $= \text{S. } dy$ .  $\text{S. T } dx = V$ , on trouvera pour l'une & l'autre formule  $T = \left(\frac{d^2 V}{dx dy}\right)$ .

COROLLAIRE III. Si  $T = 0$ , on aura  $\zeta = f(x) + F(y)$  : on aura aussi  $\zeta = f(y) + F(x)$ .

Pour faire l'application de ce problème, soit  $\left(\frac{d^2 \zeta}{dx dy}\right) = T = \sqrt{aa - yy}$ ; donc  $\text{S. T } dx = x \sqrt{aa - yy}$  où nous commençons par la supposition de  $x$  variable; donc  $\text{S. } dy \text{ S. T } dx = x \text{ S. } dy \sqrt{aa - yy} = \frac{1}{2} xy \sqrt{aa - yy} + \frac{1}{2} aax \text{ S. } \frac{dy}{\sqrt{aa - yy}}$ ;

donc l'intégrale complete sera  $z = \frac{xy}{2} \sqrt{(aa - yy)}$   
 $+ \frac{1}{2} aax A. \sin. \frac{y}{a} + f(x) + F(y) (*)$ .

255. PROBLÈME. Supposant que  $z$  est une fonction de  $x$  & de  $y$  telle que l'on ait  $\left(\frac{ddz}{dx dy}\right) = T \left(\frac{dz}{dx}\right) + t$ ,  $T$  &  $t$  étant des fonctions de  $x$  & de  $y$ , déterminer  $z$ . Soit  $\left(\frac{dz}{dx}\right) = u$ , si dans cette équation, on suppose  $x$  constant, on aura  $du = T u dy + t dy$ ; donc en transposant & multipliant par  $e^{-STdy}$ , on aura  $e^{-STdy} du - T u e^{-STdy} dy = e^{-STdy} t dy$ . Donc  $e^{-STdy} u = S. e^{-STdy} t dy + f'(x)$ ; donc  $u = \left(\frac{dz}{dx}\right) = e^{STdy} S. e^{-STdy} t dy + e^{STdy} f'(x)$ . Regardant maintenant  $y$  comme constant, multipliant par  $dx$  & intégrant, il vient  $z =$

(\*) A désigne un angle, ou si l'on veut un arc de cercle dont le rayon  $= 1$ , le sinus  $= \frac{y}{a}$ , & par conséquent le co-sinus  $= \sqrt{\left(1 - \frac{yy}{aa}\right)} = \frac{\sqrt{(aa - yy)}}{a}$ . Or l'on a toujours le co-sinus est au rayon comme la différentielle du sinus est à celle de l'arc, qui sera ici  $= \frac{e dy}{\sqrt{(aa - yy)}}$ .

$$S.e^{STdy}dx. S.e^{-STdy}t dy + S.e^{STdy}dx.f'(x) + F(y).$$

COROLLAIRE. On cherchera d'abord  $S.T dy$ , que nous ferons  $= L.m$ ; on cherchera ensuite,  $S.\frac{t dy}{m}$  que nous supposons  $= M$ ; enfin on cherchera  $S.m.M dx$  que nous ferons  $= N$ ; mais dans les deux premières intégrations on supposera  $x$  constant. Dans la troisième au contraire on supposera  $y$  constant &  $x$  variable; ce qui étant fait, on aura  $\zeta = N + S.m dx f'(x) + F(y)$ , intégrale complete cherchée.

Si l'on regarde  $f'(x)$  comme l'ordonnée d'une courbe dont l'abscisse  $= x$ , l'on pourra facilement construire l'intégrale  $S.m dx f'(x)$  pour chaque valeur de  $y$ ; car on regarde, dans cette intégrale,  $y$  comme constant.

REMARQUE. En changeant  $x$  en  $y$  &  $y$  en  $x$ , l'on résoudra de même le problème, si on demande que  $\left(\frac{dd\zeta}{dx dy}\right) = T\left(\frac{d\zeta}{dy}\right) + t$ ,  $T$  &  $t$  étant toujours des fonctions de  $x$  & de  $y$ , & l'on aura  $\zeta = S.e^{STdx} dy. S.e^{-STdx}t dx + S.e^{STdx} dy f'(y) + F(x)$ .

256. Pour faire l'application de ce problème, supposons que  $\zeta$ , étant une fonction de  $x$  & de  $y$ , l'on ait  $\left(\frac{dd\zeta}{dx dy}\right) = \frac{n}{y}\left(\frac{d\zeta}{dx}\right) + \frac{h}{x}$ ; en faisant  $\left(\frac{d\zeta}{dx}\right) = u$ , il vient  $\left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{nu}{y} + \frac{h}{x}$ .



Et en considérant  $x$  comme constant, on a  $du = \frac{n u dy}{y} + \frac{h dy}{x}$ . Transposant le premier terme du second membre de l'équation, divisant par  $y^n$  & intégrant, il vient  $\frac{u}{y^n} = \frac{h}{x} \cdot S. \frac{dy}{y^n} = \frac{-h}{(n-1)xy^{n-1}} + f'(x)$ ; donc  $u = \left( \frac{dz}{dx} \right) = \frac{-hy}{(n-1)x} + y^n f'(x)$ . Donc, supposant  $y$  constant, multipliant par  $dx$  & intégrant,  $z = \frac{-hy}{n-1} \cdot L. x + y^n f(x) + F(y)$ .

257. PROBLEME. Supposant que  $z$  est une fonction de  $y$  & de  $x$ , telle que  $\left( \frac{d^2 z}{dx dy} \right) = bz$ , déterminer  $z$  du moins d'une manière particulière. Soit  $z = e^{ax} m$ ,  $m$  étant une fonction de  $y$  sans  $x$  ni  $z$ . Si l'on considère  $y$  comme constant, on aura  $dz = e^{ax} m \cdot d L. e^{ax}$  (voyez dans la première section comment on doit différencier les quantités exponentielles)  $= a dx e^{ax} m$ ; donc  $\left( \frac{dz}{dx} \right) = a e^{ax} m$ , &  $\left( \frac{d^2 z}{dx dy} \right) = a e^{ax} \frac{dm}{dy} = bz$  (par supposition)  $= b e^{ax} m$ , en substituant la valeur de  $z$ ; donc  $a \cdot \frac{dm}{dy} = b m$ , &  $a \cdot \frac{dm}{m} = b dy$ . Donc  $a \cdot L. m = by$ ,  $L. m = \frac{by}{a} L. e$ ,  $m = e^{\frac{by}{a}}$ , & enfin  $z = e^{ax} e^{\frac{by}{a}} = e^{ax + \frac{by}{a}}$ .

Mais en multipliant par une constante  $A$ , on aura aussi une équation  $z = A e^{ax + \frac{by}{a}}$ , qui donnera une solution particulière : cette solution est très-étendue, puisque  $A$  &  $a$  sont des constantes arbitraires. De plus, plusieurs valeurs de  $z$ , qui satisfont en particulier, satisferont aussi étant jointes ensemble ; de sorte qu'on aura  $z = A e^{ax + \frac{by}{a}} + B e^{b'x + \frac{by}{b'}} + C e^{cx + \frac{by}{c}} + \&c.$  dans laquelle  $A, B, \&c. a, b, b', c, \&c.$  sont des constantes arbitraires. Si l'on fait  $m = a, mn = b$ , l'on aura une valeur particulière  $z = A e^{mx + ny}$  ; mais cette solution est bien inférieure à celles qui renferment deux fonctions arbitraires comme celle du problème précédent.

258. PROBLEME.  $z$  étant supposée une fonction de  $x$  & de  $y$ , telle que  $\left(\frac{d}{dy} \frac{dz}{dx}\right) = a \left(\frac{d}{dx} \frac{dz}{dy}\right)$ , déterminer  $z$ . Soit  $t = a'x + by$ ,  $r = cx + gy$ ,  $z$  sera une fonction de  $t$  & de  $r$  ; & en regardant  $y$  comme constant, nous aurons  $dt = a' dx$ , &  $dx = \frac{dt}{a'}$  ; nous aurons encore  $dr = c dx$ , ou  $dx = \frac{dr}{c}$ . Mais en regardant  $y$  comme variable, on aura  $dy = \frac{dt}{b}$  &  $dy = \frac{dr}{g}$ . Cela posé, il est visible que si l'on veut chasser  $dx$ , on doit différencier deux fois  $z$ , en faisant successivement varier  $t$  &  $r$  pour la

seule variable  $x$ , & deux fois aussi si l'on fait varier  $y$ ; de sorte que l'on aura  $\left(\frac{dz}{dx}\right) = a' \left(\frac{dz}{dt}\right) + c \left(\frac{dz}{dr}\right)$  (\*), &  $\left(\frac{dz}{dy}\right) = b \left(\frac{dz}{dt}\right) + g \left(\frac{dz}{dr}\right)$ . L'on aura aussi  $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = a \frac{d}{dt} \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + 2 \frac{d}{dt} c \times \left(\frac{ddz}{dt dr}\right) + c \frac{d}{dr} \left(\frac{ddz}{dr^2}\right)$  (\*\*): on aura encore  $\left(\frac{ddz}{dx dy}\right)$

(\*) Si l'on avoit  $x = t$  &  $r = x + y$ , l'on auroit  $dx = dt$ ; mais cependant l'on n'auroit pas  $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dt}\right)$ . La raison en est que dans la formule  $\left(\frac{dz}{dx}\right)$   $y$  est regardé comme constant; au lieu que  $r = x + y$ , est supposé constant dans l'autre formule, ce qu'il est bon de remarquer, afin de ne pas conclure de  $x = t$  que  $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dt}\right)$ .

(\*\*) Pour concevoir cela très-clairement, on doit faire attention que si  $z$  est une fonction de  $x$  & de  $y$ , on ne peut avoir sa différentielle qu'en faisant varier successivement  $x$  &  $y$ ; de manière que  $dz = dx \left(\frac{dz}{dx}\right) + dy \times \left(\frac{dz}{dy}\right)$ ; mais si  $x$  &  $y$  sont donnés en  $t$  &  $r$ , on aura  $dx = dt \left(\frac{dx}{dt}\right) + dr \left(\frac{dx}{dr}\right)$ , &  $dy = dt \left(\frac{dy}{dt}\right) + dr \left(\frac{dy}{dr}\right)$ . Donc en substituant ces valeurs, on trouvera

$$= ab \left( \frac{ddz}{dt^2} \right) + (ag + bc) \left( \frac{ddz}{dt dr} \right) + cg \times \left( \frac{ddz}{dr^2} \right), \text{ \& enfin l'on a } \left( \frac{ddz}{dy^2} \right) = bb \left( \frac{ddz}{dt^2} \right) +$$

$$dz = dt \left( \frac{dx}{dt} \right) \left( \frac{dz}{dx} \right) + dr \left( \frac{dx}{dr} \right) \left( \frac{dz}{dx} \right) + dt \left( \frac{dy}{dt} \right) \left( \frac{dz}{dy} \right) + dr \left( \frac{dy}{dr} \right) \left( \frac{dz}{dy} \right). \text{ Mainte-}$$

nant si l'on suppose que l'un de deux  $t$  ou  $r$  seulement soit variable, on aura  $\frac{dz}{dt} = \left( \frac{dx}{dt} \right) \left( \frac{dz}{dx} \right) + \left( \frac{dy}{dt} \right) \times \left( \frac{dz}{dy} \right)$  ;  $\frac{dz}{dr} = \frac{dx}{dr} \left( \frac{dz}{dx} \right) + \frac{dy}{dr} \left( \frac{dz}{dy} \right)$ .

Puisque  $z$  étant une fonction de  $x$  & de  $y$ ,  $t$  &  $r$  étant aussi des fonctions de  $x$  & de  $y$ , on peut supposer  $z = z$ , de manière que dans le premier membre de cette équation  $z$  soit une fonction de  $x$  & de  $y$ , & que dans le second membre  $z$  soit une fonction de  $t$  & de  $r$ . Donc en différenciant en faisant varier successivement  $x$  &  $y$  dans le premier

membre,  $t$  &  $r$  dans le second, on aura  $\left( \frac{dz}{dx} \right) = \left( \frac{dt}{dx} \right) \times \left( \frac{dz}{dt} \right) + \left( \frac{dr}{dx} \right) \left( \frac{dz}{dr} \right)$  ;  $\left( \frac{dz}{dy} \right) = \left( \frac{dt}{dy} \right) \left( \frac{dz}{dt} \right) + \left( \frac{dr}{dy} \right) \left( \frac{dz}{dr} \right)$ . On aura aussi  $\left( \frac{ddz}{dx^2} \right) = \left( \frac{ddt}{dx^2} \right) \times \left( \frac{dz}{dt} \right) + \left( \frac{ddr}{dx^2} \right) \left( \frac{dz}{dr} \right) + \left( \frac{dt}{dx} \right)^2 \left( \frac{ddz}{dt^2} \right) + 2 \left( \frac{dt}{dx} \right) \left( \frac{dr}{dx} \right) \left( \frac{ddz}{dt dr} \right) + \left( \frac{dr}{dx} \right)^2 \left( \frac{ddz}{dr^2} \right)$  ;  $\left( \frac{ddz}{dx dy} \right) = \left( \frac{ddt}{dx dy} \right) \left( \frac{dz}{dt} \right) + \left( \frac{ddr}{dx dy} \right) \left( \frac{dz}{dr} \right) +$

$2bg \left( \frac{dd\zeta}{dt dr} \right) + gg \left( \frac{dd\zeta}{dr^2} \right)$ ; donc notre équation deviendra  $(bb - a'a'.aa) \left( \frac{dd\zeta}{dt^2} \right) + 2 \times$

$$\begin{aligned} & + \left( \frac{dt}{dx} \right) \left( \frac{dt}{dy} \right) \left( \frac{dd\zeta}{dt^2} \right) + \left( \frac{dt}{dx} \right) \left( \frac{dr}{dy} \right) \left( \frac{dd\zeta}{dt dr} \right) + \\ & \left( \frac{dr}{dx} \right) \left( \frac{dt}{dy} \right) \left( \frac{dd\zeta}{dt dr} \right) + \left( \frac{dr}{dx} \right) \left( \frac{dr}{dy} \right) \left( \frac{dd\zeta}{dr^2} \right); \\ & \left( \frac{dd\zeta}{dy^2} \right) = \left( \frac{ddt}{dy^2} \right) \left( \frac{d\zeta}{dt} \right) + \left( \frac{ddr}{dy^2} \right) \left( \frac{d\zeta}{dr} \right) \\ & + \left( \frac{dt}{dy} \right)^2 \left( \frac{dd\zeta}{dt^2} \right) + 2 \left( \frac{dt}{dy} \right) \left( \frac{dr}{dy} \right) \left( \frac{dd\zeta}{dt dr} \right) \\ & + \left( \frac{dr}{dy} \right)^2 \left( \frac{dd\zeta}{dr^2} \right). \end{aligned}$$

Si l'on veut savoir quelle des quantités  $x$  ou  $y$  l'on a regardé comme variable dans les termes du second membre de ces équations affectés de  $dd\zeta$ , on n'a qu'à faire attention au coefficient de ces termes : ainsi dans le dernier terme de la der-

niere équation le coefficient  $\left( \frac{dr}{dy} \right)^2$  fait connoître qu'on a différencié  $\zeta$  deux fois, en faisant varier  $r$ , & regardant  $x$  comme constant dans la fonction  $r$ . Le coefficient de l'avant-dernier terme de la même équation indique qu'on a différencié  $\zeta$ , en faisant varier successivement  $t$  &  $r$ , ou  $r$  &  $t$ , & regardant  $y$  comme variable &  $x$  comme constant. Le dernier terme de l'avant-derniere équation indique qu'on a différencié  $\zeta$  deux fois, en faisant varier  $r$ , & regardant dans  $r$ ,  $y$  comme constant &  $x$  comme variable, & ensuite  $x$  comme constant &  $y$  comme variable, ou réciproquement.

Si l'on suppose  $t = ax + by$ , &  $r = cx + gy$ , on aura  $\left( \frac{dt}{dx} \right) = a$ ;  $\left( \frac{dt}{dy} \right) = b$ ;  $\left( \frac{dr}{dx} \right) = c$ ;  $\left( \frac{dr}{dy} \right) = g$ ; donc il viendra  $\left( \frac{d\zeta}{dx} \right) = a \left( \frac{d\zeta}{dt} \right) + c \left( \frac{d\zeta}{dr} \right)$ ;  $\left( \frac{d\zeta}{dy} \right)$

$(bg - a'c.aa) \left( \frac{ddz}{dt dr} \right) + (gg - cc.aa) \times$   
 $\left( \frac{ddz}{dr^2} \right) = 0$ . Supposons  $a' = c = 1$ ,  $b = a$  &  
 $g = -a$ ; alors la première & la dernière for-  
 mule s'évanouiront, ce qui arrivera en faisant  
 $t = x + ay$  &  $r = x - ay$ , & l'on aura  
 $-2(2aa) \left( \frac{ddz}{dt dr} \right) = 0$ , ou  $\left( \frac{ddz}{dt dr} \right) = 0$ ,  
 d'où, par ce qu'on a dit ci-dessus (254), on  
 tire  $z = f(t) + F(r)$ , ou en substituant les  
 valeurs de  $t$  & de  $r$ ,  $z = f(x + ay) + F(x - ay)$ ,  
 formule qui satisfait; car  $\left( \frac{dz}{dx} \right) = f'(x + ay)$   
 $+ F'(x - ay)$ ;  $\left( \frac{dz}{dy} \right) = a f'(x + ay) -$

$= b \left( \frac{dz}{dt} \right) + g \left( \frac{dz}{dr} \right)$ ; & pour les formules du second  
 degré,  $\left( \frac{ddz}{dx^2} \right) = aa \left( \frac{ddz}{dt^2} \right) + 2ac \left( \frac{ddz}{dt dr} \right) +$   
 $cc \left( \frac{ddz}{dr^2} \right)$ ;  $\left( \frac{ddz}{dx dy} \right) = ab \left( \frac{ddz}{dt^2} \right) + (ag + bc) \left( \frac{ddz}{dt dr} \right)$   
 $+ cg \left( \frac{ddz}{dr^2} \right)$ ;  $\left( \frac{ddz}{dy^2} \right) = bb \left( \frac{ddz}{dt^2} \right) + 2bg \left( \frac{ddz}{dt dr} \right)$   
 $+ gg \left( \frac{ddz}{dr^2} \right)$ . En général on aura  $\left( \frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n} \right) =$   
 $A \left( \frac{d^{m+n}z}{dt^{m+n}} \right) + B \left( \frac{d^{m+n}}{dt^{m+n-1} dr} \right) + C \left( \frac{d^{m+n}z}{dt^{m+n-2} dr^2} \right)$   
 $+ \&c.$  & les coefficients  $A, B, C$ , &c. seront les mêmes que  
 ceux qui viennent de l'évolution de la forme  $(a + cp)^m (b +$   
 $gp)^n$ , en disposant les termes selon les puissances de  $p$ , & fai-  
 sant attention que le premier terme contient  $p^0 = 1$ ; si  $dy$   
 ne se trouve pas dans la formule, on aura  $n = 0$ .

$$aF'(x - ay); \left(\frac{a d\zeta}{dx^2}\right) = f''(x + ay) + \\ F''(x - ay); \left(\frac{d d\zeta}{dy^2}\right) = a a f''(x + ay) + \\ a a F''(x - ay) (*).$$

On peut prendre pour les fonctions de  $x + ay$  &  $x - ay$ , dont la somme doit donner la valeur de  $\zeta$  des fonctions même discontinues. Si dans deux courbes quelconques, tracées même par un mouvement irrégulier de la main, on prend sur une abscisse  $x + ay$  &  $x - ay$  sur l'autre abscisse, la somme des ordonnées correspondantes donnera toujours une fonction de  $\zeta$  qui résoudra le problème (\*\*).

La solution du problème des cordes vibrantes ayant conduit à l'équation que nous ve-

(\*) On doit faire attention que si  $V$  est une fonction de  $x$ , exprimée par  $f(x)$ , l'on aura  $\left(\frac{dV}{dx}\right) = f'(x)$ ,  $\left(\frac{d dV}{dx^2}\right) = f''(x)$ ,  $\left(\frac{d d dV}{dx^3}\right) = f'''(x)$ ,  $\left(\frac{d^4 V}{dx^4}\right) = f^{iv}(x)$ , &c. Il est maintenant aisé de comprendre la signification de  $f'$ ,  $f''$ ,  $F'$ ,  $F''$ .

(\*\*) On peut aussi s'y prendre de cette manière. Soit  $\left(\frac{d\zeta}{dy}\right) = n \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)$ ; donc  $\left(\frac{d d\zeta}{dx dy}\right) = n \left(\frac{d d\zeta}{dx^2}\right)$ ;  $\left(\frac{d d\zeta}{dy^2}\right) = n \left(\frac{d d\zeta}{dy dx}\right)$ ; mais parce que  $\left(\frac{d d\zeta}{dx dy}\right) = n \left(\frac{d d\zeta}{dx^2}\right)$ , l'on a  $n \left(\frac{d d\zeta}{dx dy}\right)$ , ou  $\left(\frac{d d\zeta}{dy^2}\right) =$

nous de résoudre, le célèbre M. d'Alembert, qui le premier a entrepris avec succès la solution de ce problème, parvint par une méthode singulière, à l'intégration de cette équation.

REMARQUE. Si l'on avoit l'équation  $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) + aa \left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = 0$ ; dans ce cas  $aa$  auroit le signe — & les coefficients  $bb - a'd', aa, gg - cc. aa$  deviendroient  $bb + aa, gg + aa$ , en supposant, comme on l'a fait, que  $a' = c = 1$ , & en supposant  $b = a\sqrt{-1}$ , &  $g = -a\sqrt{-1}$ , la première & la troisième formule disparaîtroient; & alors  $z = f(x + ay\sqrt{-1}) + F(x - ay\sqrt{-1})$ . Mais toutes les fois que les fonctions  $f$  &  $F$  sont continues de quelque nature qu'elles soient, leurs valeurs peuvent se réduire à cette forme  $Q \pm P\sqrt{-1}$ .

Le célèbre M. Culer, dans son troisième volume du Calcul intégral, fait  $z = \frac{1}{2} f(x + ay \times$

---

$nn \left(\frac{duz}{dx^2}\right) = aa \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$ , en supposant  $n = \pm a$ .

Mais alors  $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \pm a \left(\frac{dz}{dx}\right)$ ; &  $dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) \times (dx \pm a dy)$ , équation qui ne peut être intégrable qu'autant que  $z$  est une fonction de  $x \pm ay$ ; donc  $z = f(x + ay)$  &  $z = F(x - ay)$ : mais chacune de ces valeurs satisfaisant, leur assemblage doit aussi satisfaire; donc on aura aussi  $z = f(x + ay) + F(x - ay)$ . Supposons que  $m$  étant un nombre quelconque,  $f$  &  $F$  désignent la puissance  $m$ , on aura  $z = (x + ay)^m + (x - ay)^m$ , quantité réelle, lors même que  $a$  est imaginaire.



$$\sqrt{-1} + \frac{1}{2} f(x - ay \sqrt{-1}) + \frac{1}{2 \sqrt{-1}} \cdot F(x + ay \sqrt{-1}) - \frac{1}{2 \sqrt{-1}} \cdot F(x - ay \sqrt{-1}),$$

formule, qui en faisant  $x = m \cos p$ ,  $ay = m \sin p$ , ou  $(x \pm ay \sqrt{-1})^n = m^n (\cos np \pm \sqrt{-1} \sin np)$ , se réduira facilement à une quantité réelle toutes les fois que  $f$  &  $F$  seront des fonctions continues. Mais qui pourroit dans des courbes quelconques, décrites par un mouvement libre de la main, concevoir la somme ou la différence des ordonnées correspondantes aux abscisses  $x + ay \sqrt{-1}$ , &  $x - ay \sqrt{-1}$ ? C'est là un défaut du calcul qui n'est pas petit, & qu'on ne peut suppléer par aucun moyen connu.

COROLLAIRE. Si  $a = 1$ , c'est-à-dire, si  $\left(\frac{dd\zeta}{dx^2}\right) = \left(\frac{dd\zeta}{dx^2}\right)$ , on aura  $\zeta = f(x+y) + F(x-y)$ .

259. PROBLÈME. *Trouver l'intégrale complete de l'équation*  $(x+y)^2 \left(\frac{dd\zeta}{dx dy}\right) + m(x+y) \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)$

$$+ m(x+y) \left(\frac{d\zeta}{dy}\right) + n\zeta = 0. \text{ Je suppose } \zeta =$$

$$A(x+y)^p f(x) + B(x+y)^{p+1} f'(x) + c(x+y)^{p+2} f''(x) + D(x+y)^{p+3} f'''(x) \&c.$$

prenant les valeurs de  $\zeta$ ,  $\left(\frac{d\zeta}{dy}\right)$ ,  $\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)$ ,  $\left(\frac{dd\zeta}{dx dy}\right)$ ,

que donne cette équation, & les substituant dans la proposée, je trouve  $[nA + 2mpA + p(p-1)A] \times (x+y)^p f(x) + [nB + mA + 2m(p+1)B + (p+1)pB + pA] (x+y)^{p+1} f'(x) + [nc + mB + 2m(p+2)c + (p+1)B +$

$(p+2)(p+1)c](x+y)^{p+2}f''(x) + \&c.$   
 $= 0$ ; équation qui ne peut avoir lieu pour toutes les  
valeurs de  $x, y$  &  $f(x)$ , qu'autant que les coefficients  
constans sont chacun  $= 0$ . Donc on aura  $n+2mp$   
 $+pp-p=0$ ;  $(n+2mp+2m+pp+p)B$   
 $+ (m+p)A=0$ ;  $(n+2mp+4m+pp+3p$   
 $+2)c + (m+p+1)B=0$ ;  $(n+2mp+6m+pp+5p+6)D$   
 $+ (m+p+2)c=0$ ;  
&c. si l'on prend la valeur de  $n$  dans la première de  
ces équations, pour la substituer dans les autres, qu'on  
substitue dans la troisième la valeur de  $B$ , prise dans  
la seconde; qu'on substitue dans la quatrième la valeur  
de  $c$  prise dans la troisième; &c. l'on aura  $B=$

$$-\frac{(m+p).A}{2(m+p)}; C = -\frac{(m+p+1).B}{2(2m+2p+1)}; D =$$

$$-\frac{(m+p+2).C}{3(2m+2p+2)}; E = -\frac{(m+p+3).D}{4(2m+2p+3)};$$

$$F = -\frac{(m+p+4).E}{5(2m+2p+4)}; G = -\frac{(m+p+5).F}{6(2m+2p+5)};$$

&c. Il n'est pas difficile de continuer, la loi de la  
progression étant manifeste; mais l'équation  $n+2mp$

$$+pp-p=0, \text{ donne } p = \frac{1}{2} - m \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} - m\right.}$$

$$\left. - n + mm\right)}, \text{ \& l'on peut prendre pour } p \text{ quelle}$$

de deux valeurs on voudra: mais la série sera inter-  
rompue, &c. finira au terme qui précède celui dans lequel  
 $m+p+u$  est  $= 0$ ,  $u$  désignant un nombre entier po-  
sitif. Or cela doit avoir lieu toutes les fois que

$$\frac{1}{2} + u \pm \sqrt{\frac{1}{4} - m - n + mm} = 0. \text{ Mais cela}$$

ne peut arriver, à moins que la quantité sous le signe  
ne soit un carré parfait.

Si l'on avoit supposé  $z = A(x+y)^p F(y) +$   
 $B(x+y)^{p+1} F'(y)$  &c. on auroit trouvé une sem-  
blable série pour les valeurs de  $B, C, D, \&c.$   
& joignant ensemble ces deux valeurs, l'on aura aussi

$z = A(x+y)^p [f(x) + F(y)] + B(x+y)^{p+1} [f'(x) + F'(y)] + C(x+y)^{p+2} [f''(x) + F''(y)] + D(x+y)^{p+3} [f'''(x) + F'''(y)] + E(x+y)^{p+4} [f^{iv}(x) + F^{iv}(y)] + \&c.$   
 formule, qui à cause de deux fonctions arbitraires, est l'intégrale complète de l'équation proposée.

Il est aisé de comprendre qu'on peut souvent obtenir l'intégrale de manière qu'elle ne renferme qu'un nombre fini de termes. Si  $p = -m - 1$ , par exemple, ou si  $n = (m+1)(m-2)$ , l'intégrale aura deux membres; elle en aura trois si  $p$  est  $= -m - 2$ , ou si  $n = (m+2)(m-3)$ ; elle en aura quatre si  $p = -m - 3$ , ou si  $n = (m+3)(m-4)$ , &c. En général si l'on suppose  $p + m = -u$ , on aura  $n = (m+u) \times$

$$(m-u-1), \&c \text{ alors } B = -\frac{1}{2} A; C = -\frac{(u-1).B}{2.(2u-1)};$$

$$D = -\frac{(u-2).C}{3.(2u-2)}; \&c. \text{ ou en réduisant, } B =$$

$$\frac{1}{2}.A; C = -\frac{(u-1).A}{2.2.(2u-1)}; D = -\frac{(u-2).A}{2.2.2.3.(2u-1)};$$

$$E = \frac{+(u-2)(u-3).A}{2.2.2.3.4.(2u-1)(2u-3)}; \&c. \text{ donc } A \text{ étant}$$

supposé  $= 1$ , & les valeurs successives de  $u$  étant les nombres naturels 1, 2, 3, &c. l'on aura

	A	B	C	D	E	F
$u=1$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0
		$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	0	0	0
$u=2$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$-\frac{1}{120}$	0	0
		$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{20}$	$-\frac{2}{7.24}$	$\frac{2.1}{96.7.5}$	0
$u=3$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{28}$	$-\frac{3}{9.24}$	$\frac{3.2}{96.9.7}$	$\frac{2.1}{960.9.7}$
		$-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{36}$	$-\frac{4}{11.24}$	$\frac{4.3}{96.11.9}$	$\frac{3.2}{960.11.9}$
$u=4$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{44}$			

Ainsi l'intégrale complete de cette équation  $\left(\frac{d d \zeta}{d x d y}\right)$

$$+ \frac{m}{x+y} \cdot \left(\frac{d \zeta}{d x}\right) + \frac{m}{x+y} \cdot \left(\frac{d \zeta}{d y}\right) + \frac{(m+u)(m-u-1) \cdot \zeta}{(x+y)^2} = 0 \quad (A), \text{ sera } \zeta =$$

$$(x+y)^{-m-u} [f(x) + F(y)] - \frac{u}{2u} (x+y)^{-m-u+1} [f'(x) + F'(y)] + \frac{u(u-1)}{2u \cdot 2(2u-1)} \times$$

$$(x+y)^{-m-u+2} [f''(x) + F''(y)] - \frac{u(u-1)(u-2)}{2u \cdot 2(2u-1) \cdot 3(2u-2)} \cdot (x+y)^{-m-u+3} \times$$

$[f'''(x) + F'''(y)]$  &c. formule qui n'aura qu'un nombre fini de termes toutes les fois que  $u$  sera un nombre entier positif; mais quoique cette intégrale renferme plusieurs fonctions arbitraires  $f'(x)$ ,  $F'(y)$ , &c. Cependant ces fonctions dépendant de  $f(x)$  & de  $F(y)$ , & on peut dire qu'elle n'en contient que deux.

Soit l'équation  $\left(\frac{d d \zeta}{d x d y}\right) + \frac{m}{x+y} \cdot \left(\frac{d \zeta}{d x}\right) = 0,$

l'on aura  $n = (m+u)(m-u-1) = 0$ , & en prenant pour  $u$  des nombres entiers & positifs, l'intégration peut avoir lieu toutes les fois que l'on aura  $m = -u$  &  $m = u+1$ ; ainsi l'intégration réussira toutes les fois que  $m$  sera un nombre entier positif ou négatif. Supposons premièrement  $m = -u$ , nous aurons

$$\zeta = 1. [f(x) + F(y)] - \frac{u}{2u} (x+y) [f'(x) + F'(y)] + \frac{1}{2} \cdot \frac{u(u-1)}{2u(2u-1)} (x+y)^2 [f''(x) + F''(y)] \text{ \&c. ; mais si } m = u+1, \text{ on trouvera}$$

$$(x+y)^{-u+1} \zeta = [f(x) + F(y)] - \frac{u}{2u} \cdot$$

$(x+y)[f'(x)+F'(y)]$  &c. De manière que les deux équations seront les mêmes, avec cette différence, que le premier membre  $\zeta$  de la seconde est multiplié par  $(x+y)^{2u+1}$ .

Si l'on avoit l'équation  $\left(\frac{dd\zeta}{d\epsilon dr}\right) + \frac{m}{\epsilon+r}\left(\frac{d\zeta}{d\epsilon}\right) + \frac{m}{\epsilon+r}\left(\frac{d\zeta}{dr}\right) + \frac{n\zeta}{(\epsilon+r)^2} = 0$  (B), on l'intégreroit dans les mêmes cas que l'équation (A) ci-dessus: car il est visible que si  $n$  est  $=(m+u)$ ,  $(m-u-1)$ , changeant  $x$  en  $\epsilon$  &  $y$  en  $r$ , ces équations seront les mêmes.

L'équation  $\frac{1}{bb}\left(\frac{dd\zeta}{dy^2}\right) - \frac{1}{aa}\left(\frac{dd\zeta}{dx^2}\right) - \frac{2m}{aax}\left(\frac{d\zeta}{dx}\right) - \frac{n\zeta}{aaxx} = 0$  (C), est intégrable dans les mêmes cas que la précédente; car en faisant  $\epsilon = ax + by$  &  $r = ax - by$ , ce qui donne  $x = \left(\frac{\epsilon+r}{2a}\right)$ , substituant les valeurs de  $\left(\frac{dd\zeta}{dy^2}\right)$ ,  $\left(\frac{dd\zeta}{dx^2}\right)$ ,  $\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)$  (\*), & celle de  $x$  divisant par 4, & changeant les signes, on aura l'équation B. L'équation  $\frac{1}{bb}\left(\frac{dd\zeta}{dy^2}\right) - \frac{1}{aa}\left(\frac{dd\zeta}{dx^2}\right) + \frac{2m}{bb y}\left(\frac{d\zeta}{dy}\right) + \frac{n\zeta}{bb yy} = 0$  (D) se réduit encore facilement à l'équation B, en faisant  $\epsilon = ax + by$ , &  $r = -ax + by = by - ax$ , ce qui donne  $y = \frac{\epsilon+r}{2b}$ ; ainsi les équations D & C sont intégrables

(\*) On les trouvera aisément par la deuxième note du n°. 258.

toutes les fois que  $n = (m + u)(m - u - 1)$ .

COROLLAIRE. Si on suppose  $n = 0$ , on aura les deux équations  $\frac{a}{b} \frac{a}{b} \left( \frac{d d \zeta}{d y^2} \right) - \left( \frac{d d \zeta}{d x^2} \right) - \frac{2m}{x} \left( \frac{d \zeta}{d x} \right)$

$$= 0 (*), \left( \frac{d d \zeta}{d y^2} \right) - \frac{b}{a} \frac{b}{a} \left( \frac{d d \zeta}{d x^2} \right) + \frac{2m}{y} \left( \frac{d \zeta}{d y} \right) = 0,$$

qui seront intégrables dans une infinité de cas, c'est-à-dire, toutes les fois que  $m$  sera un nombre entier, & par conséquent toutes les fois que  $2m$  sera un nombre pair. Mais pour parvenir à l'intégrale complète

$$\text{de l'équation } \left( \frac{d d \zeta}{d y^2} \right) = \frac{b}{a} \frac{b}{a} \times \frac{4m}{2m-1} \left( \frac{d d \zeta}{d x^2} \right) (**),$$

toutes les fois que  $m$  est un nombre entier positif ou

$$\text{négatif, je fais } t = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2m-1} - \frac{b y}{2 \cdot (2m-1) a},$$

$$\& r = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2m-1} + \frac{b y}{2 \cdot (2m-1) a} \left( \text{ce qui donne} \right.$$

$$t + r = x \frac{-1}{2m-1} \Big), \& \text{ cette équation devient } \left( \frac{d d \zeta}{d t d r} \right)$$

$$+ \frac{m}{t+r} \left( \frac{d \zeta}{d t} \right) + \frac{m}{t+r} \left( \frac{d \zeta}{d r} \right) = 0, \text{ forme que nous}$$

avons être intégrable toutes les fois que  $m$  est un nombre entier positif ou négatif.

$$\text{Soit fait } P = f(t) + F(r); P' = x \frac{-1}{2m-1} [f'(t)]$$

(\*) Dans le problème de la propagation du son on parvient à une telle équation qui mérite par conséquent d'être remarquée.

(\*\*) Ce cas est digne d'attention, puisqu'il se présente dans le problème du mouvement des cordes. C'est ce cas dont parle M. Culer lorsqu'il dit : « *Promotu chordarum inaequali crafitie pradtitarum est inventus.* » Calc. intégr. 3<sup>me</sup> v. p. 179.

$+ F'(y)]$ ;  $P'' = x^{\frac{-2}{2m-1}} [f''(\epsilon) + F''(r)]$ ;  
 $P''' = x^{\frac{-3}{2m-1}} [f'''(\epsilon) + F'''(r)]$ ;  $P^{IV} =$   
 $x^{\frac{-4}{2m-1}} [f^{IV}(\epsilon) + F^{IV}(r)]$ ; &c. Si  $m=0$ , l'in-  
 tégrale de l'équation  $\left(\frac{dd\zeta}{dy^2}\right) = \frac{bb}{aa} \left(\frac{dd\zeta}{dx^2}\right)$  fera  $\zeta =$   
 $f\left(\frac{1}{2}x + \frac{by}{2a}\right) + F\left(\frac{1}{2}x - \frac{by}{2a}\right)$ . Si  $m$  étoit  $= -1$ ,  
 dans ce cas l'on auroit  $\epsilon = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{by}{6a}$  &  $r =$   
 $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{by}{6a}$ , & l'intégrale de l'équation  $\left(\frac{dd\zeta}{dy^2}\right)$   
 $= \frac{bb}{aa} x^{\frac{4}{3}} \left(\frac{dd\zeta}{dx^2}\right)$  deviendrait  $\zeta = f(\epsilon) + F(r)$   
 $- \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} [f'(\epsilon) + F'(r)]$ , dans laquelle il est  
 facile de substituer les valeurs de  $\epsilon$  & de  $r$ . Si  $m=1$ ,  
 l'on aura  $\zeta = x [f(\epsilon) + F(r)]$ . Si  $m=2$ , on  
 a  $\zeta = x [f(\epsilon) + F(r)] - \frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}} [f'(\epsilon) + F'(r)]$ .  
 Si  $m=3$ , ou si  $\left(\frac{dd\zeta}{dy^2}\right) = \frac{bb}{aa} x^{\frac{12}{5}} \left(\frac{dd\zeta}{dx^2}\right)$ ; parce  
 que dans ce cas  $\epsilon = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{5}} - \frac{by}{10a}$  &  $r =$   
 $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{5}} + \frac{by}{10a}$ , on trouvera  $\zeta = x [f(\epsilon) +$   
 $F(r)] - \frac{2}{4}x^{\frac{4}{5}} [f'(\epsilon) + F'(r)] + \frac{1}{4 \cdot 3}x^{\frac{3}{5}} [f''(\epsilon)$   
 $+ F''(r)]$ . Si  $m=4$ , on a  $\zeta = x [f(\epsilon) + F(r)]$

$$- \frac{3}{6} x^{\frac{6}{7}} [f'(t) + F'(r)] + \frac{3}{6.5} x^{\frac{5}{7}} [f''(t) + F''(r)] - \frac{1}{6.5.4} x^{\frac{4}{7}} [f'''(t) + F'''(r)].$$
 Si  $m=5$ , on a  $\zeta = x[f(t) + F(r)] - \frac{4}{8} x^{\frac{8}{9}} [f'(t) + F'(r)] + \frac{6}{8.7} x^{\frac{7}{9}} [f''(t) + F''(r)] - \frac{4}{8.7.6} x^{\frac{6}{9}} [f'''(t) + F'''(r)] + \frac{1}{8.7.6.5} x^{\frac{5}{9}} [f^{iv}(t) + F^{iv}(r)]$ . Il est aisé de continuer, la loi de ces intégrales étant assez évidente. Si dans cette dernière intégrale on substitue les valeurs de  $P, P', \&c.$  dont on a parlé ci-dessus, elle deviendra bien plus simple. Ainsi toutes les fois que  $m$  sera nombre entier fini, positif ou négatif, on pourra obtenir l'intégrale complète de l'équa-

$$\text{tion } \left( \frac{dd\zeta}{dy^2} \right) = \frac{bb}{aa} x^{\frac{4m}{2m-1}} \left( \frac{dd\zeta}{dx^2} \right).$$

Si on suppose  $a=b$  &  $m=\infty$ , cette équation devient  $\left( \frac{dd\zeta}{dy^2} \right) = xx \left( \frac{dd\zeta}{dx^2} \right)$ , dont on peut trouver une infinité d'intégrales particulières contenues dans cette formule générale  $\zeta = Ax^Pe^{P\zeta}$  (\*); car puisque cette équation donne  $\left( \frac{d\zeta}{dy} \right) = PAx^Pe^{P\zeta}$  &  $\left( \frac{d\zeta}{dx} \right) = PAx^{p-1}e^{P\zeta}$ , l'on doit avoir  $\left( \frac{dd\zeta}{dy^2} \right) = PPAx^Pe^{P\zeta} = p(p-1)Ax^Pe^{P\zeta} = xx \left( \frac{dd\zeta}{dx^2} \right)$ ; donc  $P = \pm \sqrt{p(p-1)}$ . Si l'on prend le signe  $+$ , l'on aura

(\*) ( $e$  étant le nombre dont le logarithme hyperbolique  $= 1$ ).



$z = Ax^p e^y \sqrt{p(p-1)}$ . Mais en prenant le signe —, & écrivant B au lieu de A, il vient  $z = Bx^p e^{-y} \sqrt{p(p-1)}$ . Mais chacune de ces deux valeurs satisfaisant, leur somme satisfera aussi; donc on aura  $z = Ax^p e^y \sqrt{p(p-1)} + Bx^p e^{-y} \sqrt{p(p-1)}$ . On peut donc dans une infinité de cas trouver l'intégrale particulière de l'équation  $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = xx \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$ .

*Recherche des fonctions à deux variables, par la relation des différentielles de tous les ordres.*

260. PROBLEME.  $z$  étant une fonction de deux variables, on demande sa nature, en supposant que quelque formule du troisième ordre soit  $= 0$ . Les formules différentielles du troisième ordre par rapport à la fonction  $z$ , seront  $\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)$ ,  $\left(\frac{d^3 z}{dx^2 dy}\right)$ ,  $\left(\frac{d^3 z}{dx dy^2}\right)$  &  $\left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right)$ .

261. Soit 1°.  $\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right) = 0$ , donc en prenant  $y$  pour constant, multipliant par  $dx$ , on aura  $\left(\frac{d^3 z}{dx^2}\right) = 0$ , &  $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = f(y)$ ; donc en prenant encore  $y$  pour constant, multipliant par  $dx$  & intégrant, l'on aura  $\frac{dz}{dx} = xf(y) + F(y)$ . Prenant encore  $y$  pour constant, multipliant par  $dx$  & désignant une fonction arbitraire par M, l'on a  $z = \frac{1}{2} xx f(y) + xF(y) +$

$M(y)$ ; de sorte que l'intégrale complète d'une formule différentielle du troisième ordre exige trois fonctions arbitraires.

262. Soit en second lieu  $\frac{d^3z}{dx^2 dy} = 0$ , en intégrant deux fois, en regardant  $y$  comme constant, on aura  $\left(\frac{dz}{dy}\right) = xf'(y) + F(y)$ ; & regardant maintenant  $y$  seul comme variable, il vient  $z = xf(y) + F(y) + M(x)$ .  $f$ ,  $F$ , &  $M$  désignent des fonctions arbitraires des quantités qui suivent ces lettres. A l'égard des fonctions  $f'$ ,  $F'$ , la première désigne que  $Sdy f'(y) = f(y)$ , & la seconde fait voir que  $Sdy F'(y) = F(y)$ .

263. En troisième lieu, si  $\left(\frac{d^3z}{dx dy^2}\right) = 0$ , ce cas ne diffère du précédent qu'en ce que les variables  $x$  &  $y$  doivent être mises l'une à la place de l'autre, de sorte que dans ce cas  $z = yf(x) + F(x) + M(y)$ .

264. Si enfin  $\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) = 0$ , ce cas rentre dans le premier, en changeant  $y$  en  $x$ , & réciproquement; donc  $z = \frac{1}{2}yyf(x) + yF(x) + M(x)$ .

265. PROBLÈME. Supposant toujours que  $z$  est une fonction de deux variables  $x$  &  $y$ , déterminer  $z$  lorsque quelque formule différentielle d'un degré quelconque est  $= 0$ . Ce qu'on vient de dire dans le problème précédent fait assez voir, qu'en

supposant que  $M$  &  $N$  ont une signification analogue à celle de  $f$  &  $F$ , on aura pour les formules du quatrième degré les intégrales qui suivent.

$$1^{\circ}. \text{ Si } \left( \frac{d^4 \zeta}{dx^4} \right) = 0, \text{ on aura } \zeta = \frac{x^3}{2.3} f(y) + \frac{x^2}{2} F(y) + x.M(y) + N(y).$$

$$2^{\circ}. \text{ Si } \left( \frac{d^4 \zeta}{dx^3 dy} \right) = 0, \text{ on aura } \zeta = \frac{x^2}{2} f(y) + x F(y) + M(y) + N(x).$$

$$3^{\circ}. \text{ Si } \left( \frac{d^4 \zeta}{dx^2 dy^2} \right) = 0, \text{ on aura } \zeta = x f(y) + F(y) + y M(x) + N(x).$$

$$4^{\circ}. \text{ Si } \left( \frac{d^4 \zeta}{dx dy^3} \right) = 0, \text{ on aura } \zeta = f(y) + \frac{y^2}{2} F(x) + y M(x) + N(x).$$

$$5^{\circ}. \text{ Si } \left( \frac{d^4 \zeta}{dy^4} \right) = 0, \text{ on aura } \zeta = \frac{y^3}{2.3} f(x) + \frac{y^2}{2} F(x) + y M(x) + N(x).$$

Et il est aisé de comprendre comment on peut continuer pour les degrés plus élevés.

266. REMARQUE. Si une formule différentielle est supposée égale à une fonction  $V$  de deux variables  $x$  &  $y$ , le calcul réussira de même. Il faut cependant remarquer que  $SV dx$  dénote une intégrale obtenue, en regardant  $x$  seul comme variable, mais dans  $SV dy$  on regarde  $y$  seul comme variable; dans  $S dx.SV dx$ , après qu'on a intégré

*Tome V.*

\*

$SV dx$ , en regardant  $x$  seul comme variable, on doit intégrer  $S dx$ .  $SV dx$ , en regardant encore  $x$  seul comme variable; dans  $S dy$ .  $SV dx$ , après avoir trouvé  $SV dx$ , en regardant  $x$  seul comme variable, on doit prendre  $S dy$ .  $SV dx$ , en regardant  $y$  seul comme variable. Mais au lieu de  $S dy$ .  $SV dx$ , on peut écrire  $SSV dx dy$  ou  $S^2 V dx dy$ , c'est-à-dire, qu'on peut d'abord intégrer  $SV dy$  pour intégrer ensuite  $S dx$ .  $SV dy$ , cela revient au même. De-là on comprend ce que signifient  $SSSV dx. dx. dy$ , ou  $S^3 V dx^2 dy$  &  $S^{m+n} V dx^m dy^n$ .

Supposons maintenant qu'on propose un solide géométrique, dont on demande la solidité par une double intégration de la formule  $SSV dx dy$ , on cherchera premièrement  $SV dy$ , en regardant  $x$  comme constant; & après l'intégration il faut faire une grande attention à cette première intégrale qu'on doit déterminer de manière qu'elle s'évanouisse lorsque  $y = 0$ ; Mais elle doit avoir lieu pendant que  $y$  sera une certaine fonction de  $x$ . Cette intégrale étant ainsi déterminée, on entreprendra l'intégration de la formule  $dx SV dy$ , dans laquelle  $y$  ne se trouvera plus, à cause qu'on aura substitué à sa place une fonction de  $x$ ; de sorte que  $y$  ne sera pas censé constant dans cette dernière intégration, ce qui fait voir que ce cas est entièrement différent de ces intégrations répétées dont il s'agit ici, dans lesquelles nous ne considérons pas la relation entre  $x$  &  $y$  dont on vient de parler.

267. PROBLEME. Si une formale différentielle du troisième degré, ou d'un degré plus élevé, est égale à une fonction  $V$  de  $x$  & de  $y$ , déterminer  $x$ .  
Soit

Soit 1°.  $\left(\frac{d^3 \zeta}{dx^3}\right) = V$ . En supposant  $x$  seul variable, on aura  $\left(\frac{dd\zeta}{dx^2}\right) = SV dx + f(y)$ ; ensuite  $\left(\frac{d\zeta}{dx}\right) = S dx. SV dx + xf(y) + F(y) = SSV dx^2 + xf(y) + F(y)$ , & enfin  $\zeta = S^3 V dx^3 + \frac{1}{2} x^2 f(y) + xF(y) + M(y)$ .

Si  $\left(\frac{d^3 \zeta}{dx^2 dy}\right) = V$ , on trouvera  $\zeta = S^3 V dx^2 dy + xf(y) + F(y) + M(x)$ .

Si  $\left(\frac{dd\zeta}{dx dy^2}\right) = V$ , on aura  $\zeta = S^3 V dx dy^2 + f(y) + yF(x) + M(x)$ .

Si  $\left(\frac{d^3 \zeta}{dy^3}\right) = V$ , on aura  $\zeta = S^3 V dy^3 + \frac{y^2}{2} f(x) + yF(x) + M(x)$ ; de même pour les degrés plus élevés.

Si  $\left(\frac{d^4 \zeta}{dx^4}\right) = V$ , on aura  $\zeta = S^4 V dx^4 + \frac{x^3}{2.3} f(y) + \frac{x^2}{2} F(y) + xM(y) + N(y)$ .

Si  $\left(\frac{d^4 \zeta}{dx^3 dy}\right) = V$ , on aura  $\zeta = S^4 V dx^3 dy + \frac{x^2}{2} f(y) + xF(y) + M(y) + N(x)$ .

Si  $\left(\frac{d^4 \zeta}{dx^2 dy^2}\right) = V$ , on aura  $\zeta = S^4 V dx^2 dy^2$

Tome V.

H

$$+ x f(y) + F(y) + y M(x) + N(x).$$

Si  $\left(\frac{d^4 \zeta}{dx dy^3}\right) = V$ , on aura  $\zeta = S^4 V dx dy^3$   
 $+ f(y) + \frac{y^2}{2} F(x) + y M(x) + N(x)$ ,  
 & il est facile de continuer pour les degrés plus élevés.

268. COMME dans les intégrations vulgaires, le signe d'intégration est censé renfermer une constante arbitraire qui entre dans l'intégrale, de même les fonctions arbitraires dont il est ici question, sont censées renfermées dans le signe d'intégration, sans qu'il soit nécessaire de les exprimer. Ainsi si  $\left(\frac{d^3 \zeta}{dx^3}\right) = V$ , la triple intégrale représentée par  $\zeta = S^3 V dx^3$ , sera censée contenir  $\frac{x^2}{2} f(y) + x F(y) + M(y)$ , sans qu'il soit nécessaire de les exprimer, ce qu'il faut dire de même pour les autres formules. En général, si  $\left(\frac{d^{m+n} \zeta}{dx^m dy^n}\right) = V$ , l'intégrale sera  $\zeta = S^{m+n} V dx^m dy^n$ , qui est censée renfermer un nombre  $m + n$  de fonctions arbitraires qui doivent être introduites par un nombre  $m + n$  d'intégrations.

*De l'intégration des équations des degrés supérieurs  
 par la réduction aux inférieurs.*

269. PROBLEME. Etant donnée l'équation du

troisième degré  $\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right) = a^3 z$ , chercher  $z$ . Supposons que l'équation  $\frac{dz}{dx} = n z$  satisfasse à la proposée, on aura en différenciant,  $\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = n \left(\frac{dz}{dx}\right) = n n z$ , &  $\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right) = n n \left(\frac{dz}{dx}\right) = n^3 z$ . Il est évident qu'on satisfera au problème si  $n^3 = a^3$ , ce qui peut arriver de trois manières. 1°. si  $n = a$ ; 2°. si  $n = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} a$ ; 3°. si  $n = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} a$ , qui sont les trois racines de l'équation  $n^3 - a^3 = 0$ . On prendra pour chaque valeur de  $n$  l'intégrale complète de l'équation  $\left(\frac{dz}{dx}\right) = n z$ , & les trois intégrales complètes, jointes ensemble, donneront l'intégrale complète demandée. Mais à cause que  $x$  seul est regardé comme variable, on aura  $dz = n z dx$ , ou  $\frac{dz}{z} = n dx$ . Donc  $L z = n x$ .  $L e + L. f(y)$ , &  $z = e^{n x} f(y)$ . Donnant maintenant à  $n$  les trois valeurs dont on vient de parler, on aura pour l'intégrale complète cherchée  $z = e^{a x} f(y) + e^{\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} a x} F(y) + e^{\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} a x} M(y)$ .

270. PROBLEME. Etant proposée l'équation  
H 2

$\left(\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \zeta\right) + b \left(\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \zeta\right) - 2a \left(\frac{d}{dx} \zeta\right) - ab \left(\frac{d}{dy} \zeta\right)$   
 $+ a a \zeta = 0$ , trouver  $\zeta$ . Il est visible que l'équa-  
tion  $\left(\frac{d}{dx} \zeta\right) = a \zeta$  satisfait à la proposée: or cette  
équation donne  $\zeta = e^{ax}$ . Supposons que l'inté-  
grale cherchée est  $\zeta = e^{ax} u$ , prenant les valeurs  
de  $\zeta$ ,  $\left(\frac{d}{dx} \zeta\right)$ ,  $\left(\frac{d}{dy} \zeta\right)$ ,  $\left(\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \zeta\right)$ ,  $\left(\frac{d}{dy} \frac{d}{dx} \zeta\right)$ , que  
donne cette supposition; les substituant dans la  
proposée & divisant ensuite par  $e^{ax}$ , il vient  
 $\left(\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} u\right) + b \left(\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} u\right) = 0$ ; & en faisant  $\frac{d}{dx} u = t$ ,  
on aura  $\left(\frac{d}{dx} t\right) + b \left(\frac{d}{dy} t\right) = 0$ : mais l'on voit aisé-  
ment que  $t$  doit être une fonction de  $y - bx$  (\*).  
Supposons que  $t = \left(\frac{d}{dx} u\right)$  est  $= -bf'(y - bx)$ ,  
pour avoir  $u = f(y - bx) + F(y)$ ; donc  $\zeta =$   
 $e^{ax} [f(y - bx) + F(y)]$ , intégrale complète  
de l'équation proposée.

271. PROBLEME. Etant donnée l'équation  
 $\left(\frac{d}{dy} \frac{d}{dy} \zeta\right) = a a \left(\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \zeta\right)$ , la réduire à une plus  
simple. L'équation  $\left(\frac{d}{dy} \frac{d}{dy} \zeta\right) = b \left(\frac{d}{dx} \zeta\right)$  satisfait  
à la proposée. Car en différenciant dans la sup-  
position de  $x$  constant, on trouve d'abord  
 $\left(\frac{d}{dy} \frac{d}{dy} \zeta\right) = b \left(\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \zeta\right)$ , & ensuite  $\left(\frac{d}{dy} \frac{d}{dy} \zeta\right) =$

---

(\*) Si  $t = (y - bx)^2$  l'on aura  $\left(\frac{d}{dx} t\right) + b \left(\frac{d}{dy} t\right) =$   
 $-2b(y - bx) + 2b(y - bx) = 0$ .



$b \left( \frac{d^3 \zeta}{dx dy^2} \right)$ . Mais si l'on regarde  $y$  comme constant, il vient  $\left( \frac{d^3 \zeta}{dx dy^2} \right) = b \left( \frac{d^3 \zeta}{dx^3} \right)$ ; donc en substituant dans l'équation précédente la valeur de  $\left( \frac{d^3 \zeta}{dx dy^2} \right)$ , il viendra  $\left( \frac{d^4 \zeta}{dy^4} \right) = b b \left( \frac{d^4 \zeta}{dx^4} \right)$ , qui satisfait à la proposée lorsque  $b b = a a$ , c'est-à-dire lorsque  $b = +a$  &  $b = -a$ ; ainsi si on suppose qu'on ait résolu les équations  $\left( \frac{dd\zeta}{dy^2} \right) - a \left( \frac{d\zeta}{dx} \right) = 0$ ,  $\left( \frac{dd\zeta}{dy^2} \right) + a \left( \frac{d\zeta}{dx} \right) = 0$ , & que la première donne  $\zeta = P$ , & la seconde  $\zeta = Q$ , on aura pour l'équation proposée,  $\zeta = P + Q$ ; & parce que  $P$  &  $Q$  renfermeront chacune deux fonctions arbitraires, l'intégrale trouvée de cette manière sera complète.

On peut trouver une infinité de solutions particulières en faisant  $\zeta = X Y$ ,  $X$  &  $Y$  étant des fonctions, la première de  $x$  & la seconde de  $y$ ; d'où l'on tire  $\frac{X d^4 Y}{dy^4} = \frac{a a Y d d X}{dx^2}$ , ou  $\frac{d^4 Y}{Y dy^4} = \frac{a a d d X}{X dx^2}$ . Cette équation étant ainsi représentée, l'un & l'autre membre doit être fait égal à une même constante  $b$ .

Soit, par exemple,  $Y = y^r$ ,  $X = x^s$  & supposons  $\frac{d^4 Y}{Y dy^4} = b$ , on aura  $b = 5. 4. 3. 2 \times$

$$\frac{y}{y^3} = \frac{a a d d X}{X d x^2} = \frac{3.2. a a x}{x^3}; \text{ donc } 5. 4. x^2 = a a y^4.$$

REMARQUE. L'équation  $\left(\frac{d d \zeta}{d y^2}\right) = b \left(\frac{d \zeta}{d x}\right)$  ne paroît pas pouvoir être généralement résolue par aucune méthode connue. L'équation proposée peut être utile dans la mécanique; car dans la recherche des vibrations fort petites des lames élastiques, on parvient à une équation du quatrième degré de cette forme; & comme on n'a pu jusqu'ici (du moins cela n'est pas venu à ma connoissance) résoudre généralement cette équation, on n'a pas pu non plus résoudre le problème général des lames élastiques.

*Des équations homogènes dont tous les termes contiennent des formules différentielles du même degré.*

272. PROBLÈME. Etant proposée l'équation homogène  $A \left(\frac{d d \zeta}{d x^2}\right) + B \left(\frac{d d \zeta}{d x d y}\right) + C \left(\frac{d d \zeta}{d y^2}\right) = 0$ , dans laquelle  $A, B, C$  sont des constantes, déterminer  $\zeta$ . J'observe que l'équation  $\left(\frac{d \zeta}{d x}\right) + a \left(\frac{d \zeta}{d y}\right) = c \dots (D)$ , satisfait à la proposée; car si l'on différentie celle-ci en faisant varier d'abord  $x$  & ensuite  $y$ , on aura les deux suivantes,  $\left(\frac{d d \zeta}{d x^2}\right) + a \left(\frac{d d \zeta}{d x d y}\right) = 0$ ,  $\left(\frac{d d \zeta}{d x d y}\right) + a \left(\frac{d d \zeta}{d y^2}\right) = 0$ .

$+ a \left( \frac{d^2 z}{dy^2} \right) = 0$ . Si l'on multiplie la première par  $A$  & la seconde par  $\frac{C}{a}$ , leur somme rendra la proposée, pourvu que  $Aa + \frac{C}{a} = B$ , ou que  $Aa^2 - Ba + C = 0$  (H) (\*); d'où résulte une valeur double pour  $a$ , dont chacune substituée dans l'équation (D) donnera une partie de la fonction  $z$  cherchée. Puisque par l'équation D l'on a  $\left( \frac{dz}{dx} \right) = c - a \left( \frac{dz}{dy} \right)$ , l'on aura  $dz = c dx + (dy - a dx) \left( \frac{dz}{dy} \right)$  (\*\*); ainsi  $\frac{dz}{dy}$  doit être une fonction de  $y - ax$  que nous ferons  $= f'(y - ax)$ . Donc  $z = cx + f(y - ax)$ ;  $c$  étant une constante arbitraire. C'est pourquoi l'on formera l'équation  $Auu + Bu + C = 0$  (T), dont les facteurs simples soient  $u + a, u + b$ , de manière que l'on ait  $Auu + Bu + C = A(u + a)(u + b)$ . Alors le facteur  $u + b$  donnera  $z = c'x + F(y - bx)$ , & faisant  $c + c' = g$ , on aura l'intégrale complète  $z = gx + f(y - ax) +$

(\*) L'équation H, en regardant  $a$  comme l'inconnue & changeant  $a$  en  $u$ , donne  $u = \frac{B}{2A} \pm \sqrt{\left( \frac{BB}{4AA} - \frac{C}{A} \right)}$ .  
Des deux valeurs de  $u$  j'en désignerai une par  $a$  & l'autre par  $b$ .

(\*\*) Car en faisant varier  $x$  seul, l'on auroit  $dz = c dx - a dx \left( \frac{dz}{dy} \right)$ ; mais si l'on veut prendre la différentielle de  $z$ , en faisant tout varier, il faudra ajouter  $\left( \frac{dz}{dy} \right) dy$ .

$F(y - bx)$ . Mais à cause de  $gx \equiv g \times \frac{(y - ax) - (y - bx)}{b - a}$ ,  $gx$  doit être censé contenu

dans les deux formules indéfinies ; donc on peut, en simplifiant, représenter notre intégrale par l'équation  $\xi = f(y - ax) + F(y - bx)$ .

Si  $b = a$ , on aura (par l'équation H)  $B = 4AC$ ,  $A = \frac{B}{2a}$ ,  $C = \frac{BB}{4A} = \frac{aB}{2}$  &  $a = \frac{B}{2A}$  ; substituant

la valeur de  $C$  dans l'équation proposée, & faisant ensuite  $t = x$ ,  $r = y - ax$ , on trouvera par la méthode ci-dessus (258), après avoir substitué la valeur de  $A$ , que l'équation proposée

devient  $\frac{B}{2a} \cdot \left( \frac{d\xi}{dt} \right) = 0$ , ou  $\left( \frac{d\xi}{dt} \right) = 0$  ;

donc par la méthode ci-dessus (251)  $\xi = f(r) + t F(r) = f(y - ax) + x F(y - ax)$  (\*).

COROLLAIRE. Si  $C = 0$ , on aura (par l'équation T)  $a = 0$ ,  $\frac{B}{A} = b$  &  $\xi = f(y) + F\left(y - \frac{B}{A}x\right)$  : de même l'intégrale de l'équation

---

(\*) M. Euler (*Calcul intégral, troisième vol. p. 380.*) se sert d'une autre méthode qui, en employant  $f$  &  $F$  au lieu de  $\Gamma$  &  $\Delta$ , dont il se sert, revient à ceci. Faisant  $b = a + da$ , alors on doit avoir par cette méthode  $F(y - bx) = F(y - ax) - x da F'(y - ax)$ , & parce que la première partie est contenue dans le premier membre  $f(-ax)$ , & qu'à la place de la seconde on peut, selon lui, écrire  $x F(y - ax)$ , il trouve une seconde formule semblable à la nôtre : mais, puisque lorsque  $b = a$ ,  $da$  est  $= 0$ , la quantité multipliée par  $da$  ne doit-elle pas devenir 0 & disparaître ?

$$B \left( \frac{d d \zeta}{d x d y} \right) + C \left( \frac{d d \zeta}{d y^2} \right) = 0, \text{ fera } \zeta = f(x) + F \left( x - \frac{B}{C} y \right).$$

Si les racines sont imaginaires, on pourra les représenter par les équations  $a = p + q \sqrt{-1}$  &  $b = p - q \sqrt{-1}$ , & l'on aura  $\zeta = f[y - (p + q \sqrt{-1})x] + F[y - (p - q \sqrt{-1})x]$ , qu'on peut facilement représenter d'une manière réelle.

L'on peut encore représenter la valeur de  $\zeta$  d'une manière réelle toutes les fois que  $f$  &  $F$  désigneront une puissance  $m$ ,  $m$  étant un nombre positif ou négatif : car en faisant la partie rationnelle de chaque fonction  $= s$ , &  $q x \sqrt{-1} = t$ , on aura  $\zeta = s^m - m s^{m-1} t + \frac{m \cdot m-2}{2} s^{m-2} t^2 \&c. + s^m + m \cdot s^{m-1} t + \&c. = 2 s^m + m \cdot m-1 \cdot s^{m-2} t^2 + \&c.$  à cause que tous les termes de rang pair, dans lesquels seuls il reste des quantités imaginaires, se détruisent ; mais il n'est pas possible de représenter d'une manière réelle les fonctions discontinues ; de sorte qu'il paroît que dans ce cas on doit borner la solution aux fonctions continues.

273. PROBLEME. *Etant donnée l'équation homogène*  $A \left( \frac{d^m \zeta}{d x^m} \right) + B \left( \frac{d^m \zeta}{d x^{m-1} d y} \right) + C \left( \frac{d^m \zeta}{d x^{m-2} d y^2} \right) + \&c. = 0$ , *en trouver l'intégrale complète.* On formera cette équation  $A n^m + B n^{m-1} + \&c. = 0$ , dont les racines soient

$n = a, n = b, n = c, \&c.$  Si elles sont toutes inégales, on aura  $z = f(y + ax) + F(y + bx) + M(y + cx) + \&c. (*)$ ; si elles sont toutes égales, on multipliera la première fonction par 1, la seconde par  $y$ , la troisième par  $y^2$ , la quatrième par  $y^3$ ; car les fonctions n'étant ni de  $x$  seul, ni de  $y$  seul, on peut employer indifféremment les progressions  $\ddot{\vdots} 1 : y : y^2 : y^3 \&c., \ddot{\vdots} 1 : x : x^2 \&c.$  Mais si les fonctions étoient seulement d'une variable, de  $x$ , par exemple, il faudroit employer la progression de l'autre variable. Si la proposée étoit du troisième degré, & que ses racines fussent égales, en introduisant les nouvelles variables  $t = x, u = y + ax$ , la proposée deviendrait  $\left(\frac{d^3 z}{dt^3}\right) = 0$ , dont l'intégrale donne  $z = f(u) + x F(u) + \frac{xx}{2} M(u) = f(y + ax) + x F(y + ax) + \frac{xx}{2} M(y + ax)$  en négligeant le diviseur 2. Au reste si on ne veut pas négliger les diviseurs numériques, on fera attention que  $x$  suppose une intégrale

(\*) Soit  $m = 3$ , & supposons que l'équation  $z = f(y + nx)$  est une intégrale particulière qui satisfait; on aura  $\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right) = n^3 f'''(y + nx)$ ;  $\left(\frac{d^3 z}{dx^3 dy}\right) = n^2 f'''(y + nx)$ ;  $\left(\frac{d^3 z}{dy dx^3}\right) = n f'''(y + nx)$ ; de sorte que dans ce cas, en divisant par  $f'''(y + nx)$ , l'on a  $An^3 + Bn^2 + Cn + D = 0$ , & la forme  $z = f(y + ax) + F(y + bx) + M(y + cx)$  satisfait à la proposée, en supposant  $n = a$ ;  $n = b$ ;  $n = c$ .

faite,  $x^2$  en suppose deux,  $x^3$  en suppose trois & ainsi de suite. De sorte que  $x^m$  doit avoir pour diviseur  $(1. 2. 3. 4. \dots m)$  s'il y avoit un certain nombre de racines égales, on multiplieroit ces racines par les termes correspondans d'une des progressions ci-dessus, en commençant par la première des racines égales en allant de la gauche à la droite, sans multiplier celles qui sont inégales.

Si les coefficients  $A, B, C$ , &c. s'évanouissoient, le nombre des racines seroit plus petit que  $m$ , & celles qui manqueroient, devroient être regardées comme infinies, auxquelles il répondroit des fonctions de  $x$  seul; ainsi si  $A = B = C = 0$ , les racines  $a, b, c$ , donneront la partie de l'intégrale  $f(x) + y F(x) + y^2 M(x)$ .

*Des équations homogènes qui ne renferment aucun coefficient variable, & dans lesquelles  $V$  étant une fonction de  $t$  & de  $u$ , on a la quantité  $t = ax + bz$  &  $u = cy + gz$ ; ce qui fait voir que  $V$  est une fonction des trois variables  $x, y, z$ .*

274. PROBLEME. Etant donnée l'équation  $A \left( \frac{dV}{dx} \right) + B \left( \frac{dV}{dy} \right) + C \left( \frac{dV}{dz} \right) = 0$ , trouver la fonction  $V$  des trois variables  $x, y$  &  $z$ . Supposons que  $V$  est  $= F(t \text{ \& } u)$ ,  $t$  étant  $= ax + bz$  &  $u = cy + gz$ : il est évident, en faisant attention à ce qu'on a dit ci-dessus (258), qu'on doit avoir  $\left( \frac{dV}{dt} \right) \times (Aa + Cb) + \left( \frac{dV}{du} \right) \cdot (Bc + Cg) = 0$ . Egalant séparément à 0 les multiplicateurs des formules

différentielles, on aura  $\frac{b}{a} = \frac{-A}{C}$  &  $\frac{g}{c} = \frac{-B}{C}$  ;  
 donc en substituant à la place de  $a, b, g$ , les  
 quantités qui leur sont proportionnelles, (&  
 qu'on peut, si l'on veut, leur supposer égales)  
 on aura  $t = Cx - A\zeta$  &  $u = Cy - B\zeta$  ;  
 donc l'intégrale complète sera  $V =$   
 $(\overline{Cx - A\zeta} \& \overline{Cy - B\zeta})$ .

COROLLAIRE. Parce que  $Cx - A\zeta = AC$ .  
 $\frac{x}{A} - \frac{\zeta}{C}$ , & que d'ailleurs le multiplicateur constant  
 ne change pas la nature de la fonction  $\frac{x}{A} - \frac{\zeta}{C}$ ,  
 on pourra substituer celle-ci à la place de  $Cx - A\zeta$  ;  
 on pourra faire un changement semblable  
 dans  $Cy - B\zeta$  ; de sorte qu'on pourra repré-  
 senter l'intégrale ci-dessus, par l'équation  $V =$   
 $F\left(\frac{x}{A} - \frac{\zeta}{C} \& \frac{y}{B} - \frac{\zeta}{C}\right)$ .

275. PROBLEME. Etant donnée l'équation  
 homogène du second degré  $A\left(\frac{ddV}{dx^2}\right) + B\left(\frac{ddV}{dy^2}\right)$   
 $+ C\left(\frac{ddV}{d\zeta^2}\right) + 2D\left(\frac{ddV}{dx d\zeta}\right) + 2E\left(\frac{ddV}{d\zeta dy}\right)$   
 $+ 2G\left(\frac{ddV}{dy d\zeta}\right) = 0$ , déterminer dans quel  
 cas on peut représenter son intégrale par  $F(t \& u)$   
 $+ M(t \& u)$ ,  $t \& u$  étant égaux aux quantités  
 dont on a parlé ci-dessus. Ayant fait les substi-  
 tutions convenables, l'équation proposée pourra



se distribuer en trois parties, comme on le voit ici.

$$\left. \begin{aligned} & \left( \frac{ddV}{dx^2} \right) \cdot (Aaa + Cbb + 2Eab) \\ & \left( \frac{ddV}{dxdu} \right) \cdot (2Cbg + 2Dac + 2Eag \\ & \qquad + 2Gbc) \\ & \left( \frac{ddV}{du^2} \right) \cdot (Bcc + Cgg + 2Gcg) \end{aligned} \right\} = 0.$$

Egalant chaque partie à 0, la première donnera

$$\frac{b}{a} = \frac{-E + \sqrt{(EE - AC)}}{C}, \text{ la dernière donnera}$$

$$\frac{g}{c} = \frac{-G + \sqrt{(GG - BC)}}{C} (*). \text{ Ces valeurs}$$

substituées dans la troisième égale à 0 & divisée par  $2ac$ , donneront  $EG - CD = \sqrt{[(EE - AC)(GG - BC)]}$ ; ôtant le radical, réduisant, divisant par  $C$  & transposant, l'on aura  $AGG + BEE + CDD = ABC + 2DEG$ . Toutes les fois que cette équation de condition aura lieu, la proposée admettra la solution que nous employons ici; & en représentant par  $xx$  la formule  $\left( \frac{ddV}{dx^2} \right)$ ; par  $xy$  la

---

(\*) Si on prenoit le signe — pour les deux radicaux, ou le signe — pour l'un & le signe + pour l'autre dans les deux premières équations, on parviendrait à la même troisième équation dans le premier cas; mais dans le second cas le signe du second membre seroit différent. Cependant cela n'empêcheroit pas que la quatrième équation ne fût la même.

formule  $\left(\frac{ddu}{dxdy}\right)$ ; &c. l'équation  $Axx + Byy + Cz\bar{z} + 2Dxy + 2Ex\bar{z} + 2Gy\bar{z} = 0$ , pourra se résoudre en deux facteurs de cette forme  $(a'x + b'y + c'\bar{z})(fx + g'y + h\bar{z})$ ; ce qui arrivera si  $A = a'f$ ,  $B = b'g$ ,  $C = c'h$ ,  $2D = a'g' + b'f$ ,  $2E = a'h + c'f$ ,  $2G = b'h + c'g'$ ; ce qui rend l'équation de condition ci-dessus. De-là l'on tire pour la solution  $\frac{b}{a} =$

$$\frac{-a'}{c'} \text{ ou } \frac{b}{a} = \frac{-f}{h} \text{ \& } \frac{g}{c} = \frac{-b'}{c'} \text{ ou } \frac{g}{c} = \frac{-g'}{h};$$

ou il faut remarquer qu'en supposant  $t = c'x - a'\bar{z}$  l'on doit faire  $u = c'y - b'\bar{z}$ ; mais à  $t = hx - f\bar{z}$  répond  $u = hy - g'\bar{z}$ ; ainsi l'on

$$\text{aura } V = F\left(\overline{c'x - a'\bar{z}} \text{ \& } \overline{c'y - b'\bar{z}}\right) +$$

$M\left(\overline{hx - f\bar{z}} \text{ \& } \overline{hy - g'\bar{z}}\right)(Q)(*)$ . Chaque facteur, comme il est aisé de le voir, fournit une fonction, & la somme des fonctions donne l'intégrale cherchée. Si les deux facteurs sont égaux, on pourra exprimer l'intégrale complète de cette

$$\text{manière } V = xF\left(\overline{\frac{x}{a'} - \frac{\bar{z}}{c'}} \text{ \& } \overline{\frac{y}{b'} - \frac{\bar{z}}{c'}}\right) +$$

$$M\left(\overline{\frac{x}{a'} - \frac{\bar{z}}{c'}} \text{ \& } \overline{\frac{y}{b'} - \frac{\bar{z}}{c'}}\right), \text{ en multipliant une des fonctions par } x \text{ \& l'autre par } 1.$$

Au reste toutes les fois que l'équation homogène, dont on vient de parler, est susceptible de

(\*)  $f$  désigne ici le coefficient de  $\bar{z}$ .

la solution précédente, elle renferme deux équations homogènes du premier degré  $a' \left( \frac{dV}{dx} \right) + b' \left( \frac{dV}{dy} \right) + c' \left( \frac{dV}{dz} \right) = 0$  (H) &  $f \left( \frac{dV}{dx} \right) + g' \left( \frac{dV}{dy} \right) + h \left( \frac{dV}{dz} \right) = 0$ ; car l'une & l'autre satisfait alors à la proposée; & leurs intégrales, jointes ensemble, rendent l'intégrale complète (Q) de la proposée. On peut aussi résoudre la proposée par cette méthode. Je prends l'équation (H), & je suppose qu'elle satisfait à la proposée, je la différencie successivement en faisant varier  $x$ ,  $y$  &  $z$ : la première différenciation donne

$$a' \left( \frac{ddV}{dx^2} \right) + b' \left( \frac{ddV}{dx dy} \right) + c' \left( \frac{ddV}{dx dz} \right) = 0;$$

la seconde donne

$$a' \left( \frac{ddV}{dx dy} \right) + b' \left( \frac{ddV}{dy^2} \right) + c' \left( \frac{ddV}{dy dz} \right) = 0;$$

la troisième donne

$$a' \left( \frac{ddV}{dx dz} \right) + b' \left( \frac{ddV}{dy dz} \right) + c' \left( \frac{ddV}{dz^2} \right) = 0.$$

Multipliant la première par  $f$ , la seconde par  $g'$ , la troisième par  $h$ , & prenant leur somme, on trouvera l'équation générale dont nous avons donné l'intégrale; on peut donc la regarder comme le produit de deux équations du premier degré dont la somme des intégrales donne l'intégrale complète de la proposée.

L'équation  $\left( \frac{ddV}{dx dy} \right) = \left( \frac{ddV}{dz^2} \right)$ , n'est pas intégrable par cette méthode, mais on peut en trouver

des intégrales particulières, telles que  $V = f(ax + by + cz)$ ; mais ayant fait la substitution, on doit avoir  $ab = cc$  & en faisant  $c = 1$ , on aura  $ab = 1$ ; ce qui pouvant avoir lieu d'une infinité de manières, on aura tant d'intégrales particulières qu'on voudra; ces intégrales jointes ensemble, satisferont aussi; donc  $a, b, c$ , &c. étant des nombres quelconques, on aura  $V = F\left(\frac{a}{b}x + \frac{b}{a}y + z\right) + M\left(\frac{c}{g}x + \frac{g}{c}y + z\right) + \&c.$  mais cependant l'on n'aura pas l'intégrale complète.

276. PROBLEME. *Etant donnée une équation homogène du troisieme degré, trouver son intégrale complète.* Supposons que l'équation du premier

degré  $a\left(\frac{dV}{dx}\right) + b\left(\frac{dV}{dy}\right) + c\left(\frac{dV}{dz}\right) = 0$ , satisfait à l'équation du troisieme degré  $A\left(\frac{d^3V}{dx^3}\right)$

$$+ B\left(\frac{d^3V}{dy^3}\right) + C\left(\frac{d^3V}{dz^3}\right) + D\left(\frac{d^3V}{dx^2dy}\right) + E\left(\frac{d^3V}{dx dy^2}\right) + E'\left(\frac{d^3V}{dx^2dz}\right) + G\left(\frac{d^3V}{dx dz^2}\right) + H\left(\frac{d^3V}{dy^2dz}\right) + I\left(\frac{d^3V}{dy dz^2}\right) + P\left(\frac{d^3V}{dx dy dz}\right) = 0.$$

Pour que l'équation du premier degré satisfasse à celle-ci, il faut que l'expression algébrique qu'on peut en former  $Ax^3 + By^3 + Cz^3 + Dx^2y + \&c. (Q)$ , ait un facteur  $ax + by + cz$ ; & si l'autre facteur n'est pas résolvable en deux autres facteurs simples, il sera une équation homogène du second degré qui ne sera pas susceptible de solution par la méthode actuelle. L'équation du troisieme degré ne peut avoir d'intégrale

intégrale complète, à moins que l'expression (Q) ne soit composée de trois facteurs simples,  $(ax + by + cz)$ ,  $(fx + gy + hz)$ ,  $(kx + my + nz)$ ; & dans ce cas l'on a

$$\begin{aligned} A &= afk; B = bgm; C = chn; D = \\ &afm + agk + bfk; E = agm + bfm \\ &+ bgk; E' = afn + ahk + cfk; \\ G &= ahn + cfn + chk; H = bgn + \\ &bhm + cgm; I = bhn + cgn + chm; \\ P &= agn + ahm + bfn + bhk + cfm \\ &+ cgk. \end{aligned}$$

Et alors l'intégrale complète sera  $V = F\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) +$   
 $\& \frac{y}{b} - \frac{z}{c}) + M\left(\frac{x}{f} - \frac{z}{h} \& \frac{y}{g} - \frac{z}{h}\right) +$   
 $N\left(\frac{x}{k} - \frac{z}{n} \& \frac{y}{m} - \frac{z}{n}\right)$ , chaque facteur simple produisant une fonction arbitraire.

Si deux facteurs sont égaux de manière que l'on ait  $f = a$ ,  $g = b$ ,  $h = c$ , à la place des deux premières fonctions, on écrira

$x F\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \& \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) + M\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \& \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)$ . Si les trois facteurs sont égaux & qu'on ait encore  $k = a$ ,  $m = b$ ,  $n = c$ , l'inté-

grale complète sera  $V = xx F\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \&$

$$\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) + x M \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \& \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) + \\ N \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{b} \& \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right).$$

Si une équation homogène du quatrième, du cinquième degré, &c. est telle que l'expression algébrique qu'on en peut former, soit composée de facteurs simples du premier degré, chacun de ces facteurs fournira une intégrale, & la somme de toutes les intégrales donnera l'intégrale complète de la proposée. S'il y a deux facteurs égaux, il faudra multiplier par  $x$  l'une des intégrales égales correspondantes; s'il y en a trois, on multipliera la première par  $x^2$ , la seconde par  $x$ , la troisième par  $1 = x^0$ ; &c. A l'égard des fonctions, ce qu'on vient de voir fait comprendre suffisamment comment on doit les exprimer.

Ces spéculations ne sont pas vaines; car il y a plusieurs choses dans la théorie des fluides qui ont rapport aux fonctions de quatre variables, dont il faut rechercher la nature par les équations différentielles du second degré.

Dans cette théorie l'équation  $\left(\frac{d d u}{d t^2}\right) = \left(\frac{d d u}{d x^2}\right) + \left(\frac{d d u}{d y^2}\right) + \left(\frac{d d u}{d z^2}\right)$  est de grande importance;

$x, y, z$  désignant trois coordonnées &  $t$  le tems écoulé. Si on demande la fonction de ces variables qui satisfasse à cette équation, l'intégrale complète doit renfermer deux fonctions arbitraires, qui contiennent chacune trois variables. On peut trouver une infinité de solutions particulières, comme si on supposoit  $u = F(ax + by + cz + ct)$ ; & alors on

doit avoir  $ee = aa + bb + cc$ , ce qui peut avoir lieu d'une infinité de manières; mais on n'a pas encore trouvé la solution générale. Il est évident aussi, qu'en joignant ensemble plusieurs de ces fonctions, leur somme satisfera à l'équation proposée.

277. PROBLEME. *u étant une fonction de trois variables  $x, y, z$  déterminer cette fonction par la valeur donnée d'une différentielle du premier degré égale à une fonction  $P$  de ces variables. Soit*

$\left(\frac{du}{dx}\right) = P$ . En regardant  $y$  &  $z$  comme constants, on aura  $du = P dx$  &  $u = SP dx + \text{constante}$ . Or cette constante doit être une fonction de  $y$  & de  $z$ , avec des constantes si l'on veut; donc  $u = SP dx + f(y \& z)$ . De même si l'on a  $\left(\frac{du}{dy}\right) = P$ , on aura  $u = S.P dy + f(x \& z)$ ; & si l'on a  $\left(\frac{du}{dz}\right) = P$ , l'on aura  $u = SP dz + f(x \& y)$ .

COROLLAIRE. Si  $\left(\frac{du}{dx}\right) = 0$ , ou si  $P = 0$ , on aura  $u = f(y \& z)$ ; si  $\left(\frac{du}{dy}\right) = 0$ , l'on aura  $u = f(x \& z)$ ; & si enfin  $\left(\frac{du}{dz}\right) = 0$ , on trouvera  $u = f(x \& y)$ .

278. PROBLEME. *u étant toujours une fonction de trois variables  $x, y, z$  dont une formule différentielle du second degré est supposée égale à une certaine fonction  $P$ , déterminer  $u$ . Soit 1°.  $\left(\frac{ddu}{dx^2}\right)$*

$= P$ , la première intégration donne  $\left(\frac{du}{dx}\right) = S.P dx + f(y \& z)$ , & en intégrant de nouveau, il vient  $u = S.d x S.P dx + x f(y \& z) + F(y \& z)$  : or dans la double intégration de  $S.d x S.P dx$ , on doit regarder  $x$  seul comme variable. L'intégration des formules  $\left(\frac{ddu}{dy^2}\right) = P$ ,  $\left(\frac{ddu}{dz^2}\right) = P$ , est entièrement semblable à la précédente. Pour ce qui regarde les autres formules différentielles du second degré, il suffira de résoudre celle-ci  $\left(\frac{ddu}{dx dy}\right) = P$ , qui étant d'abord intégrée, en considérant  $x$  seul comme variable, donne  $\left(\frac{du}{dy}\right) = S.P dx + f(y \& z)$ ; celle-ci étant intégrée dans la supposition de  $y$  seul variable, donne  $u = S.dy S.P dx + S.dy f(y \& z) + F(x \& z)$ ; où l'on peut observer 1°. que la première partie peut être représentée par  $S S P dx dy$ ; 2°. que dans  $S.dy f(y \& z)$ , si l'on intègre en regardant  $z$  comme constant, il résultera une fonction de  $y \& z$  qu'on peut représenter par  $f(y \& z)$ ; donc l'intégrale devient  $u = S S P dx dy + f(y \& z) + F(x \& z)$ .

Si la fonction  $P$  devient  $= 0$ , on aura les formules qu'on voit ici : si

$$\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) = 0, \text{ il vient } u = x f(y \& z) + F(y \& z).$$



$$\left(\frac{ddu}{dy^2}\right) = 0, \dots u = yf(x \& z) + F(x \& z).$$

$$\left(\frac{ddu}{dz^2}\right) = 0, \dots u = zf(x \& y) + F(x \& y).$$

$$\left(\frac{ddu}{dx dy}\right) = 0, \dots u = f(x \& z) + F(y \& z).$$

$$\left(\frac{ddu}{dx dz}\right) = 0, \dots u = f(x \& y) + F(y \& z).$$

$$\left(\frac{ddu}{dy dz}\right) = 0, \dots u = f(x \& y) + F(x \& z).$$

279. PROBLEME. *u étant une fonction de x, y, z, déterminer cette fonction lorsqu'une formule différentielle du troisieme degré est égale à une certaine fonction P de ces variables & de constantes. Soit*

$$1^o. \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right) = P, \text{ la premiere intégration donnera } \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) = SPdx + 2f(y \& z).$$

Nous ajoutons le nombre 2, afin qu'il n'y ait point de diviseur dans l'intégrale; & il est visible que cela est permis, parce que si  $f(y \& z)$  désigne une fonction de y & de z,  $2f(y \& z)$  désignera aussi une fonction de y & z. La seconde

intégration donne  $\left(\frac{du}{dx}\right) = SdxSPdx + 2xf(y \& z) + F(y \& z)$ . Enfin la troisieme

intégration donnera  $u = S dx S dx. SP dx + x x f(y \& z) + x F(y \& z) + M(y \& z)$ .

Soit 2°.  $\left(\frac{d^3 u}{dx^2 dy}\right) = P$ , les deux premières intégrations donneront  $\left(\frac{du}{dy}\right) = S dx. SP dx + x f(y \& z) + F(y \& z)$  (\*). Mais parce que à la place de  $S dy f(y \& z)$  l'on peut écrire  $f(y \& z) \& F(y \& z)$  au lieu de  $S dy F(y \& z)$ , la troisième intégration donnera  $u = SSS P dx^2 dy + x f(y \& z) + F(y \& z) + M(x \& z)$ .

En changeant les variables, toutes les formules du troisième degré, si on en excepte celle dont nous allons traiter dans un moment, sont contenues dans celles que nous venons de traiter.

Si  $\left(\frac{du^3}{dx dy dz}\right) = P$ , on aura d'abord en regardant  $x$  seul comme variable  $\left(\frac{d du}{dy dz}\right) S. P dx + f(y \& z)$ . Regardant maintenant  $y$  seul comme variable, il vient  $\left(\frac{du}{dz}\right) = S^2 P dx dy + f(y \& z) + F(x \& z)$ ; & enfin  $u = S^3 P dx dy dz + f(y \& z) + F(x \& z) + M(x \& y)$ .

COROLLAIRE. Si  $\left(\frac{d^3 u}{dx^3}\right) = 0$ , on aura  $u = x x f(y \& z) + x F(y \& z) + M(y \& z)$ .

(\*) Nous ne multiplions pas la première fonction par 2, parce que cela est inutile.

Si  $\left(\frac{d^3 u}{dx^2 dy}\right) = 0$ , on aura  $u = x f(y \& z)$   
 $+ F(y \& z) + M(x \& z)$ .

Si  $\left(\frac{d^3 u}{dx dy dz}\right) = 0$ , il vient  $u = f(y \& z)$   
 $+ F(x \& z) + M(x \& y)$ .

REMARQUE I<sup>e</sup>. Il est maintenant aisé de voir comment on peut continuer pour les degrés plus élevés.

REMARQUE II<sup>e</sup>. Si on avoit l'équation  $Au + B\left(\frac{du}{dx}\right) + C\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + \&c. = 0$ , on considéreroit  $y \& z$  qui entrent dans la fonction  $u$ , comme des constantes arbitraires qu'on doit ajouter en intégrant,  $\& u \& x$  comme variables : on ajouteroit donc autant de fonctions arbitraires de  $y \& z$ , telles que  $f(y \& z)$ ,  $F(y \& z)$ ,  $\&c.$  que le demanderoit l'ordre de l'équation  $\&$  le problème seroit résolu.

REMARQUE III<sup>e</sup>. Selon ce qu'on a dit ci-dessus (258), en substituant dans l'équation  $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$ ,  $u$  au lieu de  $z$ , on aura  $u = f(x + ay) + F(x - ay)$ . Mais parce que, selon ce qu'on a dit (n<sup>o</sup>. 254), l'équation  $\left(\frac{ddz}{dt du}\right) = 0$ , donne  $z = f(t) + F(u)$ , si à la place de  $z$  on substitue  $u$ ,  $\& dV$  à la place de  $du$ , on aura  $u = f(t) + F(V)$ , en supposant que  $u$  ne contient que deux variables  $t \& V$ ; mais si  $u$  contient encore  $z$ , on aura d'abord  $\left(\frac{du}{dt}\right)$

$= f(t \& z)$ ; donc  $du = dt f(t \& z)$ , &  $u = S dt f(t \& z) + F(V \& z)$ , qu'on peut représenter par  $z = f(t \& z) + F(V \& z)$ ; donc en supposant que  $t = x + ay$  &  $V = x - ay$ , on aura  $u = f(x + ay \& z) + F(x - ay \& z)$ .

REMARQUE IV<sup>e</sup>. A cause de  $du = p dx + q dy + r dz$ , si on suppose  $\left(\frac{du}{dx}\right) = q$ , on aura  $u = f(y \& z)$ ; car alors  $\left(\frac{du}{dx}\right) = p = 0$ , marque que la quantité  $x$  n'entre pas dans la fonction  $u$ ; si  $\left(\frac{du}{dy}\right) = 0$ , on aura  $u = f(x \& z)$ ; & si  $\left(\frac{du}{dz}\right) = 0$ , on aura  $u = f(x \& y)$ .

*Recherche des facteurs qui peuvent rendre les équations intégrables.*

280. Il seroit à souhaiter que l'on pût trouver pour chaque cas le facteur qui peut rendre intégrable une équation différentielle quelconque: quoique nous ayons déjà dit beaucoup de choses sur cette matière si intéressante, nous croyons devoir la traiter d'une autre manière.

La séparation des indéterminées ne donne pas toujours des intégrales algébriques que les facteurs peuvent donner. Par exemple, l'équation  $\frac{dx}{1+xx} + \frac{dz}{1+zz} = 0$ , qui est séparée, donne A. tang.  $x$

+ A tang.  $\zeta = C$  (\*) ; mais si l'on multiplie l'équation par  $\frac{(1+xx).(1+\zeta\zeta)}{(x+\zeta)^2}$ , le produit

$$\frac{dx.(1+\zeta\zeta) + d\zeta(1+xx)}{(x+\zeta)^2} = 0, \text{ donne en in-}$$

tégrant,  $\frac{-1+x\zeta}{x+\zeta} = C$ . En multipliant l'équation

$$\frac{2dx}{1+xx} + \frac{d\zeta}{1+\zeta\zeta} = 0, \text{ par } \frac{(xx+1)^2.(1+\zeta\zeta)}{(2x\zeta+xx-1)^2}, \text{ pour}$$

$$\text{avoir } \frac{2dx(1+xx).(1+\zeta\zeta) + d\zeta(xx+1)^2}{(2x\zeta+xx-1)^2}$$

$$= 0, \text{ on aura l'intégrale } \frac{xx\zeta - 2x - \zeta}{2x\zeta + xx - 1} = C.$$

On peut remarquer que, connoissant l'intégrale complete d'une équation différentielle  $Pdx + Qdy = 0$ , l'on peut trouver le multiplicateur  $M$  qui l'a rendue intégrable. Car soit cette intégrale  $V = C$  constante,  $V$  sera une certaine fonction de  $x$  &  $y$ , & ayant différencié l'intégrale, on trouvera  $dV = 0$  ; mais  $dV$  doit être  $= M(Pdx + Qdy)$ , formule qui fera connoître  $M$ .

281. Soit, par exemple, l'équation différentielle  $\frac{mdx}{x} + \frac{ndy}{y} = 0$ , dont l'intégrale complete est

$$x^m y^n = C; \text{ donc } 0 = mx^{m-1}y^n dx + nx^m y^{n-1} dy$$

$$= x^m y^n \left( \frac{mdx}{x} + \frac{ndy}{y} \right), \text{ ce qui fait voir que le}$$

multiplicateur  $M$  est  $= x^m y^n$ . Soit l'équation  $\frac{dx}{1+xx}$

$$+ \frac{dy}{1+yy} = 0, \text{ dont l'intégrale complete est } 1 -$$

(\*) A est un arc de cercle dont la tangente est  $x$ , ou  $\zeta$ .

$xy = A(x + y)$ ,  $A$  étant une constante arbitraire ;

$$\text{donc } A = \frac{1 - xy}{x + y}, \text{ \& } 0 = \frac{-dx(1 + yy) - dy(1 + xx)}{(x + y)^2}$$

$$= \frac{(1 + xx) \cdot (1 + yy)}{(x + y)^2} \cdot \left( \frac{dx}{1 + xx} + \frac{dy}{1 + yy} \right) ;$$

$$\text{donc } M = \frac{(1 + xx) \cdot (1 + yy)}{(x + y)^2} . \text{ Soit l'équation}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(a + 2bx + cx^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(a + 2by + cy^2)}} = 0 ,$$

dont l'intégrale complete est  $AA(x - y)^2 - 2A(a + bx + by + cxy) + bb - ac = 0$ . On aura  $M = (b + cx)\sqrt{(a + 2by + cy^2)} + (b + cy)\sqrt{(a + 2bx + cx^2)}$ . De même connoissant l'intégrale complete  $0 = 2A + (AA - 1)(xx + yy) - 2(1 + AA)xy$

+  $2Axxyy$  (\*) de l'équation  $\frac{dy}{\sqrt{(1 + x^4)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1 + y^4)}} = 0$ , on pourra trouver le facteur qui rend cette dernière équation intégrable.

282. Remarquons encore que si  $S.M(Pdx + Qdy)$  est  $= V$ , à cause que  $dV$  étant multiplié par une fonction quelconque de  $V$ , l'équation  $f(V)dV = 0$ , reste toujours intégrable, au lieu de  $M$  on pourra employer  $Mf(V)$ ; de sorte qu'étant donné un multiplicateur qui rend une équation différentielle intégrable, on pourra en trouver une infinité d'autres qui la rendront intégrable, & parmi lesquels il sera bon de choisir celui qui rend la chose plus facile & qui donne une intégrale algébrique, sous la forme la plus simple. Or quoique l'intégrale d'une équation différentielle puisse être une quantité algébrique, il peut souvent se faire qu'on ne le soupçonne même pas à moins d'employer

(\*)  $A$  est la constante arbitraire introduite par l'intégration.

un multiplicateur convenable, comme il est facile de le conclure des exemples qu'on vient de rapporter.

283. SOIT une équation différentielle de cette forme  $\frac{dx}{X} + \frac{dy}{Y} = 0$ , dans laquelle  $X$  est supposé une fonction de  $x$  sans  $y$ , &  $Y$  une fonction de  $y$  sans  $x$ , & soit supposé le multiplicateur qui rend cette équation intégrable

$= M = \frac{XY}{(a+bx+cy)^2}$ , afin d'avoir l'équation intégrable  $\frac{Ydx + Xdy}{(a+bx+cy)^2} = 0$ . Regardant  $y$  comme con-

stant, on aura l'intégrale  $= \frac{-Y}{b(a+bx+cy)} + f(y)$ ;

mais en intégrant dans la supposition de  $x$  constant,

il vient  $\frac{-X}{c(a+bx+cy)} + F(x)$ . Or ces deux inté-

grales devant évidemment être égales, on aura  $-cY + bc(a+bx+cy)f(y) = -bX + bc(a+bx+cy).F(x)$ , ou  $bX - cY = bc(a+bx+cy).[F(x) - f(y)]$ ; ce qui fait voir que les fonctions  $F(x)$  &  $f(y)$  sont telles, qu'après avoir développé le second membre de l'équation qu'on vient de trouver, les termes qui contiendront en même-tems  $x$  &  $y$  doivent se détruire mutuellement. Cela fait comprendre que  $F(x) = m_bx + \text{constante}$  &  $f(y) = mc_y + \text{constante}$ .

Supposons donc  $F(x) - f(y) = m_bx - mc_y + n$ , l'on aura  $bX - cY = bc(m_bbx - mc_cyy + nbx + nc_y + ma_bx - mac_y + na + g - g)$ ; donc en égalant à  $bX$  tous les termes affectés de  $x$ , ajoutant à ces termes  $g + \frac{na}{2}$ ; égalant à  $-cY$  tous les ter-

mes affectés de  $y$ , ajoutant à ces termes  $-g + \frac{1}{2}na$  &

faisant les opérations ordinaires, l'on aura  $X = c(m_bbx +$

$+b(ma+n)x+g+\frac{na}{2}$ ). L'on aura aussi  $Y=b\left(mcy+y+\frac{na}{2}\right)$  ; donc l'équation intégrale algébrique sera  $mcy - \left(\frac{mcy - c(ma-n)y - g + \frac{1}{2}na}{a+bx+cy}\right) = C$  ; & en ôtant la fraction , réduisant , écrivant  $C + \frac{1}{2}n$  au lieu de  $C$  , transposant & réduisant encore , l'on aura l'intégrale complète & algébrique cherchée , exprimée par l'équation  $mby - \frac{1}{2}nbx + \frac{1}{2}ncy - g = C(a+bx+cy)$ .

284. SUPPOSONS maintenant que  $M$  est =  $\frac{XY}{(a+bx+cy+hxy)^2}$  , notre équation sera  $\frac{Xdy + Ydx}{(a+bx+cy+hxy)^2} = 0$  , dont l'intégration donne cette équation  $\frac{-Y}{(b+hy).(a+bx+cy+hxy)} + \frac{-X}{(c+hx).(a+bx+cy+hxy)} = F(x)$ .

Multipliant & divisant les fonctions arbitraires par  $(a+bx+cy+hxy)$  , effaçant ensuite le diviseur commun & transposant , il vient  $\frac{X}{c+hx} - \frac{Y}{b+hy} = (a+bx+cy+hxy).[F(x) - f(y)]$ . Maintenant j'observe qu'il ne doit rester à la fin aucun terme qui renferme en même-tems les deux variables : car autrement  $X$  &  $Y$  ne seroient pas tels qu'on les suppose dans le problème. Cela posé , je fais  $F(x) = \frac{mx+n}{c+hx}$  &  $f(y) = \frac{my+N}{b+hy}$  ; donc on aura



$$\frac{X}{c+hx} - \frac{Y}{b+hy} = \frac{ny+g}{+g} \frac{(a+bx)(mx+n)}{c+hx}$$

$$- \frac{Nx}{-g} \frac{(a+cy)(my+N)}{b+hy}. \text{ Donc } X = (a +$$

$$bx)(mx+n) - (c+hx)(Nx+g) \text{ \& } Y =$$

$$(a+cy)(my+N) - (b+hy)(ny+g); \text{ ou}$$

$$\text{bien on aura } X = (bm - hN)xx + (am + bn$$

$$- cN - hg)x + an - cg, Y = (cm - hn)yy +$$

$$(am + cN - bn - hg)y + aN - bg; \text{ \& l'intégrale de}$$

$$\text{l'équation sera } \frac{mx+n}{c+hx} - \frac{X}{(c+hx)(a+bx+cy+hy)}$$

$$= G, \text{ ou en substituant la valeur de } X,$$

$$\frac{mxy + ny + Nx + g}{a + bx + cy + hxy} = C \text{ constante.}$$

285. Si l'on veut savoir maintenant dans quel cas on pourra intégrer l'équation

$$\frac{p dx}{Axx + Bx + C} + \frac{q dy}{Dyy + Ey + G} = 0, \text{ on remarquera qu'en divi-}$$

sant le numérateur & le dénominateur de la première partie de l'équation par  $p$ , & en divisant de même le numérateur & le dénominateur de la seconde partie par  $q$ , on réduit cette équation à la forme ci-dessus; comparant ensuite les valeurs de  $X$  & de  $Y$ , trouvées ci-devant, avec celles que nous aurons ici, & en égalant les coefficients, des termes correspondans, il viendra  $A = p(bm - hN)$ ;  $B = p(am + bn - cN - hg)$ ;  $C = p(an - cg)$ ;  $D = q(cm - hn)$ ;  $E = q(am + cN - bn - hg)$ ;  $G = q(aN - bg)$ .

La première équation donne  $N = \frac{bm}{h} - \frac{A}{hp}$ ; la

quatrième donne  $n = \frac{cm}{h} - \frac{D}{hq}$ ; la seconde & la

cinquieme donnent  $g = \frac{am}{h} - \frac{Bq - Ep}{2hpq}$ ; &  $h = \frac{2Acq - 2Dbp}{Bq - Ep}$ ; donc par la troisieme & la fixieme on conclut  $\frac{2Cq(Acq - Dbp)}{Bq - Ep} = \frac{c}{2} \cdot (Bq + Ep) - Dap$ ; &  $\frac{2Gp(Acq - Dbp)}{Bq - Ep} = \frac{b}{2} \cdot (Bq + Ep) - Aaq$ . De-là en eliminant  $a$ , on conclut .....  $\frac{2(ACqq - DGpp)(Aqc - Dbp)}{Bq - Ep} = \frac{1}{2} (Aqc - Dbp) \cdot (Bq + Ep)$ . Divisant les deux membres de cette équation par  $Aqc - pDb$ , ôtant ensuite les fractions, il vient  $4(ACqq - DGpp) = BBqq - EEpp$ , ou  $\frac{4AC - BB}{pp} = \frac{4DG - EE}{qq}$ . Ainsi toutes les fois que le rapport des constantes  $p, q, A, B, C, D, E, G$  sera tel qu'il en résultera l'équation que nous venons de trouver, l'équation différentielle, dont on vient de parler, sera intégrable, en la multipliant par le facteur  $M$  de la forme dont il est ici question.

286. PASSONS maintenant à l'équation  $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$ , & soit supposé le multiplicateur qui peut la rendre intégrable  $= M = p\sqrt{X} + q\sqrt{Y}$ ; de manière que l'équation  $pdx + qdy + \frac{qdx\sqrt{Y}}{\sqrt{X}} + \frac{pdy\sqrt{X}}{\sqrt{Y}} = 0$ , soit intégrable. Supposons que les deux membres, celui qui ne renferme aucun radical, & celui qui est affecté de radicaux soient intégrables chacun séparément; donc pour le premier membre on aura  $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$ . Je suppose ensuite que l'intégrale du second membre est  $= 2V\sqrt{XY}$ . Différenciant cette

quantité, en faisant varier  $x$ , & l'égalant ensuite à  $\frac{q dx \sqrt{Y}}{\sqrt{X}}$ , on trouvera  $q = 2X \left( \frac{dV}{dx} \right) + V \frac{dX}{dx}$ ; différenciant la même quantité, en faisant varier  $y$ , & égalant la différentielle à  $\frac{p dy \sqrt{X}}{\sqrt{Y}}$ , on trouvera

$$p = 2Y \left( \frac{dV}{dy} \right) + V \frac{dY}{dy}. \text{ Si l'on différencie les valeurs de } p \text{ \& de } q, \text{ \& qu'on substitue les résultats dans l'équation } \left( \frac{dp}{dy} \right) = \left( \frac{dq}{dx} \right), \text{ on aura } 2Y \left( \frac{d^2 V}{dy^2} \right) + 3 \frac{dY}{dy} \left( \frac{dV}{dy} \right) + V \frac{d^2 Y}{dy^2} = 2X \left( \frac{d^2 V}{dx^2} \right) + 3 \frac{dX}{dx} \times \left( \frac{dV}{dx} \right) + V \frac{d^2 X}{dx^2} \text{ (A).}$$

Maintenant par la nature de la fonction de  $x$  &  $y$  à laquelle on égalera  $V$ , on tâchera de déterminer les valeurs convenables de  $X$  & de  $Y$ .

Supposons  $V = 1$ , dans ce cas très-simple toutes les différentielles de  $V$ , indiquées dans l'équation

$$A, \text{ s'évanouiront, \& l'on aura } \frac{d^2 Y}{dy^2} = \frac{d^2 X}{dx^2},$$

égalité qui ne peut subsister qu'autant que l'un & l'autre membre seroit égal, séparément, à une constante que je ferai  $= 2a$ ; d'où je conclus que  $X = axx + bx + c$ ,

$$\text{\& } Y = ayy + gy + e, \text{ \& de-là } p = \frac{dY}{dy} = 2ay$$

$$+ g, \text{ \& } q = \frac{dX}{dx} = 2ax + b; \text{ donc l'intégrale com-}$$

$$\text{plette est } 2axy + gx + by + 2\sqrt{XY} = C \text{ constante.}$$

Ainsi l'équation  $\frac{dx}{\sqrt{axx+bx+c}} + \frac{dy}{\sqrt{ayy+gy+e}} = 0$  est rendue intégrable par le moyen du multiplicateur  $M = (2ay + g)\sqrt{axx+bx+c} + (2ax + b)\sqrt{ayy+gy+e}$ ; & alors son intégrale complète

est  $2axy + gx + by + 2V[(axx + bx + c)(ayy + gy + e)] = C$ , ou en ôtant le radical,  $CC - 2C(2axy + gx + by) = (4ae - gg)xx + (4ac - bb)yy + 4bex + 4cgy + 4ce$ .

En donnant d'autres valeurs à  $V$ , en faisant  $V = \frac{1}{(a + bx + cy)^2}$ , par exemple, cette supposition donneroit d'autres valeurs pour  $X$  &  $Y$ , mais nous ne proposons pas d'épuiser cette matiere.

287. REVENONS à l'équation différentielle  $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$  & faisons le multiplicateur  $M = p + q\sqrt{XY}$ , afin d'avoir l'équation intégrable  $\frac{pdx}{\sqrt{X}} + qdy\sqrt{X} + \frac{pdy}{\sqrt{Y}} + qdx\sqrt{Y} = 0$  (A). Supposons que les deux premiers termes pris ensemble forment une formule intégrable, dont l'intégrale soit  $= 2R\sqrt{X}$ , tandis que les termes restans formeront une formule dont l'intégrale soit  $= 2m\sqrt{Y}$ ; de maniere que l'intégrale complete soit représentée par l'équation  $2R\sqrt{X} + 2m\sqrt{Y} = G$ . Différenciant la premiere intégrale, & égalant au premier terme  $\frac{pdx}{\sqrt{X}}$  les termes affectés de  $dx$ , & à  $qdy\sqrt{Y}$  le terme affecté de  $dy$ , on trouvera aisément  $p = \frac{RdX}{dx} + 2X\left(\frac{dR}{dx}\right)$ ;  $q = 2\left(\frac{dR}{dy}\right)$ . Comparant la différentielle de la seconde intégrale avec les deux derniers termes de l'équation (A), on aura  $p = m\frac{dY}{dy} + 2Y\left(\frac{dm}{dy}\right)$

$2Y \left( \frac{dm}{dy} \right)$ . Il n'est pas non plus difficile de voir que  $q$  est  $= 2 \left( \frac{dm}{dx} \right)$ ; donc  $\left( \frac{dR}{dy} \right) = \left( \frac{dm}{dx} \right)$ ; donc la formule  $R dx + m dy$  sera intégrable; mais il n'est pas nécessaire que son intégrale soit algébrique. Il n'est pas besoin d'avertir que les deux valeurs de  $p$  qu'on vient de trouver, doivent être égales.

Prenons  $R = \frac{y}{a + bxy + cxyy}$  &  $m = \frac{x}{a + bxy + cxyy}$ , nous aurons  $q = \frac{2a - 2cxyy}{(a + bxy + cxyy)^2}$  &  $p = \frac{y dX}{dx(a + bxy + cxyy)} - \frac{2Xyy(b + 2cxy)}{(a + bxy + cxyy)^2}$ ; on a aussi  $p = \frac{x dY}{dy(a + bxy + cxyy)} - \frac{2Yxx(b + 2cxy)}{(a + bxy + cxyy)^2}$ .  
 Donc on aura  $(a + bxy + cxyy)^2 \cdot p = \frac{y dX}{dx} \cdot (a + bxy + cxyy) - 2yyX \cdot (b + 2cxy)$   
 $= \frac{x dY}{dy} \cdot (a + bxy + cxyy) - 2xxY(b + 2cxy)$ , équation que j'appellerai (H).

Supposons  $X = Ax^4 + 2Bx^3 + Cx^2 + 2Dx + E$ , &  $Y = A'y^4 + 2B'y^3 + C'y^2 + 2D'y + E'$ ; en substituant dans l'équation (H) les valeurs de  $X$ ,  $dX$ ,  $Y$ ,  $dY$ , que donnent ces suppositions, on verra qu'elle ne peut avoir lieu qu'autant que  $b=0$ ;  $B=0$ ;  $B'=0$ ;  $D=0$ ;  $D'=0$  (\*);

(\*) Car après avoir égalé les termes qui contiennent les mêmes puissances de  $x$  & de  $y$ , dans les deux membres de l'équation, il restera d'un côté  $2D'ay$  & de l'autre côté le terme  $2D'ax$ , qu'on ne peut supposer

& alors on a  $-2cCx^3y^3 + 4aAx^3y - 4cExy^3 + 2aCxy = -2cC'x^3y^3 + 4aA'xy^3 - 4cE'x^3y + 2aC'xy$ . Egalant les termes qui contiennent les mêmes variables avec les mêmes exposans, nous

aurons  $C = C'$ ;  $\frac{a}{c} = \frac{-E'}{A} = \frac{-E}{A'}$ , ce qui donne

$A'E' = AE$ ; on aura encore  $E' = \frac{-a}{c} \cdot A$  &  $E =$

$\frac{-a}{c} \cdot A'$ . On aura donc  $X = Ax^4 + Cxx - \frac{aA'}{c}$ ;

$Y = A'y^4 + Cyy - \frac{aA}{c}$ ; & l'intégrale com-

plette de l'équation  $\frac{dx}{\sqrt{(Ax^4 + Cx^2 - \frac{a}{c}A')}} +$

$+\frac{dy}{\sqrt{(A'y^4 + Cyy - \frac{a}{c}A)}} = 0$ , sera

$y\sqrt{(Ax^4 + Cxx - \frac{a}{c}A')} + x\sqrt{(A'y^4 + Cyy - \frac{a}{c}A)} = G. (a + cxxyy)$ ; G étant une constante introduite par l'intégration.

288. Par les exemples qu'on vient de rapporter, il est évident qu'on peut trouver une infinité de multiplicateurs qui rendent une équation intégrable, & cela en supposant que le multiplicateur qu'on a employé a

égaux dans tous les cas qu'en faisant  $D = D' = 0$ ; puisque  $a$  est supposé réel. Il restera encore d'un côté  $6Bayx^2$ , & de l'autre côté  $6B'ax^2y$  qui exigent que l'on ait  $B = B' = 0$ . Il restera aussi d'un côté  $-2yybE$  &  $-2xxbE'$  de l'autre qui demandent que  $b$  soit  $= 0$ ; car  $E$  &  $E'$  sont supposés réels.

les conditions requises. On peut aussi trouver une infinité d'équations intégrables, en supposant, qu'après avoir multiplié une équation différentielle par un multiplicateur qu'on supposera convenable, son intégrale est trouvée & exprimée analytiquement; mais il seroit à souhaiter qu'on inventât les règles d'une espece de nouvelle analyse, pour faire ces sortes d'opérations dans un certain ordre.

*Méthode pour trouver dans une infinité de cas l'intégrale finie d'une équation quelconque, par une seule intégration.*

289. LA méthode d'intégrer, dont il s'agit ici, est fondée sur le théorème suivant : Une équation différentielle se réduit, par l'intégration, à autant d'équations différentielles d'un ordre immédiatement inférieur, que l'ordre de cette équation contient d'unités; c'est-à-dire que,  $m$  désignant un nombre entier positif, une équation différentielle de l'ordre  $m$  se réduira, par l'intégration, à un nombre  $m$  d'équations de l'ordre  $m - 1$ . Ce théorème suit évidemment de ce que nous avons dit ci-dessus (208). Toutes les fois que ces équations sont différentes entr'elles, on peut, en les comparant, trouver l'intégrable finie de la proposée. Si quelques-unes sont les mêmes, on ne peut pas alors, par une seule intégration, parvenir à l'intégrale finie cherchée. Les problèmes suivans feront connoître l'artifice & l'utilité de cette méthode.

290. PROBLÈME. Intégrer l'équation du second ordre :  $a^2 y d d y + b a^2 d y^2 = y^2 d x^2$ . Supposons que l'intégrale de cette équation est  $a y^p d y$

K 2

$+ ny^r dx = A N^{\frac{mx}{a}} dx$ ,  $N$  étant supposée le nombre dont le logarithme hyperbolique est  $= 1$  (dans tout ce que nous dirons sur la méthode actuelle  $N$  aura la même valeur),  $p$ ,  $n$ ,  $r$ ,  $m$  étant des constantes qu'il s'agit de déterminer. La différentielle de l'intégrale supposée est  $ay^p ddy + pay^{p-1} dy^2 + nry^{r-1} dy dx = \frac{m}{a} \cdot A \cdot N^{\frac{mx}{a}} dx^2 = my^p dy dx + \frac{mn}{a} y^r dx$ ,

à cause de  $A N^{\frac{mx}{a}} dx = ay^p dy + ny^r dx$ ; donc en multipliant par  $ay^{1-p}$  (\*) & transposant, on aura  $a^2 y ddy + pa^2 dy^2 + nray^{r-p} dy dx - amy dy dx = mny^{r-p+1} dx^2$ . Comparant maintenant ce résultat avec l'équation proposée, on trouve  $a^2 y ddy = a^2 y ddy$ , ce qui ne fait rien connoître. On a encore  $pa^2 dy^2 = ba^2 dy^2$ , d'où l'on tire  $p = b$ ; & parce que la proposée ne contient aucun terme qui renferme  $dy dx$ , & que d'ailleurs  $r - p$  est  $= 1$ , comme on va le faire voir, on a  $nra - am = 0$ , ou  $nr = m$ . Mais à cause de  $mny^{r-p+1} = y^2$ , on doit avoir  $r - p + 1 = 2$ ,  $r - p = 1$ , ou  $r = p + 1 = b + 1$ ,  $mn = 1$  &  $n = \frac{1}{m}$ ;

donc  $nr = \frac{r}{m}$ . De plus à cause de  $r = b + 1$  l'équation  $nr = m$  donnera  $b + 1 = m^2$  & par conséquent  $m = \pm \sqrt{b + 1}$ ; mais  $n = \frac{1}{m}$ ;

(\*) On fait cette multiplication, afin que le premier terme de la nouvelle équation, qu'on va trouver, soit égal au premier terme de la proposée. On suppose aussi  $dx$  constant.



donc  $n = \frac{1}{\pm \sqrt{b+1}}$ . Substituant successive-  
ment les deux valeurs de  $m$  & de  $n$  dans l'intégrale  
supposée ci-dessus, nous aurons deux équations  
différentielles du premier degré, savoir,  $a y^b dy$

$$+ \frac{1}{\sqrt{b+1}} \cdot y^{b+1} dx = A.N \frac{x\sqrt{b+1}}{a} dx,$$

$$\& a y^b dy - \frac{1}{\sqrt{b+1}} \cdot y^{b+1} dx =$$

$$- x\sqrt{b+1}$$

B.N  $\frac{a}{a} dx$ . Nous avons mis une  
nouvelle constante B dans la dernière équation,  
afin que l'intégrale finie puisse renfermer deux  
constantes arbitraires. Retranchant la dernière de  
ces équations de la première, multipliant par  
 $\sqrt{b+1}$ , divisant par  $2 dx$  & disposant  
convenablement le résultat, il viendra  $y^{b+1} =$

$$\frac{\sqrt{b+1}}{2} \cdot \left( A.N \frac{x\sqrt{b+1}}{a} - B.N \frac{-x\sqrt{b+1}}{a} \right),$$

$$\text{ou } y^{b+1} = C.N \frac{x\sqrt{b+1}}{a} - D.N \frac{-x\sqrt{b+1}}{a}$$

$$\text{en faisant } \frac{\sqrt{b+1}}{2} \cdot A = C \& \frac{B \cdot \sqrt{b+1}}{2} = D,$$

Si  $b$  est une quantité négative  $= -g - 1$ ,

$$\text{on aura } y^{b+1} = y^{-g} = C \left( \cos. \frac{x\sqrt{g}}{a} + \right.$$

$$\left. \sqrt{-1} \cdot \sin. \frac{x\sqrt{g}}{a} \right) - D \left( \cos. \frac{x\sqrt{g}}{a} - \right.$$

$\sqrt{(-1) \cdot \sin. \frac{x \sqrt{g}}{a}} (*) = E. \cos. \frac{x \sqrt{g}}{a} +$   
 $F. \sin. \frac{x \sqrt{g}}{a}$ , en faisant  $C - D = E$  &  $(C + D) \times$

$\sqrt{-1} = F$ . Si  $b$  est  $= -1$ , on aura  $\frac{1}{\sqrt{(b+1)}}$   
 $= \infty$ . Dans ce cas on supposera que l'intégrale  
 de la proposée est  $\frac{dy}{y} = \frac{(x+f)}{a^2} dx$ ,  $f$  étant  
 une constante arbitraire; & en intégrant de nou-

veau, on aura  $cy = N \frac{(xx + 2fx)}{2aa}$ ,  $c$  étant  
 une constante arbitraire.

291. PROBLÈME. Intégrer l'équation  $yx^2 ddy + bx^2 dy^2 + cyx dx dy = ay^2 dx^2$ . Supposons que l'intégrale cherchée est de cette forme  $y^p dy + ny^q x^r dx = Ax^s dx$ ; prenant la différentielle de cette intégrale, la multipliant par  $y^{1-p} x^{1-r}$ , remettant la valeur de  $Ax^s dx$  & disposant convenablement les termes, il vient  $yx^{1-r} ddy + px^{1-r} dy^2 + nqy^{q-p} x dy dx - tyx^{1-r} dy dx = (t-r)ny^{q-p+1} dx^2$ . Si l'on compare cette équation avec la proposée, on aura  $r = -1$ ,  $p = b$ ,  $q - p = 1$ , ou  $q = b + 1$ ,  $nq - t = c$  &  $n(b+1) = c + t$ . On a aussi  $n(t-r) = nt + n = a$ , & par conséquent  $(t+1) \cdot (t+c) = a \cdot (b+1)$ , d'où l'on tire  $t = -\frac{(c+1)}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{(c-1)^2}{4} + a \cdot (b+1)\right]}$  &

(\*) Voyez la première partie de cet Ouvrage courbes transcendentes (n<sup>o</sup>. 2.)

$$n = \frac{c-1 \pm 2 \sqrt{\left[ \frac{(c-1)^2}{4} + a(b+1) \right]}}{2(b+1)}. \text{ Donc}$$

$$\text{en faisant } f = 2 \sqrt{\left[ \frac{(c-1)^2}{4} + a(b+1) \right]},$$

$$\text{on aura } t = \frac{-(c+1) \pm f}{2} \text{ \& } n = \frac{c-1 \pm f}{2(b+1)}.$$

Ayant donc substitué les valeurs de  $p, n, q, r, t$ , il viendra deux équations du premier degré, savoir,  $y^b dy + \frac{c-1+f}{2(b+1)} y^{b+1} x^{-1} dx$

$$= A. x^{\frac{-(c+1)+f}{2}} dx, \text{ \& } y^b dy + \frac{c-1-f}{2(b+1)} y^{b+1} x^{-1} dx = B. x^{\frac{-(c+1)-f}{2}} dx.$$

$$\text{Retranchant la seconde de la première, multipliant par } x \text{ \& par } \frac{b+1}{f}, \text{ faisant } C = \frac{A(b+1)}{f}, D = \frac{B(b+1)}{f} \text{ \& disposant convenablement les termes, on trouvera } y^{b+1} =$$

$$x^{\frac{1-c}{2}} \left[ C x^{\frac{1}{4} \sqrt{\left( \frac{(c-1)^2}{4} + a(b+1) \right)}} + \sqrt{\left( \frac{(c-1)^2}{4} + a(b+1) \right)} \right]$$

$$- D x^{\frac{1}{4} \sqrt{\left( \frac{(c-1)^2}{4} + a(b+1) \right)}}, \text{ équation}$$

que je désignerai par (P). Lorsque  $f = 0$ , les deux équations du premier degré que nous avons trouvées ci-devant, ne différant que par les constantes A & B, ne peuvent rien faire connoître.

Dans ce cas on multipliera la première de ces équations par  $x^{\frac{c+1}{2}}$  & l'intégrant ensuite, en

ajoutant une constante, on trouvera  $\frac{y^{b+1}}{b+1} x^{\frac{c-1}{2}}$   
 $= A x. + B$ . Si  $f$  est une quantité imagi-  
 naire  $= p \sqrt{-1}$  & qu'on fasse  $x =$   
 $N^2$ , dans ce cas l'intégrale  $P$  devient  $y^{b+1}$

$$= x^{\frac{1-c}{2}} \left( C N^{2p\sqrt{-1}} - D N^{-2p\sqrt{-1}} \right)$$

équation qui se change en celle-ci  $y^{b+1} x^{\frac{c-1}{2}}$   
 $= C (\cos. p\sqrt{-1} \cdot \sin. p\sqrt{-1}) - D (\cos. p\sqrt{-1} \cdot$   
 $\sqrt{-1} \cdot \sin. p\sqrt{-1})$  (\*). D'où, en faisant  $C - D =$

$E \& (C+D) \sqrt{-1} = F$ , on tire  $y^{b+1} x^{\frac{c-1}{2}}$   
 $= E \cos. p\sqrt{-1} + F \sin. p\sqrt{-1} = E \cos. pL. x +$   
 $F \sin. pL. x$ ; car de l'équation  $x = N^2$  on  
 tire  $\sqrt{-1} L. N = L. x$ , ou  $\sqrt{-1} = L. x$ , à cause de  
 $L. N = 1$ .

292. PROBLEME. Intégrer l'équation du troisieme  
 degré  $d^3 y + a dy ddy = b dy^3$ . Supposons que  
 l'intégrale cherchée est  $N^m (ddy + q dy^2) =$   
 $A dx^2$ ; prenant la différentielle de cette intégrale  
 (& faisant attention qu'à cause de  $dx$  constant, la  
 différentielle du second membre est  $= 0$ ), di-  
 visant ensuite par  $N^m$ , il viendra  $d^3 y + (2q$   
 $+ m) dy ddy + m q dy^3 = 0$ , transposant le  
 dernier terme de cette équation, & la compa-  
 rant ensuite avec la proposée, on trouve  $a = 2q$   
 $+ m$  &  $-mq = b$ ; donc  $ma = 2mq + mm$   
 $= -2b + mm$ , ou  $mm - ma = 2b$  &  $m$   
 $= \frac{a + \sqrt{a^2 + 8b}}{2} = \frac{a + g}{2}$  &  $q = \frac{a - g}{4}$ , en

(\*) Voyez la premiere partie de cet Ouvrage, courbes  
 transcendentes (n°. 2).

faisant  $\sqrt{a^2 + 8b} = g$ . Cela posé, on aura les deux équations suivantes du second degré

$$ddy + \frac{a+g}{4} dy^2 = A.N \frac{(g-a).y}{2} dx^2 \text{ \& }$$

$$ddy + \frac{a-g}{4} dy^2 = B.N \frac{-(g+a).y}{2} dx^2,$$

d'où, en ôtant la seconde de la première, il est aisé

$$\text{de tirer } \frac{g dy^2}{2} = N \frac{-ay}{2} dx^2. \left( A.N \frac{gy}{2} - \right.$$

$$\left. B.N \frac{-gy}{2} \right), \text{ équation que nous désignerons par } P, \text{ \& qu'il est facile de réduire au premier degré}$$

par l'extraction des racines. En faisant  $\sqrt{\frac{g}{2}}$

$$= c, \sqrt{\left[ N \frac{-ay}{2} \left( A.N \frac{gy}{2} - B.N \frac{-gy}{2} \right) \right]}$$

$$= p, \text{ on aura } c dy = p dx \text{ \& } \frac{c dy}{p} = dx,$$

équation séparée, puisque  $p$  est une fonction de  $y$  \& que  $c$  est une constante.

Si  $g = 0$ , ce qui arrive lorsque  $aa = -8b$  (par exemple, si  $a$  est  $= 4$  \&  $b = -2$ ), on multipliera la première des équations du second degré trouvées ci-dessus par  $2 dy$  \& la divisant

$$\text{par } N \frac{-ay}{2}, \text{ il viendra } N \frac{ay}{2} \left( 2 dy ddy + \right.$$

$$\left. \frac{a}{2} dy^2 \right) = 2 A dy dx^2, \text{ dont l'intégrale est}$$

$$N \frac{ay}{2} dy^2 = (2 Ay + D) dx^2. \text{ Si l'on prend}$$

- la valeur de  $dy^2$  dans cette dernière équation & qu'on l'égalé à la valeur de  $dy^2$  prise dans l'équation P, qu'on divise ensuite par  $dx^2$ , on aura une équation qui contiendra l'intégrale finie de la proposée.

Si  $g$  est imaginaire &  $= n\sqrt{-1}$ , alors de l'équation P on tirera aisément  $N \frac{dy}{2} dy^2 = \frac{2dx^2}{n\sqrt{-1}} \left[ A. \left( \cos. \frac{ny}{2} + \sqrt{-1} \sin. \frac{ny}{2} \right) - B \left( \cos. \frac{ny}{2} - \sqrt{-1} \sin. \frac{ny}{2} \right) \right] = dx^2 \left( E \times \cos. \frac{ny}{2} + F. \sin. \frac{ny}{2} \right)$ , en faisant  $E = \frac{2(A-B)}{n\sqrt{-1}}$  &  $F = \frac{2(A+B)}{n}$ . Il sera donc facile de parvenir à une équation du premier degré dans laquelle les variables seront séparées.

293. REMARQUE I. Ce qu'on vient de dire a également lieu pour l'équation  $y^2 d^3y + ay dy ddy = b dy^3$  (A): car en faisant  $y = N^2$ , & prenant les valeurs de  $y, dy, ddy, d^3y$ , que donne cette supposition, divisant ensuite par  $N^2$  & substituant, l'équation A deviendra  $d^3z + (a+3) dz d dz = (b-a-1) dz^3$  qui a la même forme que celle dont on vient de parler.

294. REMARQUE II. La difficulté de cette méthode consiste à trouver la forme qu'on doit donner à l'intégrale de la différentielle proposée pour que cette intégrale, étant différenciée, on puisse trouver un résultat, qui étant comparé à la proposée, fasse connoître les exposans & les coefficients de cette intégrale: or pour cela je

ne crois pas qu'on ait encore trouvé de méthode générale; ce n'est guere que l'habitude du calcul, ou le hasard qui peut faire rencontrer juste.

295. ON peut employer la même méthode lorsqu'il s'agit de trouver les conditions nécessaires pour qu'une équation d'un ordre supérieur puisse être abaissée à un ordre du moins inférieur d'une unité.

296. PROBLEME. Dans quel cas l'équation  $d^4y + a dy d^3y + b ddy^2 + c dy^2 ddy = f dy^4$  peut être abaissée d'un degré? Soit supposée  $N^m, (d^3y + p dy ddy + q dy^3) = A dx^3$ , l'intégrale de la proposée. Ayant pris la différentielle de cette intégrale supposée & l'ayant divisée par  $N^m$ , on trouvera aisément  $d^4y + (m + p) dy d^3y + p ddy^2 + (mp + 3q) \times dy^2 ddy = -mq dy^4$ . En comparant cette équation avec la proposée, l'on aura  $a = m + p$ ,  $b = p$ ,  $c = 3q + mp$  &  $f = -mq$ ; d'où l'on tire les deux équations  $m = a - b$  &  $m^2 b = mc + 3f$ . Si dans cette dernière équation on substitue la valeur de  $m$  prise dans l'avant-dernière, il viendra  $(a - b)^2 \cdot b = (a - b) \cdot c + 3f$ . Si cette condition a lieu, la proposée pourra se réduire à l'équation du troi-

sième degré  $N^{(a-b)y} (d^3y + b dy ddy + \frac{f}{b-a} dy^3) = A dx^3$ .

297. PROBLEME. Trouver dans quel cas l'équation générale  $a^n d^n y + b a^{n-1} d^{n-1} y dx + a^{n-2} d^{n-2} y dx^2 \dots + R y dx^n = p dx^n$ ,  $p$  étant une fonction de  $x$  sans  $y$  &  $dx$  étant

supposé constant, peut se réduire à autant d'équations de l'ordre  $n - 1$  que le nombre  $n$  contient d'unités. Supposons que l'intégrale de la proposée est de cette forme  $a^n d^{n-1}y + a' a^{n-1} d^{n-2}y dx + b' a^{n-2} d^{n-3}y dx^2 + \dots + H a y dx^{n-1}$

$$= \zeta dx^{n-1}, \text{ \& soit supposée } \zeta = u \left( S. \frac{p dx}{u} + A \right);$$

$u$  étant une fonction de  $x$  sans  $y$  &  $A$  une constante. En différenciant cette intégrale supposée, nous aurons  $a^n d^n y + a'. a^{n-1} d^{n-1}y dx + b'. a^{n-2} d^{n-2}y dx^2 + \dots + H a dy dx^{n-1}$

$$= du dx^{n-1} \left( S. \frac{p dx}{u} + A \right) + p dx^n. \text{ Mais}$$

$$du. dx^{n-1} \left( S. \frac{p dx}{u} + A \right) = \frac{du}{u} \cdot dx^{n-1} u \times$$

$$\left( S. \frac{p dx}{u} + A \right) = \frac{du}{u} \cdot \zeta dx^{n-1}. \text{ Donc en}$$

$$\text{transposant la quantité du } dx^{n-1} \left( S. \frac{p dx}{u} + A \right),$$

lui substituant ensuite la valeur que nous venons de trouver, & mettant dans cette valeur celle de  $\zeta dx^{n-1}$  prise de l'intégrale supposée, on aura  $a^n d^n y + a'. a^{n-1} d^{n-1}y dx + b'. a^{n-2} d^{n-2}y dx^2 + \dots + H a dy dx^{n-1} =$

$$\frac{du}{u} (a^n d^{n-1}y + a'. a^{n-1} d^{n-2}y dx + b'. a^{n-2} d^{n-3}y dx^2 + \dots + H a y dx^{n-1}) = p dx^n.$$

Si l'on compare maintenant cette équation avec la proposée, on trouvera facilement  $a' dx$

$$= \frac{a du}{u} = b dx, \text{ en égalant les quantités qui}$$



multiplie  $d^{n-1}y$  dans les deux équations ;  
donc  $(a' - b) dx = \frac{a du}{u}$ , ou  $m dx = \frac{a du}{u}$   
( en supposant  $m = a' - b$  ) ; donc  $m x = a L. u$ ,  
ou  $m x L. N = a. L. u$ , ou  $\frac{m x}{a} \cdot L. N = L. u$  ; ou

$$u = N^{\frac{m x}{a}} ; \text{ donc } z = N^{\frac{m x}{a}} \left( S. N^{\frac{-m x}{a}} p dx + A \right).$$

Puisque  $m = a' - b$ , on a  $a' = m + b$ . En continuant la comparaison on trouve  $b' = c + a' (a' - b) = m^2 + m b + c$  &  $H = m^{n-1} + b m^{n-2} + c m^{n-3} \dots + F m + G$ . Et parce que  $R + H (a' - b)$  est  $= H m + R = 0$  ; si l'on substitue la valeur de  $H$ , on aura  $m^n + b m^{n-1} + c m^{n-2} \dots + G m + R = 0$  (V).

Supposant que par le moyen de cette équation on connoisse toutes les valeurs de  $m$ , on aura aisément celles de  $a'$ ,  $b'$  .....  $H$  qui feront connoître l'intégrale supposée. De plus, toutes les fois que les valeurs de  $m$ , que donne l'équation V seront toutes inégales, on pourra trouver autant d'équations de l'ordre  $n - 1$  que  $n$  contient d'unités, ainsi le problème est résolu.

298. MAIS pour ne laisser aucun embarras aux commençans, supposons que la proposée soit du quatrième ordre, & que les valeurs de  $m$  que donne alors l'équation V soient  $e, f, g, i$ . Si l'on substitue successivement ces valeurs à la place de  $m$ , & qu'on fasse attention que dans une équation le coefficient du second terme doit être égal à la somme des racines prises avec un signe contraire, que celui du troisième doit être égal à la somme des produits des racines prises deux

à deux , &c. & que pour plus de commodité on fasse  $N \frac{e^x}{a} \left( A + S. N \frac{-e^x}{a} p dx \right) = Q$ ,  $N \frac{f^x}{a} \left( B + S. N \frac{-f^x}{a} p dx \right) = R$ ,  $N \frac{g^x}{a} \times \left( C + S. \frac{-g^x}{a} p dx \right) = R'$  &  $N \frac{i^x}{a} \left( D + S. N \frac{-i^x}{a} p dx \right) = T$ , on aura les quatre équations suivantes du troisième ordre :

$$a^4 d^3 y - (f + g + i) a^3 ddy dx + (fg + fi + gi) a^2 dy dx^2 - fgi ay dx^3 = Q. dx^3 (*).$$

$$a^4 d^3 y - (e + g + i) a^3 ddy dx + (eg + ei + gi) a^2 dy dx^2 - egi ay dx^3 = R. dx^3.$$

$$a^4 d^3 y - (e + f + i) a^3 ddy dx + (ef + fi + ei) a^2 dy dx^2 - efi ay dx^3 = R'. dx^3.$$

$$a^4 d^3 y - (e + f + g) a^3 ddy dx + (ef + fg + eg) a^2 dy dx^2 - efg ay dx^3 = T. dx^3.$$

Maintenant si de la première de ces équations on retranche successivement la seconde , la troisième & la quatrième , on trouvera aisément (après les opérations convenables) les équations.

$$a^3 ddy - (g + i) a^2 dy dx + g i ay dx^2 = \frac{Q dx^2}{e - f} + \frac{R. dx^2}{f - e}.$$

(\*) Si l'on veut connoître la quantité  $a'$  qui doit affecter le second terme, l'équation  $a' = m + b = e - (e + f + g + i)$ , en supposant  $m = e$ , donnera  $a' = -(f + g + i)$ ; car  $b = -(e + f + g + i)$  il est aisé de voir que la même supposition donne  $b' = (fg + fi + gi)$ , &c.

$$a^3 ddy - (f+i) a^2 dy dx + f i a y dx^2 = \frac{Q dx^2}{e-g} + \frac{R' dx^2}{g-e}.$$

$$a^3 ddy - (f+g) a^2 dy dx + f g a y dx^2 = \frac{Q dx^2}{e-i} + \frac{T dx^2}{i-e}.$$

Par une opération semblable sur celles-ci, on trouve

$$a^2 dy - i a y dx = \frac{Q dx}{(e-f)(e-g)} + \frac{R dx}{(f-e)(g-f)} + \frac{R' dx}{(g-e)(g-f)}.$$

$$a^2 dy - g a y dx = \frac{Q dx}{(e-f)(e-i)} + \frac{R dx}{(f-e)(f-i)} + \frac{T dx}{(i-e)(i-f)}.$$

Retranchant la dernière de ces équations de la première, & faisant les opérations convenables,

$$\text{il vient } a y = \frac{Q}{(e-f)(e-g)(e-i)} + \frac{R}{(f-e)(f-g)(f-i)} + \frac{R'}{(g-e)(g-f)(g-i)} + \frac{T}{(i-e)(i-f)(i-g)};$$

c'est-là l'intégrale complète & finie de la proposée dans la supposition que  $n=4$  & que les valeurs de  $m$  sont telles qu'on l'a supposé. On doit faire attention que  $R$  n'a pas ici la même signification que dans l'équation V (n°. 297).

299. PROBLEME. Intégrer l'équation  $ddy + c^2 y dx^2 = p dx^2$  ( $p$  étant une fonction de  $x$  sans  $y$  &  $c$  une constante), à l'intégration de laquelle se réduit le fameux problème des trois corps. On a ici  $n=2$ ,  $a=1$ ,  $b=0$ ,  $m^2 + R =$

$m^2 + c^2 = 0$ ; d'où l'on tire  $m = \pm c \sqrt{-1}$ ; donc supposant les deux équations de l'ordre  $n - 1$  représentées par  $dy \pm c \sqrt{-1} \cdot y dx = z dx$ , on aura  $z = N^{cx\sqrt{-1}} (A \pm S.N^{-cx\sqrt{-1}} p dx)$  &  $z = N^{-cx\sqrt{-1}} (B \pm S.N^{cx\sqrt{-1}} p dx)$ ; & par un procédé semblable à celui qu'on a suivi ci-dessus, on trouvera  $y = [N^{cx\sqrt{-1}} (A + S.N^{-cx\sqrt{-1}} p dx) - N^{-cx\sqrt{-1}} (B + S.N^{cx\sqrt{-1}} p dx)] : 2c\sqrt{-1}$ ; donc  $2cy = \frac{(A - B) \cdot \cos. cx}{\sqrt{-1}} \pm (A + B) \cdot \sin. cx \pm 2 \sin. cx \cdot S. \cos. cx \cdot p dx - 2 \cos. cx \cdot S. \sin. cx \cdot p dx$ . Donc en faisant  $\frac{B - A}{\sqrt{-1}} = 2D$ ,  $A \pm B = 2C$ , on aura  $cy = \sin. cx (C \pm S. \cos. cx \cdot p dx) - \cos. cx (D \pm S. \sin. cx \cdot p dx)$ .

300. PROBLEME. Soit enfin l'équation  $ddy - \frac{dy dX}{X} = y X^2 \cdot dx^2$ , dont on demande l'intégrale, en supposant que  $dx$  est constant, & que  $X$  est une fonction de  $x$  sans  $y$ . Soit supposée l'intégrale cherchée représentée par  $dy \pm X^p y dx = A X^m S. X dx$  (P). En différenciant cette

(\*) Ces deux points indiquent une division.

équation

équation, substituant dans le résultat, la valeur de A prise de l'équation P, transposant & arrangeant les termes, on aura  $ddy + X^p dy dx - m X dx dy + (p - q). X^{p-1} y dX dx - \frac{q dX dy}{X} = m. X^{p+1} y dx^2$ . En comparant les termes de cette équation avec les termes homologues de la proposée, on trouve  $p = q = 1$ ,  $1 - m = 0$  &  $m = 1$ ; donc notre intégrale supposée sera  $dy + y X dx = A X N$ , par le moyen de laquelle nous ne pouvons pas parvenir à l'intégrale finie & complète de la proposée. Mais en supposant que l'intégrale est  $dy + ny X dx = A X^i N$ , nous trouverons  $ddy + n X^p dy dx - m X dy dx + n(p - q). X^{p-1} y dX dx - \frac{q dX dy}{X} = mn X^{p+1} y dx^2$ . Si l'on compare cette équation avec la proposée, on aura  $p = q = 1$ ,  $n = m$ ,  $mn = 1$ ; donc  $nn = mm = 1$  &  $n = m = \pm 1$ . De-là viennent les deux équations du premier degré  $dy + y X dx = A X N$  &  $dy - y X dx = B X. N$ ; d'où l'on tire  $1 y = \frac{A N}{-S. X dx} - \frac{B N}{-S. X dx}$ . Cette intégrale contenant deux quantités arbitraires A & B est complète.

*Des trajectoires orthogonales.*

301. Le problème des trajectoires orthogonales, qui  
Tome V. L

a long-tems exercé la sagacité des Géomètres, peut se proposer ainsi.

*Etant supposée une infinité de lignes MN, m q (fig. 1.) formées par une loi commune, on demande une ligne BD qui les coupe toutes à angles droits.*

Il est visible que si du point D on abaisse l'ordonnée DP perpendiculaire sur la ligne des abscisses AP, dont l'origine soit supposée en A, DT sera la tangente, & PT la sous-tangente de la ligne MD, qui est une de celles qui doivent être coupées par la ligne cherchée BD. Mais PT est la sous-normale de BD, & Pb en est la sous-tangente. Ayant mené Dn = Pp = dx parallèle à la ligne des abscisses, je fais PD = y; nN = dy'; mais je fais nq (différentielle de l'ordonnée par rapport à la secante) = -dy. Maintenant parce Dn est une perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit D du triangle rectangle NDq sur l'hypothénuse Nq, on a dy' : dx :: dx : -dy;

donc  $dy' = -\frac{dx^2}{dy}$ . Cela posé, on pourra chercher l'expression de la sous-normale PT de la secante, laquelle

sera  $= -\frac{y dy}{dx}$ , parce qu'elle est négative par rapport

à la sous-tangente PT, & qu'elle est prise en allant vers l'origine A des x: Egalez cette expression avec celle de la sous-tangente PT, ayant soin d'exprimer celle-ci en x & y, de manière que le paramètre p de la courbe MD ne s'y trouve pas, & vous aurez l'équation cherchée : ou bien cherchez la valeur de dy' que je suppose = M dx, chassez p de M par le moyen de l'équation de la courbe qui doit être coupée & faites

ensuite  $M dx = -\frac{dx^2}{dy}$ , cette équation donnera celle

de la courbe. Le paramètre p est une ligne constante dans chaque courbe, mais qui varie d'une courbe à l'autre; de manière que p n'est pas le même pour m q & pour MD. Mais si ces deux courbes ne diffèrent qu'infinitement peu l'une de l'autre, le paramètre de DM sera = p + dp, celui de m q étant = p.

302. PROBLEME. Supposant que les courbes  $Aq$ ,  $AD$ , &c. (fig. 2.) représentent une infinité de paraboles qui aient même sommet, & dont l'équation soit  $p^{m-1}x = y^m$ ,  $p$  étant un paramètre qui varie d'une parabole à l'autre, on demande la nature de la courbe  $BqD$  qui les coupe toutes à angles droits.

Je différencie cette équation en regardant  $p$  comme constant, & j'ai  $p^{m-1}dx = my^{m-1}dy$ ; donc

$$dy' = \frac{p^{m-1}dx}{my^{m-1}} = \frac{-dx^2}{dy}. \text{ Donc } p^{m-1} = \frac{-my^{m-1}dx}{dy}.$$

Mais par la nature des paraboles  $p^{m-1} = \frac{y^m}{x}$ ; donc  $\frac{y^m}{x} = \frac{-my^{m-1}dx}{dy}$ , ou  $ydy$

$= -mx dx$ , & en intégrant  $y^2 = m.(A^2 - x^2)$ , équation à l'ellipse d'Appollonius qu'on pourra construire ainsi: ayant pris  $AB = A$ , constante arbitraire, menez la normale  $Aa = A\sqrt{m}$ , & par le moyen des deux demi-axes  $AB$ ,  $Aa$ , décrivez l'ellipse  $Ba$ ; cette courbe coupera toutes les paraboles  $Aq$ ,  $AD$ , &c. à angles droits.

REMARQUE. Nous n'avons pas égalé explicitement la sous-tangente  $PT$  des paraboles avec l'expression de la sous-normale de la manière dont on l'a dit ci-dessus; mais on auroit trouvé la même chose par cette méthode, car la sous-tangente des paraboles est  $mx$ , donc en faisant  $mx = -\frac{ydy}{dx}$ , on aura  $ydy = -mx dx$  comme auparavant.

303. PROBLEME. Soit supposé une infinité de cercles  $ADN$  qui aient un même sommet  $A$ , mais différens diamètres  $AN = 2p$  (fig. 3), on demande la courbe qui les coupe tous à angles droits. L'équation des cercles sera  $2px - xx = y^2$ , dont la différentielle (en regardant  $p$  comme constant) donne  $pdx - xpx = ydy$ ;

$$\frac{pdx - xdx}{y} = dy' = \frac{-dx^2}{dy}; \text{ mais } p = \frac{x^2 + y^2}{2x},$$

par la nature du cercle ; donc en substituant, multipliant par  $y$ , divisant par  $dx$ , réduisant les fractions à leur plus simple expression, il viendra  $\frac{x dy}{2} + \frac{y^2 dy}{2x}$

$$- x dy = -y dx, \text{ ou } dy = \frac{xx dy - 2yx dx}{yy}; \text{ donc}$$

en intégrant,  $y = A - \frac{xx}{y}$ , ou  $xx = Ay - yy$ , équation

au cercle qu'on construit ainsi : ayant élevé une perpendiculaire  $Aa$  à l'extrémité  $A$  du diamètre  $AN$ , prenez  $Aa$  à volonté pour diamètre, & décrivez le demi-cercle  $ADa$  qui coupera les cercles proposés à angles droits (\*).

La méthode, dont on vient de parler est générale lorsque les courbes qui doivent être coupées sont algébriques ; mais elle réussit rarement si elles sont transcendentes, parce qu'il est rare qu'on puisse alors exprimer  $p$  en  $x$  &  $y$ .

304. PROBLEME. Soit  $amH$  (fig. 4.) une demi-cycloïde dont le cercle générateur ait un diamètre  $= 2a$ , si on prend les abscisses  $HP = x$  sur la tangente  $Hn$ , & qu'on fasse  $Pm$  (parallèle à  $AH$ )  $= z$ , l'équation de la cycloïde sera

$$dx = \frac{dz \sqrt{(2a - z)}}{\sqrt{z}} = \frac{dz \cdot \sqrt{(2az - z^2)}}{z} (**).$$

Supposons maintenant qu'on décrive une infinité de courbes  $NM$ , dont les ordonnées  $PD = y$  soient réciproques à

(\*) On peut démontrer cette propriété par la Géométrie Élémentaire ; car si du point  $D$  on mène les rayons  $Dc$ ,  $DC$  aux centres des cercles, & qu'on tire  $cC$ , les triangles  $CDc$ ,  $CAc$  auront tous leurs côtés égaux, à cause de  $CD = CA$  & de  $Ac = Dc$ , donc ces triangles sont équiangles ; donc l'angle  $CDc$  est  $= CAc$  ; mais celui-ci est droit, donc l'autre l'est aussi ; donc  $CD$  est tangente du demi-cercle  $ADa$  &  $cD$  tangente du demi-cercle  $ADN$  ; ainsi ces demi-cercles se coupent à angles droits.

(\*\*) Voyez la section précédente, n°. 15,



$z$ , de manière que l'on ait  $y = \frac{pp}{z}$ , ou  $yz = pp$ , on demande la courbe BD qui coupe toutes ces transcendentes MN à angles droits.

Différenciant l'équation de la courbe MN, en regardant  $p$  comme constant, on trouve  $dy' = \frac{-p p dz}{z^2}$   
 $= \frac{-y dz}{z}$ , à cause de  $pp = yz$ ; donc  $\frac{-y dz}{z} =$   
 $dy' = \frac{-dx^2}{dy} = \frac{-dz^2 (2a - z)}{z dy}$ , en substituant

la valeur de  $dx$ , prise de l'équation de la cycloïde,  
 $\& y dy = 2a dz - z dz, \frac{y^2}{2} = A.a + 2az - \frac{zz}{2}$ .

Donc  $y = \sqrt{(2.Aa + 4az - zz)}$ ; donc si on prolonge  $Pm$  jusqu'en D, de manière que PD soit  $= \sqrt{(2.Aa + 4az - zz)}$ , le point D appartiendra à la courbe cherchée. Mais parce qu'on peut prendre la constante A arbitrairement, il y a une infinité de lignes BD qui ont la même propriété.

Nous allons maintenant traiter le problème des trajectoires orthogonales d'une autre manière.

305. PUISQUE les lignes  $mq$ , MN (fig. 1.) qui doivent être coupées, sont représentées par une équation commune; cette équation doit contenir non-seulement  $x$  &  $y$ , mais encore un paramètre  $p$ , qui pour la même courbe MN doit être invariable, & qui en changeant de valeur, doit représenter les autres courbes. Cette équation, étant différenciée, en faisant aussi varier  $p$ , sera de cette forme  $n dy = M dx + N dp$ . Ainsi pour la même courbe MN l'on aura  $dp = 0$  &  $\frac{dy}{dx} = \frac{M}{n}$ ; donc la sous-normale Pb  $= \frac{y dy}{dx}$ , sera  $= \frac{My}{n}$ . Mais Pb est la sous-tangente de la courbe

secante BD; donc en retenant pour cette courbe les

mêmes coordonnées  $AP = x$  &  $PD = y$ , la sous-tangente  $\frac{y dx}{dy}$  sera  $= \frac{-My}{n}$ , on met le signe —,

parce que la sous-normale  $\frac{My}{n}$  étant positive, puisqu'elle est prise en s'éloignant de l'origine A des abscisses, la sous-tangente  $Pb$  doit être négative, parce qu'on la prend contre l'usage ordinaire, selon lequel la sous-normale étant située dans un sens, la sous-tangente est située dans un sens opposé. Cela posé, l'on aura l'équation  $\frac{y dx}{dy} = \frac{-My}{n}$ , ou  $ny dx + My dy = 0$  (B). Ainsi

en faisant  $p$  variable, l'équation des lignes qui doivent être coupées, étant supposée représentée par (A)  $n dy = M dx + N dp$ , l'équation de la courbe secante sera  $n dx + My dy = 0$ . Mais il est visible que pour pouvoir intégrer cette dernière, il est nécessaire que ni  $M$ , ni  $n$  ne contiennent pas  $p$  que nous regardons comme variable; il faut donc faire en sorte de chasser  $p$  par le moyen de l'équation A, si cela est possible.

Si l'équation des courbes qui doivent être coupées est telle que  $p$  puisse être déterminé par une fonction de  $x$  & de  $y$  à laquelle on puisse l'égaliser, cette équation aura cette forme  $dp = P dx + Q dy$ ,  $P$  &  $Q$  étant des fonctions de  $x$  & de  $y$  sans  $p$ . En comparant cette équation avec l'équation A, on trouve  $n = Q$ ,  $M = -P$  &  $N = 1$ ; donc l'équation B des trajectoires sera  $Q dx - P dy = 0$ , équation qui ne contiendra que deux variables  $x$  &  $y$ , & qu'on tâchera d'intégrer par quelqu'une des méthodes ci-dessus.

Si l'équation des courbes qui doivent être coupées est telle que  $y$  soit égal à une fonction de  $x$  & de  $p$ , de manière que sa différentielle donne  $dy = P dx + R dp$ ;  $P$  &  $R$  étant des fonctions de  $x$  & de  $p$  sans  $y$ , alors à cause de  $n = 1$ ,  $M = P$ ,  $N = R$ , l'équation des trajectoires sera  $dx + P dy = 0$ , qui à cause de  $dy = P dx + R dp$ , peut acquérir cette forme:  $(1 + PP) dx + PR dp = 0$ , équation qui ne renferme que deux variables  $x$  &  $p$ .

Si l'équation des courbes qui doivent être coupées,

étant différenciée, peut acquérir la forme  $dx = Q dy + R dp$ ,  $Q$  &  $R$  étant des fonctions de  $y$  & de  $p$  sans  $x$ ; dans ce cas à cause de  $n = Q$ ,  $M = 1$ , &  $N = -R$ , l'équation des trajectoires sera  $Q dx + dy = 0$ , qui à cause de  $dx = Q dy + R dp$ , deviendra  $(1 + QQ) dy + QR dp = 0$ , équation qui ne renferme pas  $x$ .

Toutes les fois donc que des trois quantités  $p$ ,  $x$ ,  $y$ , l'une peut être exprimée par les deux autres de la manière qu'on vient de le dire, l'invention des trajectoires se réduit à l'intégration d'une équation à deux variables; mais les fonctions de deux quantités qui déterminent la troisième, doivent être explicites, & cela qu'elles soient algébriques ou transcendentes: car si ces fonctions renferment des formules intégrales, dans ce cas les équations trouvées ne sont d'aucun usage, à moins qu'on ne puisse faire disparaître les formules intégrales dont elles sont embarrassées. Comme, par exemple, si l'équation des courbes qui doivent être coupées, étoit  $y = S. V dx$ ,  $V$  étant une fonction de  $x$  & de  $p$ , &  $p$  étant regardé comme constant dans l'intégrale; alors au lieu de  $dy = P dx + R dp$ , on aura  $dy = P dx = V dx$  (parce que  $dp$  est supposé  $= 0$ ); mais en regardant ensuite  $p$  comme variable, on doit

avoir (voyez le n°. 225.)  $R = S. dx \left( \frac{dV}{dp} \right)$ , équation dans laquelle on regarde  $x$  seul comme variable; & alors l'équation des trajectoires devient  $(1 + VV) dx + V dp S. dx \left( \frac{dV}{dp} \right) = 0$ , équation qu'on ne peut résoudre dans tous les cas par aucune méthode connue.

Si nous supposons que le multiplicateur  $M$ , qui peut rendre cette formule intégrable, est  $= \frac{p'}{V}$ ,  $p'$  étant une fonction de  $p$  sans  $x$  ni  $y$ , notre équation deviendra  $\frac{p' dx (1 + VV)}{V} + dp S. p' dx \left( \frac{dV}{p} \right) = 0$  (A), à cause que dans l'intégrale indiquée on regarde  $x$  seul comme variable. Supposons maintenant que l'intégrale

du second membre de la dernière équation est de cette forme  $S. \frac{p' dx (1 + V V)}{V}$ , dans ce cas l'intégrale de l'équation A sera double de cette quantité. Ainsi en ajoutant une constante  $2C$ , & divisant par 2, l'intégrale de l'équation sera  $S. \frac{p' dx (1 + V V)}{V} = C$ . Mais en différenciant cette intégrale dans la supposition de  $x$  &  $p$  variables, on trouve  $\frac{p' dx (1 + V V)}{V} + dp S. dx.$

$\left( \frac{d. [p' (1 + V V) V^{-1}]}{dp} \right) = 0 (*)$  (v. le n°. 225). Donc il faut supposer  $S. p' dx \left( \frac{dV}{dp} \right) = S. dx \left( \frac{d. [p' (1 + V V) V^{-1}]}{dp} \right)$ ; d'où l'on tire  $p' \left( \frac{dV}{dp} \right) = \left( \frac{d. [p' (1 + V V) V^{-1}]}{dp} \right)$ .

Maintenant parce que dans cette dernière équation la seule quantité  $p$  est supposée variable, on a  $p' dV = p' dV. (V V - 1) + \frac{d p'. (1 + V V)}{V}$ , ou (en multipliant & divisant en même-tems le premier membre de l'équation par  $V V$ , transposant ensuite & réduisant)  $\frac{p' dV}{V V} = dp' \frac{(1 + V V)}{V}$ ; donc  $\frac{dp'}{p'} = \frac{dV}{V(1 + V V)}$   $= \frac{dV}{V} - \frac{V dV}{1 + V V}$ , &  $L. p' = L. V - \frac{1}{2} L. (1 + V V) + L. X$ , en introduisant  $X$  fonction de  $x$  au lieu d'une constante; donc  $p' = \frac{V X}{\sqrt{(1 + V V)}}$  &  $V =$

(\*) En différenciant la quantité  $\frac{p (1 + V V)}{V}$  dans la supposition de  $p$  seul variable, il faut diviser la différentielle par  $dp$ , ou la multiplier par  $\frac{1}{dp}$ , afin d'avoir le multiplicateur de  $dp$  qui doit être  $= S. dx. \left( \frac{d. [p' (1 + V V) V^{-1}]}{dp} \right)$ .

$\frac{p'}{\sqrt{(XX - p'p')}} : \text{ainsi toutes les fois que } V \text{ sera}$

de cette forme  $\frac{p'}{\sqrt{(XX - p'p')}} , p' \text{ étant une fonc-}$

tion de  $p$  sans  $x$  , &  $X$  une fonction de  $x$  sans  $p$  , on pourra trouver les trajectoires des courbes dont l'équation est  $y = S. V dx$ . De sorte que l'équation des courbes qui doivent être coupées étant  $y$

$= S. \frac{p' dx}{\sqrt{(XX - p'p')}} , \text{ l'équation des trajectoires sera}$

$S. \frac{XX dx}{\sqrt{(XX - p'p')}} = C , \text{ ( à cause de } 1 + VV =$

$\frac{XX}{XX - p'p'} , \text{ \& selon les différentes valeurs de}$

$C$  , on pourra trouver une infinité de courbes qui couperont les courbes données à angles droits.

Supposons que les courbes  $MN , mq$  ( fig. 1 ) sont représentées par l'équation  $y = S. \frac{p' dx}{\sqrt{(XX - p'p')}} ,$

$p'$  variant d'une courbe à l'autre. Si sur l'axe  $AP$ , des  $x$ , ( l'origine des abscisses étant en  $A$  ) , on décrit pour différentes valeurs déterminées de  $p'$  une infinité de courbes, telles que  $aG , fg$ , en prenant pour une certaine valeur de  $p'$  , & pour la courbe  $aG$ , chaque

ordonnée  $PG = \frac{XX}{\sqrt{(XX - p'p')}} , \text{ il est visible que}$

$\frac{XX. dx}{\sqrt{(XX - p'p')}} \text{ sera la différentielle de l'aire de la courbe } aG ; \text{ si donc on prend sur cette courbe une}$

aire  $= 1. C = C = S. \frac{XX. dx}{\sqrt{(XX - p'p')}} (*) , \text{ \& qu'on}$

(\*) Dans ce cas on doit regarder  $C$  comme une aire , ou si on veut la regarder comme une ligne , il faut la supposer multipliée par l'unité de ligne , ce qui rendra  $C$  égal à une surface.

prolonge GP de manière que GP soit = PD, le point D appartiendra à la trajectoire cherchée. De même si sur la courbe fg décrite par la même loi, mais en donnant une valeur différente au paramètre  $p'$ , on prend une aire = C, & qu'on prolonge l'ordonnée gp de cette aire, de manière que l'on ait  $gp = pq$ , le point q sera un point de la trajectoire; & l'on pourra de cette manière trouver tant d'autres points de cette courbe que l'on voudra. Pour se convaincre que tous les points ainsi trouvés appartiennent à la trajectoire, on n'a qu'à remarquer que toutes ses ordon-

nées PD,  $pq$  sont telles que l'on a  $S. \frac{XX \cdot dx}{\sqrt{(XX - p'p')}} = C(A)$ , tandis que pour les mêmes ordonnées, considérées comme appartenant aux courbes MN,  $mq$ , l'on a  $y = S. \frac{p' dx}{\sqrt{(XX - p'p')}} (B)$ . Or ces deux

équations doivent toujours aller ensemble. Comme C est une quantité arbitraire, il est visible qu'on peut trouver une infinité de courbes représentées par l'équation A qui seront les trajectoires des courbes exprimées par l'équation B.

306. Nous avons vu ci-dessus que l'équation pour les courbes qui doivent être coupées, étant supposée  $n dy = M dx + N dp$ , l'équation des trajectoires étoit  $n dx + M dy = 0$ ; donc si l'équation des courbes qui doivent être coupées est  $N dy = -M dx - n dp$ , ou  $N dy + M dx + n dp = 0 (A)$ , l'équation des trajectoires sera  $N dx - M dy = 0$ , le paramètre  $q$  de ces courbes étant regardé comme constant dans cette dernière équation. Mais si on fait aussi varier  $q$ , l'équation des trajectoires aura nécessairement cette forme  $K dq + N dx - M dy = 0 (B)$ . Si  $p$  dans l'équation A &  $q$  dans l'équation B est donné en  $x$  &  $y$ ; on pourra donner à ces équations les formes  $dp = M (P dx + Q dy)$  &  $dq = N (Q dx - P dy)$ , M & N étant des facteurs qui rendent intégrables les formes  $P dx + Q dy$  &  $Q dx - P dy$ ; ce qui étant toujours possible, on peut trouver une infinité de paires de systèmes

de lignes qui aient la propriété de se couper mutuellement à angles droits. Si on suppose, par exemple,  $P = X$  &  $Q = Y$ ,  $X$  étant une fonction de  $x$  sans  $y$ , &  $Y$  une fonction de  $y$  sans  $x$ , nos équations donneront  $p = S. X dx + S. Y dy$  &  $q = S. \frac{dx}{X} - S. \frac{dy}{Y}$ , en faisant  $M = x^0 y^0 = 1$  &  $N = \frac{1}{XY}$ .

307. ON peut aussi exprimer les deux variables  $x$  &  $y$  par les paramètres  $p$  &  $q$ , & cela par le moyen des deux équations  $A$  &  $B$ , desquelles on tirera facilement les équations  $dx + \frac{nMdp + KNdq}{MM + NN} = 0$ , &  $dy + \frac{nNdq - KMdp}{MM + NN} = 0$ , qu'on peut ramener à ces formes plus simples  $dx = PR dp + QT dq$  &  $dy = PT dp - QR dq$ ,  $P, Q, R$  &  $T$  désignant des fonctions de  $p$  & de  $q$ , telles que ces deux formules soient intégrables. Mais  $x$  &  $y$  étant des fonctions de  $p$  & de  $q$ , si on considère successivement  $p$  &  $q$  comme variables, la première des dernières équations donnera  $PR = \left(\frac{dx}{dp}\right)$ ;  $QT = \left(\frac{dx}{dq}\right)$ , & la seconde donnera  $PT = \left(\frac{dy}{dp}\right)$ ;  $QR = -\left(\frac{dy}{dq}\right)$ . Mais il est visible que  $PR \cdot QT - PT \cdot QR = 0$ ; donc  $\left(\frac{dx}{dp}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dq}\right) + \left(\frac{dy}{dp}\right) \cdot \left(\frac{dy}{dq}\right) = 0$ , propriété digne de remarque.

Revenons aux équations  $dx = PR dp + QT dq$ ;  $dy = PT dp - QR dq$ , desquelles il est aisé de conclure  $dx + dy\sqrt{-1} = (R + T\sqrt{-1}) \cdot (P dp - Q dq\sqrt{-1})$ , &  $dx - dy\sqrt{-1} = (R - T\sqrt{-1}) \cdot (P dp + Q dq\sqrt{-1})$ . Maintenant  $P$  &  $Q$  étant des fonctions de  $p$  &  $q$ , on pourra toujours

trouver un multiplicateur  $M$  qui rende intégrable la forme ambiguë  $P dp \mp Q dq \sqrt{-1}$ ; de sorte que l'on aura  $S.M(P dp + Q dq \sqrt{-1}) = z + V \sqrt{-1}$ , & prenant pour  $R + T \sqrt{-1}$  une fonction quelconque de  $z + V \sqrt{-1}$  multipliée par  $M$ , l'on aura, en intégrant,  $x + y \sqrt{-1} = f(z + V \sqrt{-1})$  &  $x - y \sqrt{-1} = F(z - V \sqrt{-1})$ ,  $f$  &  $F$  désignant des fonctions quelconques des quantités qui suivent ces lettres. Donc, en ajoutant ces équations & retranchant ensuite la seconde de la première, & donnant une autre forme aux fonctions, on pourra représenter les variables  $x$  &  $y$  par les équations  $x = \frac{1}{2}f(z + V \sqrt{-1})$

$$+ \frac{1}{2}f(z - V \sqrt{-1}) + \frac{1}{2\sqrt{-1}}F(z + V \sqrt{-1})$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{-1}}F(z - V \sqrt{-1}), \text{ \& } y = \frac{1}{2\sqrt{-1}}f(z +$$

$$V \sqrt{-1}) - \frac{1}{2\sqrt{-1}}f(z - V \sqrt{-1}) - \frac{1}{2}F(z +$$

$V \sqrt{-1}) - \frac{1}{2}F(z - V \sqrt{-1})$ , qui sont toujours réelles quelles que soient les fonctions désignées par  $f$  &  $F$ , où il est bon de remarquer que les équations précédentes ne contiennent, à proprement parler, que deux fonctions, l'une de  $z + V \sqrt{-1}$ , l'autre de  $z - V \sqrt{-1}$ .

Les quantités  $z$  &  $V$  désignent des fonctions de  $p$  & de  $q$ , dont on peut trouver la nature par l'équation

$\left(\frac{dx}{dp}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dq}\right) + \left(\frac{dy}{dp}\right) \cdot \left(\frac{dy}{dq}\right) = 0$ ; car puisqu'on a trouvé  $x + y \sqrt{-1} = f(z + V \sqrt{-1})$  &  $x - y \sqrt{-1} = F(z - V \sqrt{-1})$ , on aura en différenciant :

$$\text{I. } \left(\frac{dx}{dp}\right) + \left(\frac{dy}{dp}\right) \sqrt{-1} = \left[\left(\frac{dz}{dp}\right) + \left(\frac{dV}{dp}\right) \sqrt{-1}\right] \cdot f'(z + V \sqrt{-1}).$$



$$\text{II. } \left(\frac{dx}{dq}\right) + \left(\frac{dy}{dq}\right) \sqrt{-1} = \left[ \left(\frac{dz}{dq}\right) + \left(\frac{dV}{dq}\right) \times \sqrt{-1} \right] \cdot f'(z + V \sqrt{-1}).$$

$$\text{III. } \left(\frac{dx}{dp}\right) - \left(\frac{dy}{dp}\right) \sqrt{-1} = \left[ \left(\frac{dz}{dp}\right) - \left(\frac{dV}{dp}\right) \sqrt{-1} \right] \cdot F'(z - V \sqrt{-1}).$$

$$\text{IV. } \left(\frac{dx}{dq}\right) - \left(\frac{dy}{dq}\right) \sqrt{-1} = \left[ \left(\frac{dz}{dq}\right) - \left(\frac{dV}{dq}\right) \sqrt{-1} \right] \cdot F'(z - V \sqrt{-1}).$$

Multipliant la première de ces équations par la quatrième, & la seconde par la troisième, ajoutant ensuite les deux produits, on trouvera :

$$2. \left(\frac{dx}{dp}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dq}\right) + 2 \left(\frac{dy}{dp}\right) \cdot \left(\frac{dy}{dq}\right) = 2 \left[ \left(\frac{dz}{dp}\right) \times \left(\frac{dz}{dq}\right) + \left(\frac{dV}{dp}\right) \cdot \left(\frac{dV}{dq}\right) \right] \cdot f'(z + V \sqrt{-1}) \cdot F'(z - V \sqrt{-1}).$$

Mais le premier membre de cette équation étant = 0, le second sera aussi = 0, ce qui donne  $\left(\frac{dz}{dp}\right) \cdot \left(\frac{dz}{dq}\right) + \left(\frac{dV}{dp}\right) \cdot \left(\frac{dV}{dq}\right) = 0$ . Les fonctions  $z$  &  $V$  doivent donc satisfaire à cette équation.

308. CONNOISSANT les valeurs de  $x$  & de  $y$  qui représentent deux systèmes de lignes qui se coupent à angles droits,  $x = t$  &  $y = u$ ,  $t$  &  $u$  étant des fonctions des deux paramètres  $p$  &  $q$ , telles que l'on ait  $\left(\frac{dt}{dp}\right) \cdot \left(\frac{dt}{dq}\right) + \left(\frac{du}{dp}\right) \cdot \left(\frac{du}{dq}\right) = 0$ , on peut facilement trouver une infinité de paires de tels systèmes contenus dans les deux équations suivantes :  $x =$

$\frac{1}{2}f(t+u\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}f(t-u\sqrt{-1}) - \frac{1}{2\sqrt{-1}} \times$   
 $F(t+u\sqrt{-1}) + \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot F(t-u\sqrt{-1}); y =$   
 $\frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot f(t+u\sqrt{-1}) - \frac{1}{2\sqrt{-1}} f(t-u\sqrt{-1})$   
 $+ \frac{1}{2}F(t+u\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}F(t-u\sqrt{-1});$   
 formules que l'on a choisies, afin qu'en développant  
 chaque fonction, les imaginaires se détruisent d'elles-  
 mêmes.

309. Ces formules sont très-comodes pour la prati-  
 que : car supposant qu'en prenant pour  $f$  différentes  
 fonctions déterminées, la forme  $\frac{1}{2}f(t+u\sqrt{-1})$   
 $+ \frac{1}{2}f(t-u\sqrt{-1})$ , donne  $T; T'; T''; T'''$ ,  
 la forme  $\frac{1}{2\sqrt{-1}}f(t+u\sqrt{-1}) - \frac{1}{2\sqrt{-1}}f(t-u\sqrt{-1})$ ,  
 donnant  $V; V'; V''; V'''$ . Les valeurs qui  
 satisfont à la question seront les suivantes.

$$\begin{aligned}
 x &= aT + bT' + CT'' + DT''' - eV - gV' \\
 &\quad - hV'' - iV''', \\
 y &= aV + bV' + CV'' + DV''' + eT + gT' \\
 &\quad + hT'' + iT'''.
 \end{aligned}$$

Les lettres  $a, b, C$ , &c. désignant des coefficients  
 constans quelconques. On doit faire attention que les  
 valeurs homologues  $T$  &  $V, T'$  &  $V',$  &c. doivent  
 être formées des mêmes fonctions & des mêmes lettres  
 $t$  &  $u$ . Ainsi si  $f$  &  $F$  désignent la puissance 1, on aura  
 $x = t - u$  &  $y = u + t$ .

Les valeurs les plus simples qu'on peut former par  
 les quantités  $t$  &  $u$ , en substituant des puissances au  
 lieu de  $f$  & de  $F$ , sont telles qu'on le voit ici.

$$\begin{array}{l|l|l}
 T = t & T = t^2 - uu & T = t^3 - 3tuu \\
 V = u & V = 2tu & V = 3t^2u - u^3 \\
 \hline
 T = t^4 - 6t^2uu + u^4 & & \\
 V = 4t^3u - 4tu^3 & & \text{\&c.}
 \end{array}$$

Et pour les puissances négatives,

$$\begin{aligned} T &= \frac{t}{t^2 + u^2} \quad \left| \quad T = \frac{t^2 - u^2}{(t^2 + u^2)^2} \quad \left| \quad T = \frac{t^3 - 3tu^2}{(t^2 + u^2)^3} \right. \right. \\ V &= \frac{u}{t^2 + u^2} \quad \left| \quad V = \frac{2tu}{(t^2 + u^2)^2} \quad \left| \quad V = \frac{3t^2u - u^3}{(t^2 + u^2)^3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \begin{aligned} T &= \frac{t^4 - 6t^2u^2 + u^4}{(t^2 + u^2)^4} \\ V &= \frac{4t^3u - 4tu^3}{(t^2 + u^2)^4} \end{aligned} \right| \quad \&c. \right. \end{aligned}$$

Ainsi toute la difficulté consiste à trouver pour  $t$  &  $u$  des fonctions de  $p$  & de  $q$ , telles que l'on ait

$$\left(\frac{dt}{dp}\right) \cdot \left(\frac{dt}{dq}\right) + \left(\frac{du}{dp}\right) \cdot \left(\frac{du}{dq}\right) = 0 \quad (A).$$

310. SUPPOSANT  $t = p$  &  $u = q$ , ces suppositions satisfont à l'équation A, puisque alors  $\left(\frac{dt}{dq}\right) = 0$  &  $\left(\frac{du}{dp}\right) = 0$ ; & l'on a les formules  $x = ap - eq$  &

$y = aq + ep$ ; & en éliminant premièrement  $q$  & ensuite  $p$ , les deux systèmes de lignes seront représentés par les équations  $ax + ey = (a^2 + e^2)p$  &  $ay - ex = (a^2 + e^2)q$ , qui représentent une infinité de droites parallèles, telles que chacune coupe à angles droits les lignes de l'autre système.

Supposons en second lieu  $T = t^2 - u^2$  &  $V = 2tu$ ; d'où, en mettant  $x$  au lieu de  $T$ ,  $y$  au lieu de  $V$ ,  $p$  au lieu de  $t$ , &  $q$  au lieu de  $u$ , on tire  $x = p^2 - q^2$  &  $y = 2pq$ ; & parce  $\sqrt{(x^2 + y^2)} = p^2 + q^2$ , en éliminant alternativement  $q$  &  $p$ , les deux systèmes des lignes seront  $\sqrt{(x^2 + y^2)} + x = 2p^2$  &  $\sqrt{(x^2 + y^2)} - x = 2q^2$ . C'est pourquoi si au lieu de  $2p^2$  &  $2q^2$ , nous écrivons simplement  $p$  &  $q$ , ces équations donneront  $y^2 = p^2 - 2px$  &  $y^2 = q^2 + 2qx$ , qui représentent deux systèmes de paraboles AD, BD (fig. 5) décrites du même foyer

F, les unes allant vers la droite, & les autres vers la gauche; ce qui est une belle propriété des paraboles (\*).

Supposons maintenant  $T = t^3 - 3tu^2$  &  $V = 3t^2u - u^3$ , & formons les équations  $x = p^3 - 3pq^2$  &  $y = 3p^2q - q^3$ , dont la dernière donne

$$p = \sqrt{\frac{(y + q^3)}{3q}}.$$

Cette valeur étant substituée dans la première, il vient  $x = \frac{y - 8q^3}{3q} \cdot \sqrt{\frac{(y + q^3)}{3q}}.$

Substituant dans la seconde la valeur de  $q$  prise dans la première, prenant les quarrés de l'équation résultante & de la précédente, faisant les opérations ordinaires & écrivant ensuite  $p$  &  $q$  au lieu de  $q^3$  & de  $p^3$ , les deux systèmes de lignes seront

$$27qx^2 = y^3 - 15qy^2 + 48q^2y - 64q^3,$$

$$27py^2 = -x^3 - 15px^2 - 48p^2x + 64p^3.$$

Ces équations représentent des lignes du troisième ordre qui ont la propriété de se couper à angles droits.

$$\text{Supposons maintenant } T = \frac{t}{t^2 + u^2} \text{ \& } V = \frac{u}{t^2 + u^2},$$

$$\text{\& formons les équations } x = \frac{p}{p^2 + q^2}, \text{ \& } y =$$

$$\frac{q}{p^2 + q^2}, \text{ pour avoir } x^2 + y^2 = \frac{1}{p^2 + q^2}; \text{ les deux}$$

(\*) Lorsque les paraboles AD, BD ont leurs paramètres  $p$  &  $q$  égaux, il est aisé de voir par les premiers élémens des sections coniques que l'ordonnée FD qui passe par leur foyer, est la même dans chacune des paraboles; car cette ordonnée est la moitié du paramètre: ainsi ces courbes se rencontrent alors à l'extrémité de cette ordonnée. De plus les sous-tangentes FT, Ft étant aussi égales chacune à l'ordonnée FD, puisqu'elles sont chacune double de FA = FB (FA est le quart du paramètre  $p$ ), les triangles rectangles FDt, FDT sont isocèles; ainsi les angles FDt, FDT sont chacun de  $45^\circ$ , & l'angle TDt de  $90^\circ$ ; donc &c.

systèmes

systèmes des lignes seront dans ce cas  $x = p(x^2 + y^2)$ , &  $y = q(x^2 + y^2)$ . Changeons la forme des paramètres en écrivant  $\frac{1}{2p}$  au lieu de  $p$  &  $\frac{1}{2q}$  au lieu de  $q$ , les deux systèmes des lignes seront alors exprimés par les équations  $x^2 + y^2 = 2px$  &  $x^2 + y^2 = 2qy$  qui représentent deux systèmes de cercles.

Développons aussi les formes  $x = \frac{p^2 - q^2}{(p^2 + q^2)^2}$ , &  $y = \frac{2pq}{(p^2 + q^2)^2}$ , nous trouverons  $x^2 + y^2 = \frac{1}{(p^2 + q^2)^2}$ ; de manière que l'on aura  $\frac{x}{x^2 + y^2} = p^2 - q^2$ , &  $\frac{y}{x^2 + y^2} = 2pq$ . Mais à cause de  $p^2 + q^2 = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$ , nous trouverons  $2p^2 = \frac{x + \sqrt{(x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2}$ , &  $2q^2 = \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)} - x}{x^2 + y^2}$ .

Ecrivons maintenant  $\frac{1}{p}$ , &  $\frac{1}{q}$  au lieu de  $2p^2$  &  $2q^2$ , & les deux systèmes des lignes seront représentés par les équations  $x^2 + y^2 = px + p\sqrt{(x^2 + y^2)}$  &  $x^2 + y^2 = q\sqrt{(x^2 + y^2)} - qx$ , qu'on réduit à celles-ci  $(x^2 + y^2)^2 - 2px(x^2 + y^2) = p^2y^2$  &  $(x^2 + y^2)^2 + 2qx(x^2 + y^2) = q^2y^2$ . Ces deux systèmes de lignes sont donc représentés par une équation commune du quatrième ordre, en prenant dans la dernière le paramètre  $q$  négativement.

Il est aisé de voir, par ce qu'on vient de dire, comment on peut s'y prendre pour trouver tant de systèmes de lignes algébriques qu'on voudra, dont les trajectoires soient aussi des lignes algébriques. Il suffit pour cela de prendre pour  $x$  &  $y$  des fonctions des

deux paramètres  $p$  &  $q$ , telles que l'on ait  $\left(\frac{d\epsilon}{dp}\right) \cdot \left(\frac{d\epsilon}{dq}\right) + \left(\frac{du}{dp}\right) \cdot \left(\frac{du}{dq}\right) = 0 (A)$ , & de faire  $x + y \sqrt{-1} = f(\epsilon + u \sqrt{-1})$  &  $x - y \sqrt{-1} = F(\epsilon - u \sqrt{-1})$ , de la manière expliquée ci-dessus. Cela fait, tout consiste à trouver les cas les plus simples pour  $\epsilon$  &  $u$ : or le plus simple de ces cas donne  $\epsilon = p$  &  $u = q$ : le cas de  $\epsilon = ap + bq$  &  $u = ep + gq$  est encore fort simple, & ces cas fournissent une ample moisson de paires de systèmes de lignes algébriques. Le cas de  $\epsilon = \sqrt{p(a+q)}$  &  $u = \sqrt{q(b-p)}$  mérite d'être observé. Ce cas donne  $\left(\frac{d\epsilon}{dp}\right) \cdot \left(\frac{d\epsilon}{dq}\right) = \frac{1}{4}$  &

$\left(\frac{du}{dp}\right) \cdot \left(\frac{du}{dq}\right) = -\frac{1}{4}$ : ainsi il satisfait à l'équation A, & l'on peut en tirer une infinité de solutions. Si l'on suppose maintenant  $x = \epsilon$  &  $y = u$ , on a  $x^2 = pa + pq$  &  $y^2 = bq - pq$ ; & à cause de  $x^2 + y^2 = pa + bq$ , si l'on prend la valeur de  $q$  dans cette dernière équation, & qu'on l'égalé à la valeur de la même quantité prise dans l'équation  $x^2 = pa + pq$ ; si on prend aussi la valeur de  $p$  dans l'équation  $y^2 = bq - pq$ , & qu'on l'égalé à la valeur de la même lettre, prise de l'équation  $x^2 + y^2 = pa + bq$ , on aura les équations

$$\text{I. } p.(x^2 + y^2) - bx^2 + ap(b-p) = 0.$$

$$\text{II. } q.(x^2 + y^2) + ay^2 - bq(a+q) = 0.$$

La dernière représente une infinité d'ellipses, & la première, à cause de  $b > p$  (\*), appartient à une infinité d'hyperboles décrites sur un axe commun & du même centre. Passons aux courbes dont les ordonnées partent d'un point.

(\*) Autrement l'équation  $y^2 = bq - pq$  donneroit pour  $y$  une quantité imaginaire  $= \sqrt{q(b-p)}$ .

311. PROBLEME. Soit une courbe AE (fig. 6) rapportée au foyer C, dont la relation entre  $Ep = dx$ ,  $CE = z$  & sa différentielle  $dz$  soit donnée par une équation. Supposons une infinité d'autres courbes Mm engendrées par la première, de manière que ses ordonnées  $CD = y$  soient des fonctions algébriques de  $z$  & d'un paramètre  $p$  qui varie, d'une courbe à l'autre, on demande la courbe BDQ qui coupe toutes ces lignes à angles droits. Du centre C ayant décrit l'arc infiniment petit Dn, & faisant  $CD = y$ ,  $mn = dy$ ,  $na$  (qui appartient à la courbe sécante)  $= -dy$ , je remarque que les secteurs  $CEp$ ,  $CDn$  donnent  $z : y :: dx : Dn = \frac{y dx}{z}$ . Mais à cause de l'angle droit  $aDm$ , on a  $mn :$

$$Dn :: Dn : na; \text{ donc } dy : \frac{y dx}{z} :: \frac{y dx}{z} : -dy;$$

donc  $dy = -\frac{y^2 dx^2}{z^2 dy}$ . Lorsque  $y$  sera une fonction algébrique de  $z$  & de  $p$ , ayant fait la différenciation dans la supposition de  $p$  constant, on aura  $dy$  en  $z$ ,  $dz$  &  $p$ , & chassant  $p$  par le moyen de l'équation de la courbe Mm, &  $dx$  par le moyen de l'équation de la courbe AE, on trouvera l'équation de la trajectoire en  $y$  &  $z$ , d'où l'on tirera la valeur de  $y$ .

312. SOIT AE une spirale logarithmique dans laquelle, à cause de l'angle constant  $p e E$  du rayon avec la courbe, on a  $p e = dz : Ep = dx :: a : b$ , ( $a$  étant le cosinus &  $b$  le sinus de l'angle  $p e E$ ); donc  $dx = \frac{b dz}{a}$ . Supposons que les courbes MN soient repré-

sentées par l'équation  $y = \frac{p \cdot z}{a}$  qui donne une infinité de spirales logarithmiques. Afin de trouver la sécante BD, je différencie cette équation, en regardant  $p$  comme constant, pour avoir  $dy = \frac{p dz}{a}$ , mais  $p = \frac{a y}{z}$ ; donc

$$dy = \frac{y dz}{z} = \frac{-y^2 dx^2}{z^2 dy}; \text{ donc } dz = \frac{-y dx^2}{z dy}$$

$$= \frac{-b^2 y dz^2}{a^2 z dy}, \text{ en substituant la valeur de } dx; \text{ donc}$$

$a^2 z dy = -b^2 y dz$ . On peut par le moyen de cette équation déterminer  $y$  en  $z$  (\*) ; mais cherchons l'équation de la courbe. Supposant  $Dn = du$ , on a  $z : y :: dx : du$ , & en substituant la valeur de  $dx$ ,

il vient  $z : y :: \frac{b dz}{a} : du$ ; donc  $\frac{b dz}{a z} = \frac{du}{y}$ ; mais

l'équation  $a^2 z dy = -b^2 y dz$  donne  $\frac{b^2 dz}{a^2 z} =$   
 $\frac{-dy}{y}$ ; donc  $\frac{b}{a} \cdot \frac{du}{y} = \frac{-dy}{y}$ , ou  $b du = -a dy$ ,

ou  $a dy = -b du$ , équation à une spirale logarithmique, mais située dans une situation renversée, & dans laquelle on a  $-dy = na : du = Dn :: b : a$ , donc puisque  $b$  est le sinus de l'angle  $CEA$ , cet angle est  $= a Dn$ ; mais  $a DC$  est complément de  $a Dn$ ; donc l'angle  $CDa$  est complément de  $CEA$ , ce qui est une propriété remarquable. Si l'angle  $CEA$  est de  $45^\circ$ , l'angle  $CDB$  sera aussi de  $45^\circ$ , & la courbe  $BD$  sera une spirale logarithmique égale à la courbe  $AE$ , mais située dans une situation renversée. Ainsi une spirale dont l'angle du rayon avec la tangente est de  $45^\circ$ , a la propriété, étant renversée, de se couper toujours elle-même à angles droits.

Si la courbe  $AE$  étoit un cercle, dans ce cas l'angle  $pEe$  seroit  $= 0$ , & l'on auroit  $a = 0$ , & par conséquent aussi  $du = 0$ ; ce qui indique que la seule ligne

---

(\*) Car on a  $\frac{a^2 dy}{y} = -\frac{b^2 dz}{z}$ ,  $a^2 L.y = -$   
 $b^2 L.z$ , ou  $y^{a^2} = z^{-b^2}$  &  $y = z^{-\frac{bb}{aa}}$ .



droite menée du centre peut couper une infinité de cercles concentriques ( car dans ce cas de l'équation

$y = \frac{Pz}{a}$  on ne peut tirer qu'une infinité de cercles) à angles droits.

313. PARLONS maintenant des trajectoires réciproques. Si la courbe ABC ( fig. 7 ) tourne autour de l'axe BR qui la rencontre au point B, & qu'elle soit placée dans une situation renversée DBE, de maniere que la partie BE soit la même que la partie BC & la partie BD la même que la partie BA ; si ensuite on fait mouvoir la courbe DE parallèlement à elle-même ; de sorte que tous ses points décrivent des lignes parallèles à BR, & que la courbe soit parvenue en FGH, où elle coupe AC dans un point variable G, il s'agit de déterminer la nature de la courbe ABC, telle que l'angle de section CGH soit toujours le même, & par conséquent constant : les courbes qui ont cette propriété sont appelées *trajectoires réciproques*. Puisque FH tombant sur DE, l'angle CGH devient l'angle CBE, & que l'angle de section est constant ; il est visible, à cause de  $CBR = RBE$ , que  $CGH$  est  $= 2 CBR$ . Supposons maintenant que le point B étant parvenu en M, on prenne  $BK = MG$ , & qu'on tire les lignes KP, GI parallèles à BR, il est évident que les arcs MG, BK étant les mêmes, & la courbe CBA, avant de s'émouvoir parallèlement à BR, n'ayant seulement que tourné autour de cette ligne, ces arcs doivent avoir la même inclinaison par rapport aux parallèles entre lesquels ils sont compris ; & qu'ainsi les parallèles KP, GI doivent être également éloignés de BR. Puisque les arcs, dont on vient de parler, sont également inclinés par rapport aux parallèles KP, GI, l'angle CKP est  $= HGI$  ; donc en ajoutant de part & d'autre l'angle CGI, on aura  $CKP + CGI = CGH = CBE = 2 CBR$  ; donc les trois angles CKP, CBR, CGI forment une proportion continue arithmétique ; ce qui doit aussi s'entendre de ceux qui peuvent leur être opposés au sommet, en prolongeant les lignes qui les forment.

M 3

314. LA propriété démontrée fournit un moyen aisé de déterminer une infinité de trajectoires réciproques qui se coupent à angles droits. Soit une courbe  $PBQ$  (fig. 8) dont l'axe soit  $BR$ , & dont les branches  $BQ$ ,  $BP$  soient égales & semblables. Ayant pris les arcs  $BF$ ,  $BH$  que je supposerai égaux, menez les lignes  $FK$ ,  $HG$  égales à ces arcs & parallèles à  $BR$ , la courbe  $ABC$  qui passe par ces points, & tous les autres déterminés de même est une trajectoire réciproque, qui ayant tourné autour de l'axe  $BR$ , & étant placée dans une situation renversée, & étant ensuite mue parallèlement à  $BR$ , se coupera toujours à angles droits. 1°. Je dis que l'angle  $CBR$  est de  $45^\circ$ ; car ayant pris l'arc infiniment petit  $Bp$  & mené  $pb$  parallèle à  $BR$ , on aura, par construction,  $Bp = bp$ ; donc dans le triangle isocèle  $Bpb$  les angles  $pBb$ ,  $p b B$  sont égaux. Mais l'angle  $b p B$  est égal à son alterne  $R B p$ , & celui-ci est droit (puisque la tangente qu'on pourroit mener au point  $B$  de la courbe  $QBP$  seroit perpendiculaire à l'axe  $BR$ ); donc l'angle  $p B b$ , ou son égal  $CBQ$  est demi-droit; mais  $QBR$  est droit, donc  $CBR$  est demi-droit. Je dis 2°. que les trois angles  $CKF$ ,  $CBR$ ,  $BGH$ , on ayant prolongé  $HG$  en  $I$ ,  $CGI$  sont en proportion continue arithmétique. Qu'on tire les lignes  $fk$ ,  $hg$  parallèles à  $BR$  qui terminent les arcs infiniment petits & égaux  $Ff$ ,  $Hh$ , auxquels on menera les parallèles  $Km$ ,  $Gn$ ; il est visible que les deux angles  $Kmf$  &  $Kmk$  valent deux angles droits; mais ce dernier est  $= m f F$ , & celui-ci est évidemment  $= Q h n = h n G$ ; donc les angles  $Kmf + h n G$  valent deux angles droits. Mais  $Kmf$  (extérieur au triangle  $Kmk$ )  $= m K k + m k K$  &  $h n G = n G g + n g G$ ; donc les quatre angles  $m K k + m k K + n G g + n g G$  valent deux angles droits. Mais à cause des triangles isocèles  $Kmk$ ,  $Gng$  (parce que  $BH = HG = BF$ ,  $hg = Bh = Bf$  &  $hn = HG = FK$ ), on doit avoir  $ng = nG$ ; on a aussi  $Km = mk$ , l'angle  $mkK = m k K$  &  $ngG = n G g$ . Donc les deux angles  $m k K + n g G$ , ou leurs égaux  $CKF + BGH$  valent un angle droit; donc ils valent 2.  $CBR$ , donc les trois angles  $CKF$ ,  $CBR$ ,  $BGH$  sont en proportion continue arithmétique. Ce qui étant la principale propriété des trajectoires

réci-proques, il est évident que la courbe ABC est une trajectoire réci-proque, qui étant située dans une situation renver-sée, de ma-nière que la partie BA ac-quièrre la situation Ba (fig. 9.), tandis que la partie BC devient Bc, se coupera toujours à angles droits, si on la fait mouvoir parallèlement à BR. Si la ligne PBQ (fig. 8) est droite, la trajectoire ABC sera aussi une ligne droite.

315. De la propriété démontrée ci-dessus, nous pouvons en tirer une autre qui nous conduira à une analyse expéditive. Quelque part qu'on mène la ligne IP (fig. 7) qui fasse avec BR l'angle BRP égal à l'angle CBE, dans lequel la courbe doit toujours se couper elle-même, ayant pris  $RI = RP$ ; & les infini-ment petites  $Ii = Pp$ , & mené les lignes PK, pk, IG, ig, parallèlement à BR; ayant de plus mené gn, Km parallèlement à PI: il est visi-ble que les angles Kmp, gnI sont chacun  $= BRP = CBE$ ; de même les deux angles Ckm + kKm, aussi-bien que CGn + Ggn sont égaux à CBE; mais par la propriété démontrée Ckm + CGn, ou CKP + CGn = CBE; donc Ckm + CGn = CGn + Ggn; & Ckm = Ggn; mais d'ailleurs kKm = Gng; donc les triangles Kmk, Gng sont sembla-bles, & l'on a la proportion Gn : ng :: Km : km; donc Gn.km = ng.mK = Ii.Pp =  $-dx^2 = -(Pp)^2$ ; ainsi lorsque le rectangle des différentielles des ordonnées également distantes de l'ordonnée moyenne BR sera égal au produit des différentielles des abci-sses cor-respondantes CP, CI (en prenant ces différentielles d'égale longueur, l'une avec le signe + & l'autre avec le signe -), la courbe sera une trajectoire réci-proque, & elle se coupera sous un angle BRP égal à celui que les ordonnées font avec les abci-sses.

316. CETTE propriété fait voir que la loga-rithmique est une trajectoire réci-proque. Ce que je démontre ainsi: ayant décrit une logarithmique gk (fig. 10), dont PI soit l'asymptote, & dont l'ordonnée BR soit égale à la sous-tangente = a, je prends RI = RP & les infini-ment petites égales Ii & Pp; je fais de plus RP = x, KP = y. Par la nature de la courbe

l'on a l'équation  $a = \frac{y dx}{dy}$ , ou  $km = dy = \frac{y dx}{a}$ .  
 Par la propriété de la logarithmique l'on a  $KP : BR :: BR : GI$ , ou  $y : a :: a : GI = \frac{a a}{y}$ ; donc  
 $d.(GI) = Gn = \frac{-a^2 dy}{y^2}$ ; mais  $\frac{a}{y} = \frac{dx}{dy}$  (par la nature de la courbe); donc  $Gn = \frac{-a dx}{y}$ ; donc  
 $km. Gn = -dx^2 = -(Pp)^2 = -(Ii)^2$ . Ainsi si l'on fait tourner la logarithmique  $gK$  autour de  $BR$ , & qu'on la fasse ensuite mouvoir parallèlement à  $BR$ , elle se coupera toujours sous un angle  $BRP$ . L'angle de section sera droit, aigu ou obtus, selon que l'angle  $BRP$  sera droit, aigu ou obtus.

317. Il est aisé de voir que la propriété trouvée fournit un moyen facile de trouver un nombre infini d'équations qui appartiennent toutes à des trajectoires réciproques. Car il suffit de supposer  $dy = dx$  multiplié par une fraction qui ait les mêmes termes au numérateur & au dénominateur, avec cette seule différence que les puissances paires doivent être affectées du même signe; mais les puissances impaires doivent avoir des signes différens. En effet si on suppose que l'abscisse  $-x$  est égale à l'abscisse  $+x$ , avec la seule différence que l'une est négative & l'autre positive, on aura alors  $dy = -dx$  multiplié par une fraction, dont le dénominateur sera égal au numérateur de la première fraction, & le numérateur de la seconde égal au dénominateur de la première, (dans cette dernière hypothèse, je marque la différence de l'ordonnée par  $d'y$ ). Ainsi l'on aura  $d'y. d'y = -dx^2$ ; donc la courbe sera une trajectoire réciproque.

Soit  $\frac{M}{N}$  une fraction telle que si on écrit  $-x$  au lieu de  $x$ , on ait  $\frac{N}{M}$ , prenez  $P$  fraction de  $x$ , telle qu'en

mettant  $-x$  pour  $x$ , elle reste la même. Décrivez la courbe dont les co-ordonnées soient  $S.P dx$ , &  $S. \frac{MP}{N} dx$ ; je dis qu'elle sera une trajectoire réciproque. Prenez  $RP = RI$  (fig. 7)  $= S.P dx$ , on aura  $PK = S. \frac{MP dx}{N}$ ; puisque les intégrales désignent, par supposition, les co-ordonnées d'une même courbe,  $R$  étant l'origine des abscisses. Donc en changeant  $x$  ( $RP$ ) en  $-x$  ( $RI$ ), on aura  $IG = S. \frac{-NP dx}{M}$ ; donc le rectangle des différentielles des ordonnées correspondantes à  $x$  & à  $-x$  sera  $= -P^2 dx^2$ , c'est-à-dire que  $dy.d'y = -(Pp)^2$ ; car puisque  $S.P dx = RP$ ,  $P dx = Pp$ .

318. POUR trouver tant de courbes algébriques qu'on voudra qui soient des trajectoires réciproques, il faut faire en sorte que la fonction  $P$  de  $x$  rende intégrables les formules  $P dx$ ,  $\frac{MP dx}{N}$ , ce qui en prenant pour  $\frac{M}{N}$  une fraction rationnelle, peut se faire de plusieurs manières. Voici un moyen très-facile de réussir. Je fais  $P = MN$ ; donc  $P dx = MN dx$ , &  $\frac{MP dx}{N} = MM dx$ ; mais ces formules sont intégrables algébriquement, puisque  $M$  &  $N$  sont des fonctions algébriques & entières; donc les co-ordonnées de la courbe cherchée peuvent s'obtenir algébriquement, aussi-bien que la courbe (\*).

---

(\*) Supposons  $dy = \frac{M dx}{N} = dx. \frac{a^3 - x^3}{a^3 + x^3}$ ,  $P =$

*Usages du Calcul intégral dans la recherche des courbes par quelque propriété donnée.*

319. QUOIQUE nous ayons déjà donné plusieurs exemples par lesquels les commençans peuvent se former une

$$a^6 - x^6, \text{ nous aurons } S. P d x = a^6 x - \frac{x^7}{7} = \frac{7a^6 x - x^7}{7} \text{ \& } S. \frac{M P}{N} d x = S. M M d x = a^6 x -$$

$\frac{1}{7} a^3 x^4 + \frac{1}{7} x^7 + C$  (C étant une constante arbitraire qu'on peut déterminer à volonté). Pour construire la courbe CA (fig. 7), dont les co-ordonnées sont S. P d x & S. M M d x, je prends  $ab = a$ , & faisant  $bh = x$ ,

je cherche une ligne  $RP = \frac{7a^6 x - x^7}{7}$  (voyez dans la

*première Partie de cet Ouvrage la construction géométrique des équations*). Sur cette ligne j'ordonne  $PK = a^6 x - \frac{1}{7} a^3 x^4 + \frac{1}{7} x^7 + C$ , il est visible que le point K & tous les autres trouvés de cette manière, en donnant différentes valeurs à  $bh$ , appartiendront à la courbe cherchée dont l'ordonnée  $y = a^6 x - \frac{1}{7} a^3 x^4 + \frac{1}{7} x^7 + C$ ,  $x$  étant  $bh$  &  $a$  étant  $ab$ . Si l'on change le signe de RP

pour avoir  $-RP = RI = \frac{x^7 - 7a^6 x}{7}$ , on aura, en mettant  $-x$  pour  $x$ ,  $IG = -a^6 x - \frac{1}{7} a^3 x^4 - \frac{1}{7} x^7 + C$ .

Soit encore  $dy = dx. \frac{a+x}{a-x}$ , nous aurons  $M = a + x$ ,  $N = a - x$  &  $P = a^2 - x^2$ ; donc  $S. P d x = a^2 x - \frac{x^3}{3} = \frac{3a^2 x - x^3}{3} = \zeta$ , &  $S. M M d x = a^2 x + ax^2 + \frac{x^3}{3} + C = y(A)$ ; de sorte que les

idée de la manière dont on peut employer le Calcul intégral dans la recherche des courbes, nous pensons qu'il ne sera pas inutile d'ajouter ici la solution de quelques autres problèmes assez curieux.

320. PROBLÈME. *Trouver une courbe dans laquelle l'arc soit une fonction algébrique X de l'abscisse x.* L'élément de l'arc, en supposant les ordonnées perpendiculaires aux abscisses, étant  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ , l'on aura  $\sqrt{dx^2 + dy^2} = p dx$ , en supposant  $dX = p dx$ ; donc  $dx^2 + dy^2 = p p dx^2$ ;  $dy^2 = dx^2 (p p - 1)$ ;  $dy = dx \sqrt{(p p - 1)}$ . Supposons  $X = a x^{\frac{1}{2}}$  pour avoir  $p dx = \frac{1}{2} a x^{-\frac{1}{2}} dx = b x^{\frac{1}{2}} dx$ , en faisant  $\frac{1}{2} a = b$ ; donc  $dy = dx \sqrt{(b b x - 1)}$  &  $y = \frac{2}{3 b b} (b b x - 1)^{\frac{3}{2}} + C$ , équation d'une courbe qui a la propriété demandée. Il n'est pas difficile de déterminer la constante C, puisqu'il n'y a qu'à supposer que  $x$  &  $y$  deviennent 0 en même-tems.

Si l'on demande une courbe dont l'arc soit une fonction algébrique Y de l'ordonnée, on aura  $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dY = p dy$ , en faisant  $dY = p dy$ ; donc  $dx^2 = p^2 dy^2 - dy^2$  &  $dx = dy \sqrt{(p p - 1)}$ . Si

co-ordonnées de la courbe cherchée, sont  $y$  &  $z$ , & il est facile de construire la trajectoire. Pour avoir l'équation entre les  $RP = z$  & les  $PK = y$ , je fais  $C =$

1. 1.  $C = \frac{a^3}{3}$ , & multipliant l'équation A par 3, il vient  $x^3 + 3 a x^2 + 3 a^2 x + a^3 = 3 y$ ; d'où je tire  $x + a = \sqrt[3]{3 y}$  &  $x = -a + \sqrt[3]{3 y}$ . Substituant cette valeur dans l'équation  $\frac{3 a^2 x - x^3}{3} = z$ , il vient  $3 a^2 \sqrt[3]{3 y} - 3 a^3 - (-a + \sqrt[3]{3 y})^3 = 3 z$ , équation qu'il est facile de rendre rationnelle par les méthodes ordinaires.

on suppose que  $Y$  est  $= \frac{1}{3} a y^{\frac{1}{3}}$ , on aura  $p = a y^{\frac{1}{3}}$  &  $dx = dy \sqrt{(a^2 y - 1)}$ ; donc  $x = \frac{2}{3 a a} (a a y - 1)^{\frac{1}{2}} + C$ , équation qui résout le problème.

321. PROBLEME. Trouver la courbe BD rapportée à la ligne droite AG, dans laquelle ayant mené la tangente DT l'on a toujours DT : DF, dans un rapport donné, & telle qu'en tirant ensuite la ligne FG perpendiculaire à AG, jusqu'à la rencontre de DK normale à la courbe BD, on ait toujours DK égale au rayon osculateur R de la courbe cherchée (fig. 11). Ayant mené les lignes que représentent la figure, soit Ae, ou AE = x, ep = y, l'élément pD de la courbe = ds, pi = -dy (car x augmentant y diminue). Les triangles semblables ipD, ETD donnent  $-dy : dx :: y : ET = \frac{-y ds}{dy}$ . On a aussi

DT =  $\frac{-y ds}{dy}$ . Si l'on demande que DT soit à

DF :: 1 : n, on aura  $DF = -\frac{n y ds}{dy}$ .

Je remarque maintenant que le triangle rectangle FDK est semblable à FTG, & par conséquent à TED;

donc FD : KD :: ED : ET, ou  $\frac{-n y ds}{dy} : R :: y :$

$\frac{-y ds}{dy} :: -dy : dx$ . Donc  $R = \frac{n y dx ds}{dy^2}$ ; mais

(section 1<sup>e</sup>, 101.)  $R = \frac{-ds^3}{dy ddx - dx ddy}$ , je mets

le signe — parce que le rayon osculateur n'est pas situé

du même côté que les ordonnées. Donc  $\frac{n y dx ds}{dy^2} =$

$\frac{-ds^3}{dy ddx - dx ddy}$ , &  $n y dy dxdx - n y dx^2 ddy$



$= -dy^2 ds^2 = -dy^2 dx^2 - dy^4$ , équation que je dispose ainsi  $dx^2 \left( \frac{n dx}{dx} - \frac{n dy}{dy} + \frac{dy}{y} \right) = -\frac{dy^3}{y}$ . Je fais le multiplicateur de  $dx^2 = \frac{d\zeta}{\zeta}$  pour avoir  $\frac{dx^2 d\zeta}{\zeta} = -\frac{dy^3}{y} (A)$ ; mais de la formule de substitution on tire  $\frac{y dx^n}{dy^n} = \zeta$ ; donc  $dx^n = \frac{\zeta dy^n}{y}$ . Prenant la racine  $n$ , & élevant ensuite au carré, il vient  $dx^2 = \frac{\zeta^{2:n} dy^2}{y^{2:n}}$ ; donc l'équation A se changera en celle-ci,  $\zeta^{\frac{2}{n}-1} d\zeta = -y^{\frac{2}{n}-1} dy$ . Donc en intégrant, (ajoutant une constante  $\frac{n A^{2:n}}{2}$ , & multipliant par  $\frac{2}{n}$ ),  $\zeta^{2:n} = A^{2:n} - y^{2:n}$ , ou  $\zeta = \pm (A^{2:n} - y^{2:n})^{n:2}$ ; donc  $\frac{y dx^n}{dy^n} = \pm (A^{2:n} - y^{2:n})^{n:2}$ , &  $dx = \pm \frac{dy (A^{2:n} - y^{2:n})^{1:2}}{y^{1:n}}$ . Dans le cas de la figure on doit donner le signe  $-$  à  $dy$ , parce que  $x$  croissant  $y$  diminue. Supposons que  $n$  est  $= 1$ ; donc en faisant  $A = a$ , l'on aura  $dx = \frac{-dy \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$ , équation de la trajectrice.

Les choses, étant disposées comme ci-dessus, supposons qu'on demande que DT soit à DF en raison donnée de  $a : b$ . Faisant  $\frac{a}{b} = \frac{1}{n}$ , nous aurons

$DF = \frac{-ny ds}{dy}$ , & nous parviendrons de même à

l'équation  $dx = \frac{\pm dy(A^{2:n} - y^{2:n})^{\frac{1}{2}}}{y^{1:n}}$ . si  $a:b::1:2$ , on aura  $n=2$  &  $dx = \frac{\pm dy\sqrt{(A-y)}}{\sqrt{y}} = \frac{\pm dy\sqrt{(Ay-y^2)}}{y}$ , équation à une cycloïde, en prenant les  $x$  sur la tangente au sommet.

Si  $a:b::1:-2$ , on aura  $dx = \frac{\pm dy\sqrt{(y-A)}}{\sqrt{A}}$   
 $= \pm \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{A}}$  (en faisant  $y-A=z$ ), équation intégrable qui appartient à la seconde parabole cubique.

Enfin (section 2, n°. 1.) si  $-\frac{1}{n} + 1 = \frac{2}{n}$ , ou si  $\frac{2n-2}{2n} = \frac{2}{n} = \frac{4}{2n}$ , ou si  $2n=6$ , ou  $n=3$ , on pourra intégrer l'équation algébriquement. On pourra aussi intégrer toutes les fois que  $-\frac{1}{n} + 1 = \frac{2n-2}{2n}$  sera exactement divisible par  $\frac{2}{n}$  & donnera un nombre entier positif, c'est-à-dire, toutes les fois que  $\frac{n-1}{2}$  sera un nombre entier positif. Donc  $p$  étant un nombre entier positif quelconque, si l'on a  $\frac{n-1}{2} = p$ , ou  $n-1 = 2p$ , ou  $n = 2p + 1$ , l'on parviendra à une équation algébrique qui exprimera la nature de la courbe.

322. PROBLEME. On demande une courbe BC (fig. 12) rapportée à un foyer A, dans laquelle ayant mené AQ perpendiculaire à la normale CQ de la courbe, le rayon osculateur soit à CQ, en raison donnée de  $a:b$ . Soit CQ

$= p$ , on aura  $R : p :: a : b$ ; donc  $R = \frac{ap}{b} = \frac{y dy}{dp}$ ,

$\frac{ap dp}{b} = y dy$ ; donc en intégrant & ajoutant une

constante  $\frac{bA}{2}$ ,  $\frac{ap p}{b} + bA = y^2$ ,  $p = \sqrt{\left(\frac{byy - bbA}{a}\right)}$

$= \frac{y dx}{ds}$  (voyez 1<sup>re</sup> sect. n<sup>o</sup>. 101). Mais  $ds^2 = dx^2 +$

$dy^2 = \frac{ayy dx^2}{byy - bbA}$ ; donc  $dy \cdot \frac{\sqrt{(byy - bbA)}}{\sqrt{[(a-b)yy + bbA]}}$

$= dx$ . Si  $a = b$ , l'on a  $dx = \frac{dy \sqrt{(yy - aA)}}{\sqrt{aA}} =$

$\frac{dy \sqrt{(yy - bb)}}{b}$  (en faisant  $\sqrt{aA} = b$ ), équation

à la développante d'un cercle dont le rayon  $= b$  (voyez section précédente n<sup>o</sup>. 27). Si on n'ajoute point de

constante dans l'intégration, ou ce qui revient au même

si l'on suppose  $A = 0$ , on aura  $dx = \frac{dy \sqrt{b}}{\sqrt{(a-b)}}$ ,  
ou  $dx = c dy$ , (dans laquelle, pour éviter les ima-

ginaires,  $b$  ne doit pas être plus grand que  $a$ ). Cette

équation appartient à la spirale logarithmique.

323. PROBLEME. Trouver une courbe rapportée à un

axe dans laquelle le rayon osculateur est une fonction quel-

conque de  $y$ . En employant la formule  $R = \frac{b dy}{dp}$ , nous

aurons  $dp = \frac{b dy}{R}$  &  $p = S. \frac{b dy}{R} + A$ , mais  $p =$

$\frac{b dx}{ds}$ . Ainsi  $\frac{b dx}{ds} = S. \frac{b dy}{R} + A$ ; donc  $\frac{b dx}{ds}$  doit

être une fonction de  $y$  que je ferai  $= z$  pour avoir  $z$

$= S. \frac{b dy}{R} + A$ . Mais  $\frac{b dx}{ds} = z$ ; donc  $b dx = z ds$ ,

$b^2 dx^2 = \tau \tau ds^2 = \tau^2 dx^2 + \tau^2 dy^2$ , &  $dx = \frac{\tau dy}{\sqrt{(bb - \tau\tau)}}$ , équation dans laquelle les ordonnées sont séparées, puisque  $\tau$  est une fonction de  $y$ .

324. PROBLEME. Quelle est la courbe rapportée à un foyer dans laquelle le rayon osculateur est une fonction de  $y$ ?

Puisque  $R = \frac{y dy}{dp}$ , nous aurons  $dp = \frac{y dy}{R}$  &

$$S. \frac{y dy}{R} + A = p = \frac{y dx}{ds}.$$

325. PROBLEME. D'un point donné A ayant mené les lignes AB, AC (fig. 13), à la courbe BC, la première au point donné B, la seconde à un point quelconque C, & tiré les lignes BE, CE perpendiculaires à la courbe, on demande la nature de cette courbe, lorsque BAC doit toujours être égal à l'angle BEC. Ayant pris l'arc infiniment petit CD, je mene le rayon AD & le rayon osculateur DQ. Puisque l'angle CQD = BPD = BEC(\*), CQD sera la différentielle de l'angle BEC, comme CAD est celle de l'angle BAC; donc en supposant que  $a = n$ , l'on aura CAD : CQD ::  $a : n$ ; mais si du point A nous décrivons l'arc Cp =  $dx$ , & que nous fassions CD =  $ds$ , le rayon osculateur CQ = R, le sinus total = 1 & le rayon AC de la courbe =  $y$ , nous aurons AC : Cp :: 1 : CAD, (on peut, si l'on veut, entendre par CAD la mesure de cet angle par un arc de cercle décrit

avec le rayon 1) =  $\frac{Cp}{AC}$ . On aura aussi CQD =

$$\frac{CD}{CQ}; \text{ donc } \frac{dx}{y} : \frac{ds}{R} :: a : n, \text{ ou } \frac{ndx}{ay} = \frac{ds}{R}.$$

$$R = \frac{y ds^3}{dx ds^2 + y dy dx - y dx dy};$$

(\*) Car l'angle BEC = PEQ & l'angle BPD extérieur au triangle PEQ vaut les deux intérieurs opposés.  
donc

donc on aura  $\frac{ds}{R} = \frac{n dx}{ay} = \frac{dx ds^2 + y dy ddx - y dx ddy}{y ds^2}$ ,  
 ou  $\frac{(n-a) dx ds^2}{y} = a (dy ddx - dx ddy)$ , mais  $n - a = 0$ ; donc  $dy ddx - dx ddy = 0$ , ou en divisant par  $dy^2$ ,  $\frac{dy ddx - dx ddy}{dy^2} = 0$ ; donc en intégrant,  $\frac{dx}{dy} = C$ , équation à la spirale logarithmique.

326. PROBLEME. Supposant que le côté CN du rayon osculateur (voyez section 1<sup>e</sup>, n<sup>o</sup>. 101) est une fonction de l'arc AC = s, trouver la nature de la courbe AC (fig 14).

Soit CN = u, nous aurons  $u = \frac{dx ds^2}{dy ddx - dx ddy}$   
 (sect. 1<sup>e</sup>, n<sup>o</sup>. 101), ou  $\frac{dx ds^2}{u} = dy ddx - dx ddy$

Soit  $\frac{dx}{dy} = \frac{t}{a}$ , &  $dy ddx - dx ddy = \frac{dt \cdot dy^2}{a}$ ;

donc  $\frac{dx ds^2}{u} = \frac{dt dy^2}{a}$  (A). Mais l'équation  $\frac{dx}{dy} =$

$\frac{t}{a}$  donne  $a a dx^2 = t t dy^2$ ; ainsi  $\frac{(a a + t t) dx^2}{t t}$

$= dy^2 + dx^2 = ds^2 = \frac{(a a + t t) \cdot dx^2}{t t}$ ; donc

$dx = \frac{t ds}{\sqrt{(a a + t t)}}$ , &  $dy = \frac{a ds}{\sqrt{(a a + t t)}}$ .

substituant ces valeurs dans l'équation A, il vient

$\frac{t ds^3}{u \sqrt{(a a + t t)}} = \frac{a dt ds^2}{a a + t t}$ , ou  $\frac{ds}{u} = \frac{a dt}{t \sqrt{(a a + t t)}}$ ,

équation dans laquelle les variables sont séparées, puisque s est une fonction de u.

327. PROBLEME. Etant donné un point A (fig. 15) situé sur une droite AB, donnée de position, trouver la courbe MC dans laquelle ayant mené la normale BC, l'on a toujours  $AB : BC :: m :: n$ , c'est-à-dire en raison donnée

de  $m : n$ . Soit  $AB = t$ , l'on aura  $BC = \frac{n \cdot t}{m}$ . Menons

CD perpendiculaire à BA, & faisons  $AD = x$ ,

$DC = y$ . Le triangle rectangle BCD donnera  $\frac{nn \cdot tt}{mm}$

$= y^2 + (t - x)^2$ , d'où l'on tire  $t =$

$\frac{mmx \pm m \sqrt{[nnxx - yy \cdot (mm - nn)]}}{mm - nn}$ , équation

que je désigne par (B). Mais la propriété de la normale donne  $dx : dy :: y : t - x$ , ou  $(t - x) \cdot dx$

$= y dy$ ; or par l'équation ci-dessus,  $y dy = \frac{nn}{mm} t dt$

$-(t - x) \cdot (dt - dx)$ ; donc  $(t - x) \cdot dx = \frac{nn}{mm} \times$

$t dt - (t - x) \cdot dt + (t - x) \cdot dx$ . Effaçant les termes

qui se détruisent &c. transposant,  $(t - x) \cdot dt =$

$\frac{nn}{mm} t dt$ ; d'où l'on tire  $\left(\frac{mm - nn}{mm}\right) \cdot t dt = x dt$ .

Cette équation fournit ces deux autres  $dt = 0$ ,

$\frac{mm - nn}{mm} \cdot t = x$ . Par la première  $t = A$ , sub-

stituant cette valeur dans l'équation B, il vient

$\frac{mmx \pm m \sqrt{[nnxx - yy \cdot (mm - nn)]}}{mm - nn} = A$ , ou  $\pm$

$m \sqrt{[nnxx - yy \cdot (mm - nn)]} = (mm - nn) \cdot A$

$- mmx$ , &c en quarrant,  $m^2 \cdot n^2 \cdot x^2 - m^2 \cdot y^2 \cdot (m^2 - n^2)$

$= (mm - nn) \cdot A^2 - 2m^2 \cdot (mm - nn) \cdot Ax +$

$m^4 x^2$ , ou  $-m^2 y^2 \cdot (mm - nn) - A^2 \cdot (mm - nn)^2$

$= m^2 \cdot (mm - nn) \cdot x^2 - 2m^2 \cdot (mm - nn) \cdot Ax$ . Si

l'on divise par  $mm (mm - nn)$ , il viendra  $-y^2 - \frac{A^2 (mm - nn)}{mm} = x^2 - 2Ax$ ; & en ajoutant  $A^2$  de part & d'autre, on trouvera  $\frac{nnA^2}{mm} - y^2 = (x - A)^2 = z^2$  (en faisant  $x - A = z$ ); mais  $\frac{nnAA}{mm} - yy = zz$  est l'équation à un cercle dont le rayon  $= \frac{nA}{m}$ , & l'abscisse  $= z$ ; ainsi la courbe cherchée est un cercle.

328. PROBLEME. Trouver la nature de la courbe BDC décrite dans l'angle droit CAB, telle que chaque tangente GDH, terminée par les côtés de l'angle A, soit constante &  $= a$  (fig. 16). Du point de contact D, je mène des parallèles aux côtés de l'angle A, & faisant  $AE = FD = x$ ,  $ED = AF = y$ , j'aurai la sous-tangente  $EG = \frac{-ydx}{dy}$ ,  $FH = \frac{-xdy}{dx}$  (la sous-tangente EG a le signe  $-$ , parce que  $x$  augmentant  $y$  diminue). Donc  $AG = x - \frac{ydx}{dy} = \frac{xdy - ydx}{dy}$ ,  $AH = y - \frac{xdy}{dx} = -\left(\frac{xdy - ydx}{dx}\right)$ . Donc  $HG^2 = \left(\frac{1}{dx^2} + \frac{1}{dy^2}\right) \cdot (xdy - ydx)^2 = aa$ , ou  $xdy - ydx = \frac{adx dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$ , ou  $x = \frac{y dx}{dy} + \frac{adx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$ . Soit  $x = S. - \frac{z dy}{a}$ , &  $dx = \frac{-z dy}{a}$ . Ayant fait la substitution, je trouve  $S. \frac{-z dy}{a} = \frac{-zy}{a} + \frac{az}{\sqrt{(aa + zz)}}$ . Je donne le signe  $+$  au dernier terme, parce que la racine quarrée de  $dy^2$

doit avoir le signe —. Si l'on différencie cette équation, on trouvera  $\frac{-z dy}{a} = \frac{-z dy}{a} - \frac{y dz}{a} + \frac{a^3 dz}{(aa + zz)^{\frac{1}{2}}}$ ,

$$\text{ou } \frac{y dz}{a} = \frac{a^3 dz}{(aa + zz)^{\frac{1}{2}}}. \text{ D'où l'on tire } dz = 0,$$

$$\& y = \frac{a^4}{(aa + zz)^{\frac{1}{2}}}. \text{ Donc } z = A, \& \text{ par consé-}$$

quent  $x = S. \frac{-A dy}{a} = B - \frac{Ay}{a}$ , équation à une ligne droite. Pour avoir la position de cette droite, il faut déterminer B en A. Si l'on substitue la valeur

$$\text{de } x \& \text{ de } dx \text{ que donne cette équation, dans } x = \frac{y dx}{dy} + \frac{a dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}, \text{ on trouvera } B - \frac{Ay}{a} = \frac{-Ay}{a} + \frac{Aa}{\sqrt{(AA + aa)}}, \text{ ou } B = \frac{Aa}{\sqrt{(AA + aa)}}. \text{ Donc}$$

$$x = \frac{Aa}{\sqrt{(AA + aa)}} - \frac{Ay}{a}.$$

Mais laissant la ligne droite que nous ne cherchons pas, examinons ce qui peut résulter de l'équation  $y = \frac{a^4}{(aa + zz)^{\frac{1}{2}}}$ , qui donne  $z =$

$$\frac{\left(a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}{y^{\frac{1}{3}}}. \text{ L'on aura donc } x = S. \frac{-z dy}{a} = S. \frac{-dy}{y^{\frac{1}{3}}} \cdot \left(a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}; \text{ donc } x = A + \left(a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Afin de déterminer la constante A, je substitue la valeur de  $x$  & de  $dx$  que donne cette équation dans  $x = \frac{y dx}{dy} + \frac{a dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$ , pour avoir  $A + \left(a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} =$



$y^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = -y^{\frac{2}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{2}{3}} \cdot \left(a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$   
 $= \left(a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ ; équation qui ne peut être vraie qu'en  
 supposant  $A=0$ ; donc l'équation de la courbe cherchée  
 est  $x = \left(a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ , ou  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ , équation  
 à une ligne du sixième ordre.

329. PROBLEME. On demande la nature de la courbe  
 BDC décrite entre les côtés de l'angle droit précédent,  
 dans laquelle le produit  $AG^m AH^n$  est constant & =

$a^{m+n}$ . L'on aura donc  $\pm \frac{(x dy - y dx)^{m+n}}{dy^m dx^n} =$

$a^{m+n}$ , le signe + a lieu si  $n$  est pair, & le signe -  
 si  $n$  est impair. Donc  $x dy - y dx = a \cdot (\pm$

$dy^m dx^n)^{\frac{1}{m+n}}$ , &  $x = \frac{y dx}{dy} + \frac{a \cdot (\pm dy^m dx^n)^{\frac{1}{m+n}}}{dy}$ .

Faisons comme ci-dessus  $x = S \cdot \frac{-z dy}{a}$ , pour avoir

$S \cdot \frac{-z dy}{a} = \frac{-zy}{a} + \frac{a \cdot \left(\pm dy^m \frac{z^n dy^n}{a^n}\right)^{\frac{1}{m+n}}}{dy}$

$= -\frac{zy}{a} + a^{\frac{m}{m+n}} z^{\frac{n}{m+n}}$ . En prenant les diffé-

rences, divisant par  $dz$  & transposant, il vient  $\frac{y}{a} =$

$\frac{n}{m+n} \cdot a^{\frac{m}{m+n}} z^{\frac{-m}{m+n}}$ , ou  $z^{\frac{m}{m+n}} = \frac{n}{m+n} \times$

$$\frac{a^{\frac{2m+n}{m+n}}}{y^{\frac{m+n}{m}}}, \text{ ou } z = \left( \frac{n}{m+n} \right)^{\frac{m+n}{n}} \cdot \frac{a^{\frac{2m+n}{m}}}{y^{\frac{m+n}{m}}}.$$

$$\text{Mais } x = S \frac{-z' dy}{a}; \text{ donc } x = \left( \frac{n}{m+n} \right)^{\frac{m+n}{m}} \times$$

$$S. \frac{-a^{\frac{m+n}{m}} dy}{y^{\frac{m+n}{n}}}. \text{ Si l'on prend cette intégrale sans}$$

ajouter aucune constante (ce qui seroit superflu dans

$$\text{ce cas}), \text{ il viendra } x = \frac{m}{n} \cdot \left( \frac{n}{m+n} \right)^{\frac{m+n}{m}} \times$$

$$\frac{a^{\frac{m+n}{m}}}{y^{\frac{m+n}{m}}}, \text{ ou } x^m y^n = \left( \frac{m}{n} \right)^m \cdot \left( \frac{n}{m+n} \right)^{m+n} \times$$

$a^{m+n}$ , équation qu'on peut facilement réduire à celle-ci,  $x^m y^n = b^{m+n}$ , qui appartient à une infinité d'hyperboles.

330. PROBLEME. Les mêmes choses étant supposées trouver la courbe dans laquelle  $\overline{AG}^m + \overline{AH}^m = a^m$ . On trouve

aisément l'équation  $\left( \frac{1}{dy^m} \pm \frac{1}{dx^m} \right) \cdot (x dy - y dx)^m = a^m$ ; le signe supérieur a lieu lorsque  $m$  est pair &

l'inférieur si  $m$  est impair. Donc  $x = S. \frac{-z dy}{a} = \frac{y dx}{dy}$

$$+ \frac{a dx}{(dx^m \pm dy^m)^{\frac{1}{m}}} = \frac{-zy}{a} + \frac{az}{(a^m + z^m)^{\frac{1}{m}}},$$

Fig. 3.

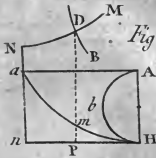


Fig. 4.

Fig. 7.

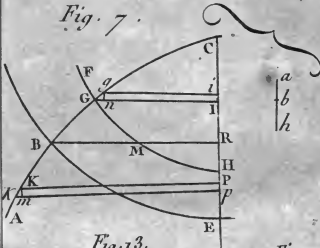


Fig. 13.

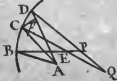


Fig. 14.



Fig. 15.





$$x - z dy = -z dy - y dz + \frac{a^{m+1} dz}{(a^m + z^m)^{\frac{m+1}{m}}},$$

$$\text{ou } y = \frac{a^{m+1}}{(a^m + z^m)^{\frac{m+1}{m}}}, \text{ ou } a^m + z^m =$$

$$a^m \cdot \frac{a^{\frac{m}{m+1}}}{y^{\frac{m}{m+1}}}, \text{ \& } z = a \cdot \frac{\left(\frac{m}{a^{\frac{m}{m+1}}} - y^{\frac{m}{m+1}}\right)^{\frac{1}{m}}}{y^{\frac{1}{m+1}}}. \text{ Donc}$$

$$x = S. \frac{-z dy}{a} = S. \frac{-dy}{y^{\frac{1}{m+1}}} \cdot \left(a^{\frac{m}{m+1}} - y^{\frac{m}{m+1}}\right)^{\frac{1}{m}} =$$

$$\left(a^{\frac{m}{m+1}} - y^{\frac{m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{m}}, \text{ ou } x^{\frac{m}{m+1}} + y^{\frac{m}{m+1}} =$$

$$a^{\frac{m}{m+1}}, \text{ équation de la courbe cherchée.}$$



# CALCUL

## DES VARIATIONS.

1. **L**A *variation* d'une quantité est l'accroissement infiniment petit qui arrive à cette quantité. Si on conçoit, par exemple, que  $x$  soit augmenté d'une quantité infiniment petite que nous désignerons par  $vx$ , de manière qu'il devienne  $x + vx$ ,  $vx$  sera la variation de  $x$ . Dans tout ce que nous dirons sur le Calcul des variations, nous employerons la lettre  $v$  pour désigner la variation: ainsi  $vy$  désignera la variation de  $y$ , c'est-à-dire, l'accroissement infiniment petit que  $y$  est supposé recevoir.

C'est à M. de la Grange, célèbre Mathématicien, que nous devons les premières notions du beau Calcul des variations, Calcul dont on peut faire usage dans la résolution des problèmes très-difficiles. Mais pour fixer les idées, supposons que  $BD$  (fig. 1) représente l'ordonnée d'une courbe. Si l'on augmente cette ordonnée d'une quantité  $Db$  infiniment petite, le point  $b$  appartiendra à la courbe variée  $amb$  qui différera infiniment peu de la courbe  $AM$ , pourvu qu'on prenne les variations (des ordonnées) infiniment petites.

Si on propose de mener du point  $A$  à la courbe  $CD$ , une courbe  $AM$  qui soit susceptible d'un *maximum* ou d'un *minimum*, la courbe variée  $am$  ne différant qu'infiniment peu de la courbe  $AM$ , lorsqu'on supposera que la différence s'évanouit, le point  $m$  tombera sur le point  $M$ , & la variation de l'ordonnée  $PM$  fera  $= 0$ . A l'égard du point  $A$ , il est visible que dans ce cas l'ordonnée correspondante ne doit subir aucune variation. Pour ce qui regarde l'abscisse  $AB$ , on doit lui donner une variation qui s'accorde avec la nature de la courbe  $CD$ . Ainsi pour que le calcul puisse s'appliquer à cette variation, il est nécessaire que pour tous les points de la courbe  $AD$  situés entre  $A$  &  $D$  on attribue des variations, soit aux abscisses, soit aux ordonnées.

S'il est question de mener entre deux courbes données  $AN$ ,  $Cn$ , une courbe  $Nn$  qui soit susceptible

d'un *maximum* ou d'un *minimum* ; on doit aussi concevoir des variations non-seulement aux ordonnées, mais encore aux abscisses. Pour nous faire mieux entendre, supposons que lorsque  $BP = x$  (fig. 4) augmente de la quantité  $Pp = dx$ , l'ordonnée  $PM = y$  devient  $= pN + Nn = y + dy$ . Supposons que la variation de  $BP$  soit  $= Pg$ , & que celle de  $Pp$  soit  $= gD$ , celle de  $Bp$  sera  $= pD = v(x + dx) = vx + vdx$ , tandis que  $v(y + dy) = vpn$  est  $= bm$  ; alors  $Dm$  sera l'ordonnée de la courbe variée, correspondante à l'abscisse  $Bp$ , & à l'ordonnée  $pn$  de la courbe  $AM$ .

Au reste, après avoir trouvé une *courbe variée*, on ne passe pas à la courbe qui seroit la variée de celle-ci ; c'est pourquoi dans ce calcul on ne considère nullement la variation de la variation, ou la seconde variation, au lieu que dans le calcul différentiel on considère la différentielle de la différentielle ; ainsi ces calculs sont bien différens.

Les variations ne sont assujetties à aucune loi ; elles sont indépendantes l'une de l'autre : il suffit seulement qu'elles soient infiniment petites. L'on peut donc supposer qu'une seule ordonnée  $PM$  reçoit une variation, tandis que les autres ordonnées ne varient nullement ; mais parce que dans ce cas-là la loi de continuité seroit violée (\*), il sera bon de concevoir que toutes les ordonnées varient, se réservant de supposer nulles toutes les variations, excepté celle dont on a besoin, à la fin de toutes les différenciations & de toutes les intégrations ; de cette manière on gardera du moins une apparence de loi de continuité. On peut donc supposer  $= 0$ , la variation  $Mm$  (fig. 2) de l'ordonnée d'une courbe quelconque  $AM$ , en supposant que les variations des autres ordonnées de la même courbe ne sont pas nulles.

S'il s'agit d'une courbe à double courbure  $BM$  (fig. 3)

---

(\*) C'est une loi par laquelle, si elle existe, comme bien des gens le prétendent, rien ne se fait par saut dans la nature. Nous en parlerons dans la physique.

dont les co-ordonnées soient  $AP = x$ ,  $PD = y$ ,  $DM = z$ , on peut concevoir que la courbe variée *am* résulte des variations des  $z$  seuls. Mais on peut aussi avoir une courbe variée, en faisant varier soit les  $x$ , soit les  $y$ , séparément ou ensemble.

Si nous supposons que dans une courbe à simple courbure les valeurs des ordonnées correspondantes aux  $x$ ,  $x + dx$ ,  $x + 2dx$ ,  $x + 3dx$ , &c. soient respectivement  $y$ ,  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$ , &c. On aura par la nature des différentielles  $d.(vy) = vy' - vy$ ;  $d.(vy') = vy'' - vy'$ ; &c. &  $d.d.(vy) = d.(vy' - vy) = d.(vy') - d.(vy) = vy'' - vy' - vy' + vy = vy'' - 2vy' + vy$ ; l'on a aussi  $d^3vy$  ou  $d^3(vy) = d.(vy'' - 2vy' + vy) = d.vy'' - 2d.vy' + d.vy = 2d.vy'' + d.vy = vy''' - vy'' - 2vy'' + 2vy' + vy' - vy = vy''' - 3vy'' + 3vy' - vy$ , &c.

De-là il suit que si l'ordonnée  $y$  reçoit une variation, les variations des ordonnées  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$ , &c. étant supposées  $= 0$ , aussi bien que celles de  $x$ ,  $x + dx$ , &c. on aura  $d.vy$  ou  $d(vy) = -vy$ ;  $ddvy = +vy$ ;  $d^3vy = -vy$ ;  $d^4vy = +vy$ ; &c.

2. *Le Calcul des variations est la méthode de trouver la variation que reçoit une expression qui renferme un nombre quelconque de variables, en attribuant des variations à une seule variable, à toutes les variables, ou seulement à quelques-unes.*

Soit  $V$  une expression qui renferme les variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Si dans cette expression on substitue  $x + vx$ ,  $y + vy$ ,  $z + vz$ , au lieu de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respectivement, la quantité  $V$  deviendra  $V'$ , & l'expression  $V' - V$  fera la variation de  $V$ . Si on veut que la variation de  $x$ , par exemple, soit nulle, on fera  $vx = 0$ . Si l'on suppose nulle la variation de  $y$ , on fera  $vy = 0$ .

3. *THÉOREME. La variation de la différentielle d'une expression  $V$ , est toujours égale à la différentielle de sa variation; c'est-à-dire,  $v dV = d.(vV)$ , quelle que soit la quantité  $V$ , qui tandis qu'elle croît par des différentielles, reçoit aussi une variation.* On peut considérer  $V$  comme l'ordonnée d'une courbe, qui en passant d'un point de cette courbe à un point infiniment proche,



devient  $V + dV = V'$ , de manière que  $dV = V' - V$ ; donc  $v dV = v(V' - V) = vV' - vV$ . Or  $d v V$  exprime la différence entre  $v V'$  &  $v V$ , donc  $v(V' - V) = d v V = v dV$  (les expressions  $d v V$  &  $d v V$  ont la même valeur, ainsi que  $v dV$  &  $v dV$ ).

COROLLAIRE. Si dans l'équation  $d v V = v dV$ , on écrit  $dV$  au lieu de  $V$ , on aura  $d v dV = v d dV$ ; or  $d v V = v dV$ ; donc  $d d v V = v d dV$ ; donc  $v d dV = d v dV = d d v V$ . Si on écrit encore ici  $dV$  pour  $V$ , on aura égalité entre ces quatre formes:  $v d dV = d v d dV = d d v dV = d d d v V$ ; ensuite entre ces cinq formes  $v d^4 V = d v d^3 V = d d v d^2 V = d^3 v dV = d^4 v V$ , &c. en général on aura  $v d^m V = d^m v d^n V = d^n v V$  ( nous supposons  $m$  &  $n$  entiers, positifs, de manière que  $m = n$ , ou  $< n$ ). En général, la variation d'une différentielle d'un ordre quelconque est égale à la différentielle du même ordre de la variation

REMARQUE. Ce théorème a également lieu, quel que soit le nombre des variables qui entrent dans  $V$ ; car dans la démonstration on peut tenir compte de la seule variable, dont on considère soit la différentielle, soit la variation, sans avoir égard aux autres variables (\*).

(\*) Ainsi en faisant varier  $x$  dans  $V$ , on aura  $v \left( \frac{dV}{dx} \right) dx = d v V$ , faisant varier  $y$ , on a  $v \left( \frac{dV}{dy} \right) dy = d v V$ , de même  $v \left( \frac{dV}{dz} \right) dz = d v V$ ; donc en faisant tout varier, on a toujours  $v dV = d v V$ . Il faut faire attention que lorsqu'on dit que  $v \left( \frac{dV}{dx} \right) dx = d v V$ , on suppose que  $x$  seul reçoit une variation; de manière qu'alors  $v y = 0$ ,  $v z = 0$ , &c.  $dy = 0$ ,  $dz = 0$ , &c. S'il s'agit de faire varier  $y$  seul, on a  $dx = 0$ , &  $v x = 0$ ,  $dz = 0$  &  $v z = 0$ , &c.

4. PROBLEME. Etant données les variations  $vx$ ,  $vy$ , des variables  $x$  &  $y$ , trouver la variation de la formule différentielle,  $p = \frac{dy}{dx}$ . Puisque  $vdy = d.vy$ , & que  $vdx = d.vx$ , la variation cherchée  $vp$  se trouvera par les règles ordinaires de la différenciation, en écrivant le signe  $v$  de la variation à la place du signe  $d$  de la différenciation; de sorte que l'on aura  $vp = \frac{dxdvy - dyd.vx}{dx^2}$ .

Mais par le théorème précédent  $vdy = d.vy$  &  $vdx = d.vx$ ; donc  $vp = \frac{dxdvy - dyd.vx}{dx^2}$ , où l'on peut remarquer que  $v.dx = v(x + dx) - vx$ , &  $dvy = v(y + dy) - vy$ .

On trouvera la même chose si on substitue  $x + vx$ ,  $y + vy$ , au lieu de  $x$  & de  $y$ ; car on aura  $p + vp = \frac{d(y + vy)}{d(x + vx)} = \frac{dy + dvy}{dx + dvx}$ . Or à cause de  $p = \frac{dy}{dx}$ , on a  $vp = v \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{dy + dvy}{dx + dvx} - \frac{dy}{dx} = \frac{dxdvy - dyd.vx}{dx^2}$ .

5. COROLLAIRE. Si l'on suppose que  $x$  augmenté de sa différentielle est  $= x'$ , & que celui-ci augmenté de sa différentielle devient  $= x''$ ; de manière que l'on ait  $x + dx = x'$ ,  $x' + dx' = x''$ ; que l'on fasse de même  $y + dy = y'$ ,  $y' + dy' = y''$ , on aura  $dvx = vx' - vx$ ,  $dvy = vy' - vy$ , &  $vp = \frac{dx(vy' - vy) - dy(vx' - vx)}{dx^2}$ , & parce que les variations d'une des variables sont indépendantes de celles de l'autre variable, on pourra supposer  $vy' = 0$ ,  $vx' = 0$ , & alors  $vp = \frac{dvy}{dx} = \frac{vy' - vy}{dx}$ . Si on suppose encore que  $y$  seul a une variation, tandis que  $vy' = 0$ , on aura  $vp = -\frac{vy}{dx}$ .

6. REMARQUE. Dans la résolution des problèmes des isopérimètres, on a coutume de considérer la courbe variée, comme ne différant de la courbe non variée que dans un seul élément; de sorte que l'on fait  $v x' = 0, v y' = 0, v x'' = 0, v y'' = 0$ ; &c. bien plus pour la commodité du calcul on fait  $v x = 0$ , de sorte que toute la variation se réduit au seul élément  $v y$ ;

donc alors  $v p = - \frac{v y}{d x}$ ; & cette seule variation, dans une seule ordonnée  $y$ , suffit pour résoudre tous les problèmes de ce genre qu'on a résolus jusques ici; mais si nous voulons que la courbe cherchée puisse recevoir certaines déterminations à son commencement & vers sa fin; il est nécessaire de donner aux co-ordonnées intermédiaires des variations indéfinies, & cela doit avoir lieu, sur-tout si l'on veut appliquer certaines recherches aux courbes non-continues.

7. PROBLEME. Etant données les variations  $v x, v y$  des variables  $x$  &  $y$ , si l'on fait  $d y = p d x$ ,  $d p = q d x$ , trouver la variation de  $q$ . Puisque  $q = \frac{d p}{d x}$ , on aura  $q + v q = \frac{d(p + v p)}{d(x + v x)} = \frac{d p + d v p}{d x + d v x}$ ; donc en ôtant  $q$  d'un côté &  $\frac{d p}{d x}$  de l'autre, on aura  $v q = \frac{d x d v p - d p d v x}{d x^2}$ , où il est à propos de faire attention que  $v d x = d v x$ , & que  $v d p = d v p$ .

COROLLAIRE. Puisque  $p = \frac{d y}{d x}$  &  $q = \frac{d p}{d x}$ , on aura  $v p = \frac{d v y}{d x} - \frac{p d v x}{d x}$ , &  $v q = \frac{d v p}{d x} - \frac{q d v x}{d x}$ . Si on suppose que les variations de  $x$  sont nulles, on aura  $v p = \frac{d v y}{d x}$  &  $v q = \frac{d v p}{d x}$ .

8. PROBLEME. Etant données les variations de deux variables  $x$  &  $y$ , déterminer les variations des rapports entre leurs différentielles d'un degré quelconque. Ayant supposé  $dy = p dx$ ,  $dp = q dx$ ,  $dq = r dx$ ,  $dr = s dx$ , &c. La question se réduit à assigner les variations des quantités  $p, q, r, s$ , &c. puisque les rapports des différentielles de tous les ordres se réduisent à ces quantités. Pour ce qui regarde  $p$  &  $q$ , nous avons déjà vu

$$\text{que } vp = \frac{dvy}{dx} - \frac{p dvx}{dx}, \text{ \& que } vq = \frac{dvp}{dx} - \frac{q dvx}{dx};$$

mais parce que  $r = \frac{dq}{dx}$  &  $s = \frac{dr}{dx}$ , &c.; on trouvera

facilement par les règles de la différenciation, en employant le signe  $v$  au lieu de  $d$ , on trouvera, dis-je,

$$vr = \frac{dvq}{dx} - \frac{r dvx}{dx}; \quad vs = \frac{dvr}{dx} - \frac{s dvx}{dx}; \text{ \&c.}$$

COROLLAIRE I. Si on attribue des variations à  $y$  &

non à  $x$ , on aura  $vp = \frac{dvy}{dx}$ ,  $vq = \frac{dvp}{vx}$ ,  $vr$

$= \frac{dvq}{dx}$ . Mais à cause de  $q = \frac{dp}{dx}$ , on aura en sup-

posant  $dx$  constant, & nullement sujet aux variations,

on aura, dis-je,  $dp = \frac{d^2y}{dx}$ ,  $vp = \frac{d^2vy}{dx}$ , &  $vq =$

$\frac{d^2dvq}{dx^2}$ . On aura aussi  $vr = \frac{d^3vy}{dx^3}$ ;  $vs = \frac{d^4vy}{dx^4}$ ; &c.

COROLLAIRE II. Si les variations de  $y$  sont supposées nulles, & qu'on fasse en même-tems  $dx$  constant,

on aura  $vp = \frac{-p \cdot dvx}{dx}$ ;  $vq = \frac{-p d^2vx}{dx^2} -$

$\frac{2q dvx}{dx}$ ;  $vr = \frac{-p d^3vx}{dx^3} - \frac{3q d^2vx}{dx^2} - \frac{3r dvx}{dx}$ ;

$vs = \frac{-p d^4vx}{dx^4} - \frac{4q d^3vx}{dx^3} - \frac{6r d^2vx}{dx^2} - \frac{4s dvx}{dx}$ .

L'on peut remarquer que , quoique  $dx$  soit supposé constant , il y a ici des différentielles des ordres supérieurs de la variation  $vx$  ; la raison en est que les variations des valeurs de  $x$  continuellement augmentées  $x'$ ,  $x''$ ,  $x'''$ , &c. ne sont pas censées dépendre des différentielles.

9. PROBLEME.  $V$  étant une fonction finie composée des variables  $x, y$ , & de leurs différentielles d'un ordre quelconque , trouver sa variation. Puisque  $V$  a une valeur finie , en faisant  $dy = p dx$ ,  $dp = q dx$ ,  $dq = r dx$ ,

&c. on aura  $p = \frac{dy}{dx}$ ,  $q = \frac{dp}{dx}$ , &c. & les différen-

tielles disparaîtront dans l'expression  $V$  qui deviendra une fonction des quantités finies  $x, y, p, q$ , &c. Donc sa différentielle aura toujours cette forme  $dV = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr$  &c. Le nombre des termes étant d'autant plus grand qu'il y a des différentielles plus élevées dans  $V$ . Maintenant pour avoir la variation  $vV$ , il faut , selon ce que nous avons dit ci-dessus ( 2 ), substituer dans  $V$  au lieu des variables  $x, y, p, q$ , &c. Ces mêmes variables augmentées de leurs variations, & du résultat retranchant  $V$ , il restera  $vV$ ; ce qui fait voir qu'on peut trouver  $vV$  par les règles ordinaires de la différenciation , en changeant le signe  $d$  en  $v$ . C'est pourquoi si dans la différentielle ci-dessus on fait le changement , dont nous venons de parler , nous aurons la variation cherchée  $vV = M vx + N vy + P vp + Q vq + R vr$  &c.

COROLLAIRE. Si l'on substitue dans cette équation les valeurs que nous avons trouvées dans le problème précédent, on aura  $vV = M vx + N vy + \frac{1}{dx} \times$

$(P dvy + Q dvp + R dvq + \&c.) - \frac{dvx}{dx} \cdot (Pp + Qq + Rr + \&c.)$ . Si les variations de  $x$  étant supposées nulles, on fait encore  $dx$  constant, on aura  $vV = Nvy + \frac{Pdvv}{dx} + \frac{Qddvy}{dx^2} + \frac{Rd^3vy}{dx^3} + \&c.$

EXEMPLE I. Soit  $V = \frac{y dx}{dy}$  qui est l'expression de la sous-tangente. A cause de  $dy = p dx$ , l'on aura  $V = \frac{y}{p}$ ; & la variation  $vV$  devient  $\frac{vy}{p} - \frac{yvp}{pp}$ ; si on substitue la valeur de  $vp$ , on trouvera  $vV = \frac{vy}{p} - \frac{y dvy}{p p dx} + \frac{y dyx}{p dx} = \frac{dx}{dy} \cdot vy - \frac{y dx}{dy^2} \cdot dvy + \frac{y}{dy} \cdot dvx$ . Cette dernière formule se tire facilement de la différenciation de la formule proposée.

EXEMPLE II. Soit  $V = \frac{y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy}$ , expression de la tangente. A cause de  $dy = p dx$ , on a  $V = \frac{y}{p} \sqrt{(1 + pp)}$  &  $vV = \frac{vy}{p} \sqrt{(1 + pp)} - \frac{yvp}{pp \sqrt{(1 + pp)}}$ , à laquelle on peut donner la forme  $\frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy} \cdot vy - \frac{y dx}{dy^2 \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2)}} \cdot (dx dvy - dy dvx)$ .

EXEMPLE III. Soit  $V = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dx dd}$ . A cause de  $dy = p dx$ , & de  $dp = q dx$ , on a  $V = \frac{(1 + pp)^{\frac{1}{2}}}{q}$  &  $vV = \frac{3pvp}{q} \cdot \sqrt{(1 + pp)} - \frac{vq}{qq} \cdot (1 + pp)^{\frac{1}{2}}$ .

REMARQUE. Si l'on avoit une fonction  $z$  de  $x, y$  & de

de leurs différentielles, infinie ou infiniment petite, en faisant  $dy = p dx$ ,  $dp = q dx$ , &c.; on la réduiroit toujours à cette forme  $V dx^n$ ,  $V$  étant une fonction finie des quantités  $x, y, p$ , &c. Cela posé, cette expression sera infiniment petite, ou infinie, selon que l'exposant  $n$  sera positif ou négatif. Supposons que la différenciation ordinaire donne  $dV = M dx + N dy + P dp + \&c.$ , d'où l'on tirera facilement la valeur de  $vV$ . Mais la variation de  $V dx^n$  est  $nV dx^{n-1} dvx + dx^n vV$ ; donc la variation  $vz$  sera  $nV dx^{n-1} dvx + dx^n$ . ( $M vx + N vy + P vp$  &c.), formule dans laquelle il faut substituer les valeurs de  $vp = \frac{dv y - p dv x}{dx}$ ;

de  $vq = \frac{dv p - q dv x}{dx}$ ; &c.

10. THÉOREME.  $V$  étant une formule différentielle qui contienne non-seulement  $x$  &  $y$ , mais encore les différentielles d'un ordre quelconque de ces mêmes variables, je dis que la variation de la formule intégrale  $S. V$  sera toujours égale à l'intégrale de la variation de la même formule; c'est-à-dire, que l'on aura  $vS. V = S. vV$ . Lorsque  $V$  passe de son état non-varié à son état varié, il devient  $V + vV$ ; ainsi la valeur variée de la formule proposée est  $S. (V + vV) = S. V + S. vV$ ; mais  $vS. V = S. (V + vV) - S. V = S. vV$ ; donc &c.

COROLLAIRE I. Etant donc proposée la formule intégrale  $S. V dx$ , l'on aura sa variation  $vS. V. dx = S. v(V dx) = S. (V v dx + dx vV) = S. V. dvx + S. dx vV$ , à cause de  $v dx = dvx$ .

COROLLAIRE II. Ayant supposé  $vx = t$ , pour avoir  $dvx = dt$ , à cause de  $S. V dvx = V t - S. t dV$  (\*), on aura  $vS. V dx = V vx - S. dV vx + S. dx. vV = V vx + S. (dx. vV - dV. vx)$ .

REMARQUE. Puisque  $vS. V = S. vV$ , on peut donc changer le signe d'intégration  $S$  avec le signe  $v$

(\*) Par la même raison que  $S. p dx = px - S. x dp$ ,  
Tome V.

de la variation, comme on peut changer (par le théorème ci-dessus) le signe de la différenciation avec celui de la variation. Non-seulement cela a lieu lorsqu'il s'agit d'un seul signe  $S$ , mais cela doit encore s'entendre des intégrations répétées; de sorte que la variation de  $SSV$  est  $= vSSV = SvSV = SSvV$ .

11. PROBLEME. Si ayant supposé  $dy = pdx$ ,  $dp = qdx$ ,  $dq = rdx$ , &c.,  $V$  est une fonction des quantités  $x, y, p, q$ , &c., trouver la variation de la formule intégrale  $S.Vdx$ . Nous venons de voir (10) que la variation de cette formule étoit  $vS.Vdx = Vvx - S.dVvx + S.dv.V(A)$ . Mais l'on peut supposer  $dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq$  &c., & par conséquent  $vV = Mvx + Nvy + Pvp$  &c. Substituant ces valeurs de  $dV$  & de  $vV$  dans l'équation  $A$ , il vient  $vS.Vdx = Vvx + Sdx(Mvx + Nvy + Pvp$  &c.)  $- S.vx(Mdx + Ndy + Pdp$  &c.); mais parce que les parties qui dépendent de  $M$  se détruisent, on pourra, en séparant les parties selon les lettres  $N, P$ , &c., représenter la variation, par l'équation  $vS.Vdx = Vvx + S.N(dxvy - dyvx) + S.P(dxvp - dpvx) + S.Q(dxvq - dqvx)$  &c. Mais parce que  $vp = \frac{dvy - pdvx}{dx}$ , l'on

a  $dxvp = dvy - pdvx$ ; on a de même  $dxvq = dvp - qdvx$ ;  $dxvr = dvq - rdvx$ ; &c. & de plus l'on a  $dy = pdx$ ; donc en substituant ces valeurs on aura  $vS.Vdx = Vvx + SNdx(vy - pvx) + SPd.(vy - pvx) + SQd.(vp - qvx)$  &c.

Pour réduire encore cette expression, on remarquera

$$\begin{aligned} \text{que } vp - qvx &= \frac{dvy - pdvx - dpvx}{dx} = \\ &= \frac{d.(vy - pvx)}{dx}; \quad vq - rvx = \frac{dvp - qdvx - dqvx}{dx} = \\ &= \frac{d.(vp - qvx)}{dx}; \quad vr - svx = \frac{dvq - rdvx - drvx}{dx} = \\ &= \frac{d.(vq - rvx)}{dx}; \quad \&c. \text{ Et si on suppose } vy - pvx = t, \end{aligned}$$



on aura  $v p - q v x = \frac{dt}{dx}$ ;  $v q - r v x = \frac{1}{dx} d. \frac{dt}{dx}$ ;  
 $v r - s v x = \frac{1}{dx} d. \frac{1}{dx} d. \frac{dt}{dx}$ ; &c. & de cette ma-  
 niere, en éliminant les lettres  $p, q, r$ , &c., nous aurons  
 $v S. V dx = V v x + S N dx. t + S P dt + S Q d. \frac{dt}{dx}$   
 $+ S R d. \frac{1}{dx} d. \frac{dt}{dx} + S R' d. \frac{1}{dx} d. \frac{1}{dx} d. \frac{dt}{dx} +$   
 $S T d. \frac{1}{dx} d. \frac{1}{dx} d. \frac{1}{dx} d. \frac{dt}{dx}$  &c., formule dans la-  
 quelle la loi de la progression est manifeste.

REMARQUE. La premiere partie  $V v x$  est délivrée  
 de tout signe d'intégration; la seconde partie  $S N dx. t$   
 $= S N t dx$ ; la troisieme partie  $S P dt$ , peut s'exprimer  
 ainsi  $S P dt = P t - S t d P$ ; la quatrieme partie  
 $S Q d. \frac{dt}{dx} = Q. \frac{dt}{dx} - S d Q. \frac{dt}{dx}$ . Mais  $S d Q. \frac{dt}{dx}$   
 $= S. \frac{d Q}{dx} dt$  est  $= \frac{d Q}{dx} t - S t d. \frac{d Q}{dx}$ ; de sorte que la

quatrieme partie est  $= Q. \frac{dt}{dx} - \frac{d Q}{dx} t + S t d. \frac{d Q}{dx}$ .

La cinquieme partie  $S R d. \frac{1}{dx} d. \frac{dt}{dx} = R. \frac{1}{dx} d. \frac{dt}{dx}$

$- S. \frac{d R}{dx} d. \frac{dt}{dx}$ . Mais  $S. \frac{d R}{dx} d. \frac{dt}{dx} = \frac{d R}{dx} d. \frac{dt}{dx} - S. \frac{1}{dx} d. \frac{d R}{dx} dt$ ; &c.

$S. \frac{1}{dx} d. \frac{d R}{dx} dt = \frac{1}{dx} d. \frac{d R}{dx} t -$

$S t d. \frac{1}{dx} d. \frac{d R}{dx}$ ; de maniere que la cinquieme partie

peut s'exprimer ainsi  $R. \frac{1}{dx} d. \frac{dt}{dx} - \frac{d R}{dx} d. \frac{dt}{dx} +$

$\frac{1}{dx} d. \frac{d R}{dx} t - S t d. \frac{1}{dx} d. \frac{d R}{dx}$ . On trouvera de

même que la sixième partie  $SR' d. \frac{1}{dx} \cdot d. \frac{1}{dx} d. \frac{dt}{dx}$  est =  
 $R' \cdot \frac{1}{dx} \cdot d. \frac{1}{dx} d. \frac{dt}{dx} - \frac{dR'}{dx} \cdot \frac{1}{dx} d. \frac{dt}{dx} + \frac{1}{dx} d. \frac{dR'}{dx} \times$   
 $\frac{dt}{dx} - \frac{1}{dx} d. \frac{1}{dx} d. \frac{dR'}{dx} \cdot t + St d. \frac{1}{dx} d. \frac{1}{dx} d. \frac{dR'}{dx}$  ; &c  
 ainsi de suite pour les parties suivantes.

12. PROBLEME. Supposant toujours  $dV = M dx + N dy + P dp + Q dq + \&c.$ , &  $dy = p dx$ ,  $dp = q dx$ , &c., exprimer la variation de la formule intégrale  $SV dx$ , en supposant des variations à  $x$  & à  $y$ , de manière qu'il ne se trouve aucune différentielle des variations après le signe d'intégration. Si on dispose par ordre les transformations qu'on vient de faire dans le problème précédent, on pourra disposer sous le signe d'intégration toutes les parties qui en sont affectées, en réduisant ces parties en une somme, & nous distribuerons les autres parties, que nous nommerons *absolues*, en différens membres, relativement aux variations de  $x$  & de  $y$  & leurs différentielles ; de sorte que  $t$  ayant la même signification que dans le problème précédent, on aura

$$\begin{aligned} SV dx = St dx & \left( N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx} d. \frac{dQ}{dx} - \frac{1}{dx} d. \frac{1}{dx} d. \frac{dR}{dx} \right. \\ & \left. + \frac{1}{dx} d. \frac{1}{dx} d. \frac{1}{dx} d. \frac{dR'}{dx} - \&c. \right) \\ & + V vx + t \left( P - \frac{dQ}{dx} + \frac{1}{dx} d. \frac{dR}{dx} - \&c. \right) \\ & + \frac{dt}{dx} \left( Q - \frac{dR}{dx} + \frac{1}{dx} d. \frac{dR'}{dx} - \&c. \right) \\ & + \frac{1}{dx} d. \frac{dt}{dx} \left( R - \frac{dR'}{dx} + \&c. \right) \\ & + \frac{1}{dx} d. \frac{1}{dx} d. \frac{dt}{dx} (R' - \&c.) \\ & + \&c. \end{aligned}$$

13. COROLLAIRE I. Si l'on suppose  $dx$  constant, l'on aura la formule suivante que j'appellerai (A) :

$$\left. \begin{aligned} \nu SV dx &= S \epsilon dx \left( N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \&c. \right) \\ &+ V \nu x + \epsilon \left( P - \frac{dQ}{dx} + \frac{ddR}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} \&c. \right) \\ &+ \frac{d\epsilon}{dx} \left( Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddR'}{dx^2} \&c. \right) \\ &+ \frac{dd\epsilon}{dx^2} \left( R - \frac{dR'}{dx} + \&c. \right) \\ &+ \frac{d^3\epsilon}{dx^3} (R' - \&c.) \\ &+ \&c. \end{aligned} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{aligned} S \nu y dx \left( N - \frac{dP}{dx} + \&c. \right) \\ &+ \nu y \left( P - \frac{dQ}{dx} \&c. \right) \\ &+ \frac{d\nu y}{dx} \left( Q - \frac{dR}{dx} \&c. \right) \\ &+ \frac{dd\nu y}{dx^2} \left( R - \frac{dR'}{dx} \&c. \right) \\ &+ \frac{d^3\nu y}{dx^3} (R' - \&c.), \\ &+ \&c. \end{aligned} \right.$$

en supposant que les variations de  $x$  sont nulles ; car alors  $\epsilon = \nu y - p \nu x$  est  $= \nu y$  &  $V \nu x = 0$ .

14. COROLLAIRE II. Si on suppose  $\nu y : \nu x :: p : 1 :: dy : dx$ , on aura  $p \nu x = \nu y$  &  $\epsilon = \nu y - p \nu x = 0$ , & dans ce cas toute la variation de la formule  $SV dx$  se réduit à  $V \nu x$ .

REMARQUE I. S'il est question d'une ligne courbe,  
O ;

la premiere partie intégrale embrasse toutes les variations qui ont lieu depuis le commencement jusques au terme auquel subsistent les co-ordonnées  $x$  &  $y$ ; mais les parties absolues se déterminent seulement par les variations qui ont lieu aux extrémités de la courbe; c'est-à-dire, aux points correspondans aux ordonnées extrêmes.

15. REMARQUE II. Dans le cas où  $SV dx$  devra être un *maximum* ou un *minimum*, on fera sa variation = 0: or alors  $N - \frac{dP}{dx} + \frac{PPQ}{dx^2}$  &c. doit être évi-

demment = 0. Mais cela ne suffit pas, il faut encore supposer égales à 0, les parties absolues, en quoi consiste l'application aux deux bords de la courbe. Car la nature de la courbe est exprimée par cette équation, qui à cause des différentielles des degrés supérieurs, doit renfermer autant d'intégrations & autant de constantes qu'il est désigné par l'ordre des différentielles. Or ces constantes sont déterminées par les parties absolues, & c'est par-là qu'on peut satisfaire à certaines conditions, comme, par exemple, que la courbe soit terminée à certaines lignes courbes; & même si cette équation est du quatrieme ordre, ou d'un ordre plus-élevé, le nombre des parties absolues est augmenté, & alors on peut exiger que la courbe ait à ses extrémités une certaine direction; & si l'équation est encore plus élevée, on peut demander que la courbe ait à ses extrémités une certaine courbure déterminée. Au reste, en passant aux applications, il a accoutumé d'arriver que la nature des questions embrasse des conditions auxquelles on peut facilement satisfaire par les quantités absolues.

16. REMARQUE III. Puisque nous avons considéré la chose dans un sens très-étendu, en donnant à  $x$  & à  $y$  des variations quelconques indépendantes de toute loi, & cela dans tous les points de la courbe, il est évident que la variation qui convient à toute la courbe, doit dépendre non-seulement des variations extrêmes, mais encore de toutes les intermédiaires. D'où il suit évidemment, que si par hasard la quantité  $V$  est de telle nature que la formule  $V dx$  soit intégrable, sans qu'il y ait aucune relation entre les variables  $x$  &  $y$ ,

&c. que  $S.V dx$  soit une fonction absolue (\*) des quantités  $x, y, p, \&c.$ , dans ce cas aussi la variation ne peut dépendre que de la variation des élémens extrêmes; & ainsi la partie intégrale de la variation doit s'évanouir, ou être  $= 0$ ; d'où l'on tire le beau théorème suivant.

17. THÉOREME. *Ayant supposé  $dy = p dx$ ,  $dp = q dx$ ,  $dq = r dx$ , &c. si  $V$  est une fonction des variables  $x, y, p, \&c.$ , telle qu'ayant fait  $dV = M dx + N dy + P dp + \&c.$ , l'on ait  $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d dQ}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + \&c. = 0$ , en faisant  $dx$  constant, la formule différentielle  $V dx$  sera intégrable par elle-même, sans établir aucune relation entre  $x$  &  $y$ , & réciproquement. En effet, si  $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d dQ}{dx^2}, \&c. = 0$ , dans ce cas la variation de la formule intégrale  $S.V dx$  ne renferme aucune formule intégrale, & par conséquent pour chaque position des co-ordonnées  $x$  &  $y$ , elle dépend des seules variations extrêmes; ce qui ne pourroit nullement avoir lieu si la formule  $V dx$  se refusoit à l'intégration, parce que dans ce cas la variation dépen-*

(\*) La nature des fonctions exige qu'aussi-tôt que les variables, dont elles sont composées, reçoivent une valeur déterminée, la valeur de la fonction soit déterminée. Ainsi en supposant  $V = xy$ , la fonction  $V$  sera  $= 12$ , si  $x = 6$  &  $y = 2$ ; mais une formule intégrale  $S.V dx$  ne peut être regardée comme une fonction des variables  $x, y, p, \&c.$  à moins qu'elle n'admette l'intégration; car autrement en donnant des valeurs déterminées aux variables, on ne déterminera pas la valeur de la formule. En supposant, par exemple,  $x = 2$  &  $y = 3$ , on ne connoît pas pour cela la valeur de  $S y dx$ , à moins que l'on ne connoisse la relation entre  $y$  &  $x$ ; mais dans ce cas la formule ne contient réellement qu'une seule variable.

droit encore des variations intermédiaires (car l'intégration renferme tous les élémens intermédiaires). D'où il suit que toutes les fois que notre équation a lieu, la formule  $V dx$  admet l'intégration; de sorte que dans ce cas  $S. V dx$  est une fonction déterminée des quantités  $x, y, p, \&c.$  qui font que notre équation a lieu, & sans quoi elle ne pourroit subsister. Réciproquement toutes les fois que la formule différentielle  $V dx$  est intégrable, & que par conséquent  $S. V dx$  est une vraie fonction des variables  $x, y, p, \&c.$  sa variation dépend uniquement des variations extrêmes de  $x$  & de  $y$ , & les variations intermédiaires ne l'affectent nullement; donc il est nécessaire que la partie intégrale de la variation s'évanouisse; ce qui ne peut se faire,

à moins qu'on n'ait l'équation  $N - \frac{dP}{dx} + \&c. = 0$ ; & ainsi le théorème inverse est encore vrai.

18. COROLLAIRE I. Voilà donc un *signe* bien digne de remarque, par lequel on peut juger si une équation différentielle a deux variables, & qui renferme des différentielles d'un ordre quelconque, est susceptible d'intégration ou non. Ce signe est bien plus étendu que le signe assez connu par lequel on a coutume de juger de l'intégrabilité des formules différentielles du premier degré. Supposons 1°. que l'on ait l'équation  $dV = M dx + N dy$ ,  $V$  étant une fonction sans différentielles; la formule  $V dx$  ne peut être intégrable, à moins que  $N$  ne soit  $= 0$ , c'est-à-dire, à moins que  $V$  ne soit une fonction de  $x$  sans  $y$ , ce qui est évident.

19. REMARQUE I. Pour faire mieux sentir l'utilité du théorème, supposons  $V = \frac{p}{y} - \frac{xpp}{yy} + \frac{xq}{y}$ , pour avoir

$S. V dx = \frac{xdy}{ydx} = \frac{xp}{y} (*)$ ; donc la formule diffé-

(\*) On trouvera facilement la valeur de  $V$ , en faisant

rentielle  $V dx = \left( \frac{p}{y} - \frac{x p p}{y y} + \frac{x q}{y} \right) dx$  est intégrable par elle-même. Voyons maintenant si notre théorème indique cette intégrabilité : comparant la différentielle  $dV$  avec la formule  $dV = M dx + N dy + P dp + Q dq$ , nous aurons  $M = \frac{-p p}{y y} + \frac{q}{y}$  ;  $N = \frac{-p}{y y} + \frac{2 x p p}{y^3} - \frac{x q}{y y}$  ;  $P = \frac{1}{y} - \frac{2 x p}{y y}$  &  $Q = \frac{x}{y}$ . Mais par le théorème,  $N - \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx^2} = 0$ , & par conséquent

$$N = \frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dx^2}.$$

De plus  $\frac{dP}{dx} = \frac{-3p}{y y} + \frac{4 x p p}{y^3} - \frac{2 x q}{y y}$  &  $\frac{dQ}{dx} = \frac{1}{y} - \frac{x p}{y y}$  ; donc  $\frac{dQ}{dx^2} = \frac{-2p}{y y} + \frac{2 x p p}{y^3} - \frac{x q}{y^2}$  ; &  $\frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dx^2} = -\frac{p}{y y} + \frac{2 x p p}{y^3} - \frac{x q}{y y} = N$ , comme le demande le théorème.

20. REMARQUE II. Lorsque la formule différentielle  $V dx$  est intégrable par elle-même, & que par conséquent ayant fait  $dV = M dx + N dy + P dp + Q dq + \&c.$ , l'on a par le théorème,  $N - \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx^2} + \&c. = 0$ , on peut en déduire de beaux corol-

varier dans  $\frac{x dy}{y dx}$  ; 1°.  $x$ , 2°.  $y$ , 3°.  $dy$ , divisant le résultat par  $dx$ , & introduisant ensuite  $p$  au lieu de  $\frac{dy}{dx}$  &  $q$  au lieu de  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ . On suppose  $dx$  constant.

lares. Car 1°. puisque, en multipliant par  $dx$  & intégrant, on a  $SN dx - P + \frac{dQ}{dx} - \frac{ddR}{dx^2} + \&c. =$

$A$ , il est visible que la formule  $N dx$  est encore intégrable par elle-même. 2°. En multipliant la dernière équation par  $dx$  & intégrant, l'on aura  $Sdx (SN dx - P) + Q - \frac{dR}{dx} + \frac{ddR'}{dx^2} \&c. = Ax + B$ ; d'où

il suit que la formule  $dx (SN dx - P)$  admet l'intégration. On trouvera ensuite de la même manière que la formule  $dx [Sdx (SN dx - P) + Q]$  est encore susceptible d'intégration & ainsi de suite; d'où l'on peut tirer le théorème suivant très-digne de remarque.

21. THÉOREME. *Ayant fait  $dy = p dx$ ,  $dp = q dx$ , &c. si  $V$  est une fonction des variables  $x, y, p$ , &c., telle que  $V dx$  soit intégrable par elle-même, alors ayant supposé  $dV = M dx + N dy + P dp + \&c.$ , les formules suivantes seront intégrables par elles-mêmes.*

1°. La formule  $N dx$  sera intégrable par elle-même, & ayant fait  $P - SN dx = A$ , on trouvera 2°. que  $A dx$  admet l'intégration; & ayant fait  $Q - SA dx = B$ , on trouvera 3°. que  $B dx$  est intégrable par elle-même; faisant ensuite  $R - SB dx = C$ , on verra 4°. que la formule  $C dx$  est intégrable. On verra de même qu'en faisant  $R' - SC dx = D$ , la formule  $D dx$  sera intégrable par elle-même; & ainsi de suite. Tout cela est évident par le théorème précédent.

22. COROLLAIRE I. Puisque  $V$  est une fonction des quantités  $x, y, p$ , &c. & que  $p = \frac{dy}{dx}$ ,  $q = \frac{dp}{dx}$ , &c. Les quantités  $M, N, P$ , &c. qui en dérivent par la différenciation, peuvent être représentées de la manière suivante.  $M = \left(\frac{dV}{dx}\right)$ ;  $N = \left(\frac{dV}{dy}\right)$ ;  $P = \left(\frac{dV}{dp}\right)$ ;  $Q = \left(\frac{dV}{dq}\right)$ ; &c. donc si  $V dx$  est intégrable,  $N dx =$



$\left(\frac{dV}{dy}\right) dx$ , fera aussi intégrable. Par la même raison cette formule  $\left(\frac{ddV}{dy^2}\right) dx$  doit être intégrable (\*), aussi-bien que les formules  $\left(\frac{dddV}{dy^3}\right) dx$ ;  $\left(\frac{d^4V}{dy^4}\right) dx$ ; &c.

23. COROLLAIRE II. Parce que le nombre des lettres  $P, Q, R$ , &c. dépend évidemment du degré des différentielles qui se trouvent dans la formule  $V dx$ , & que toutes les lettres ultérieures s'évanouissent, les lettres  $A, B, C$ , &c. qui en dérivent, doivent à la fin s'évanouir, ou se changer en fonctions de la seule quantité  $x$ , autrement les intégrations suivantes ne pourroient avoir lieu.

Supposons que  $S.V dx$  est  $= \frac{y(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{x dx dy}$ . Ayant fait les substitutions  $dy = p dx$ ,  $dp = q dx$ ,  $dq = r dx$ , &c., l'on pourra exprimer la fonction  $V$  de cette manière  $V = \frac{p(1+pp)^{\frac{1}{2}}}{xq} - \frac{y(1+pp)^{\frac{1}{2}}}{xxq} + \frac{3ypV(1+pp)}{x} - \frac{yr(1+pp)^{\frac{1}{2}}}{xqq}$ . D'où l'on

---

(\*) De sorte que si  $\left(\frac{dV}{dy}\right) = V' dx$ , cette formule ne peut être intégrable, à moins que  $\left(\frac{dV'}{dy}\right) dx = \left(\frac{ddV}{dy^2}\right) dx$ , ne le soit aussi; & celle-ci ne peut être intégrable que  $\left(\frac{dddV}{dy^3}\right) dx$  ne le soit, & ainsi de suite.

pourra tirer, par la différenciation,  $N = \frac{-(1+pp)^{\frac{1}{2}}}{xxq}$

$$+ \frac{3p\sqrt{(1+pp)}}{x} - \frac{r(1+pp)^{\frac{1}{2}}}{xqq}; P = \frac{(1+4pp)\sqrt{(1+pp)}}{xq}$$

$$- \frac{3yp\sqrt{(1+pp)}}{xxq} + \frac{3y(1+2pp)}{x\sqrt{(1+pp)}} - \frac{3ypr\sqrt{(1+pp)}}{xqq};$$

$$Q = \frac{-p(1+pp)^{\frac{1}{2}}}{xqq} + \frac{y(1+pp)^{\frac{1}{2}}}{xxqq} + \frac{2yr(1+pp)^{\frac{1}{2}}}{xqqq};$$

$$R = \frac{-y(1+pp)^{\frac{1}{2}}}{xqq}. \text{ Maintenant } Ndx \text{ doit être in-}$$

tégrable, &c en effet l'on a  $SNdx = \frac{(1+pp)^{\frac{1}{2}}}{xq}$ .

La formule  $(P - SNdx)dx = Adx$ , devient =

$$\frac{3pdy\sqrt{(1+pp)}}{xq} - \frac{3ypdx\sqrt{(1+pp)}}{xxq} +$$

$$\frac{3ydx(1+2pp)}{x\sqrt{(1+pp)}} - \frac{3ypdq\sqrt{(1+pp)}}{xqq}. \text{ Si l'on in-}$$

tegre le dernier membre, en considérant  $q$  seul comme

variable, l'on trouvera  $\frac{3yp\sqrt{(1+pp)}}{xq}$ . Mais en dif-

férenciant cette quantité, on trouve la différentielle

$$Adx, \text{ ce qui fait voir que } S.Adx = \frac{3yp\sqrt{(1+pp)}}{xq}.$$

Maintenant si dans la valeur de  $Qdx$  on substitue  $dq$  au lieu

de  $r dx$  &c  $\frac{dp}{q}$  au lieu de  $dx = \frac{dp}{q}$ , on aura  $Bdx$

$$= Qdx - dx.S.Adx = Qdx - \frac{dp}{q}.S.Adx, \text{ ou}$$

$$Bdx = \frac{-dy(1+pp)^{\frac{1}{2}}}{xqqq} + \frac{ydx(1+pp)^{\frac{1}{2}}}{xxqq} +$$

$$\frac{2y dq(1+pp)^{\frac{1}{2}}}{xq^3} - \frac{3ypdp\sqrt{(1+pp)}}{xqq}.$$

L'intégrale du troisieme membre, prise en considérant  $q$  seul comme

variable, donnera  $\frac{-y(1+pp)^{\frac{1}{2}}}{xqq} = SBdx$ . La qua-

trieme formule donne  $C = R - SBdx = 0$ ; ainsi non-seulement  $Cdx$ , mais encore toutes les formules suivantes doivent être censées intégrables.

24. PROBLEME. *Ayant fait  $z = Smdx$ ,  $m$  étant une fonction des deux variables  $x$  &  $y$  & de leurs différentielles,  $dy = p dx$ ,  $dp = q dx$ ,  $dq = r dx$ , &c. si  $V$  exprime une fonction de  $z$  & de constantes, trouver la variation de l'intégrale compliquée  $SVdx$ . A cause de  $z = Smdx$  il est visible que  $SVdx$  est une intégrale compliquée. Par ce que  $V$  est une fonction de  $z$  & de constantes, supposons  $dV = ndz$ , & qu'alors l'on ait pour la fonction  $m$  la différentielle  $dm = M'dx + N'dy + P'dp + Q'dq$ , &c. Cela posé, puisque la variation cherchée est  $vSVdx = Sv(Vdx) = S(vVdx + Vvdx)$  (\*); & que par la réduction dont on s'est servi dans le corollaire second du théorème ci-dessus (10),  $vSVdx = Vvx + S(dx vV - dV vx)$ , & parce que de plus l'on a par hypothèse  $dV = ndz$ , on aura donc aussi  $vV = nvz$ . Mais à cause de  $z = Smdx$ , on aura  $dz = mdx$ , & par conséquent  $dV = n.m dx$ ; & alors  $vz = vSmdx = mvx + S(dx vm - dmvx)$ , & par conséquent  $vV = n.m vx + nS(dx vm - dmvx)$ ; donc  $vSVdx = Vvx + S[n.m dx vx + ndx S(dx vm - dmvx) - n.m dx vx] = Vvx + Sn dx. S(dx vm - dmvx)$ , équation que nous désignerons par (B).*

(\*)  $v(Vdx) = vV. dx + V.vdx$ , par la même raison que  $d(Vp) = p. dV + V.dp$ .

Supposons que l'intégrale  $S. n dx$  est  $= g$ , l'équation B donnera l'équation  $(D) v S V dx = V vx + g S (dx vm - dm vx) - S g (dx vm - dm vx)$ . Maintenant il est facile de voir qu'on peut représenter  $dx vm - dm vx$  par cette équation  $dx vm - dm vx = dx (M' vx + N' vy + P' vp \&c.) - vx (M' dx + N' dy + P' dp \&c.) = N' dx (vy - vx) + P' dx (vp - vx) + \&c.$  à cause de  $dx M' vx - vx M' dx = 0$ , & de  $dy = p dx$ ,  $dp = q dx$ , &c. Mais à cause de  $dx$  constant & de  $vy - vx = t$ ,

l'on aura (par le n°. 11.)  $vp - vx = \frac{dt}{dx}$ ; &c. &c.

ainsi  $dx vm - dm vx = N' t dx + P' dt + Q' \frac{d^2 t}{dx^2}$

+  $R' \frac{d^3 t}{dx^3}$  &c., équation que je désignerai par (H). Si

l'on prend l'intégrale du second membre de cette équation, en faisant  $SP' dt = tP' - St dP'$ ;  $S Q' \frac{d^2 t}{dx^2} =$

$\frac{dt}{dx} Q' - S. \frac{dt}{dx} dQ'$ ;  $S. \frac{dt}{dx} dQ' = \frac{t dQ'}{dx} - St \frac{d^2 Q'}{dx^2}$ ;

&c., & qu'on dispose convenablement les termes, on aura l'équation  $S(dx vm - dm vx) =$

$$St dx \left( N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2 Q'}{dx^2} \&c. \right)$$

$$+ t \left( P' - \frac{dQ'}{dx} + \frac{d^2 R'}{dx^2} \&c. \right)$$

$$+ \frac{dt}{dx} \left( Q' - \frac{dR'}{dx} + \frac{d^2 R''}{dx^2} \&c. \right)$$

$$+ \frac{d^2 t}{dx^2} \left( R' - \frac{dR''}{dx} \&c. \right)$$

$$+ \&c.$$

En multipliant l'équation H par  $g$ , on aura  $g(dx vm - dm vx) = g N' t dx + g P' dt + g Q' \frac{d^2 t}{dx^2}$ ,

&c. Si l'on fait l'intégration du second membre de cette

dernière équation, selon la méthode de la remarque

du n°. 11, qu'on fasse  $dx$  constant, comme on l'a supposé n°. 13, & qu'on arrange les choses selon la méthode ci-dessus (n°. 12), on aura  $Sg(dxvm - dmvx) =$

$$\begin{aligned} & St dx \left( gN' - \frac{d \cdot gP'}{dx} + \frac{dd \cdot gQ'}{g x^2} - \&c. \right) \\ & + t \left( gP' - \frac{d \cdot gQ'}{dx} + \frac{dd \cdot gR'}{d x^2} \&c. \right) \\ & + \frac{dt}{dx} \left( gQ' - \frac{d \cdot gR'}{dx} \&c. \right) \\ & + \&c. \end{aligned}$$

Cela posé, il n'est pas difficile de voir que l'équation D donne la variation cherchée  $vSVdx =$

$$\begin{aligned} & Vvx + gSt dx \left( N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} + \&c. \right) \\ & - St dx \left( gN' - \frac{d \cdot gP'}{dx} + \frac{dd \cdot gQ'}{dx^2} - \frac{d^3 \cdot gR'}{dx^3} + \&c. \right) \\ & + gt \left( P' - \frac{dQ'}{dx} + \frac{ddR'}{dx^2} - \frac{d^3R''}{dx^3} \&c. \right) \\ & - t \left( gP' - \frac{d \cdot gQ'}{dx} + \frac{dd \cdot gR'}{dx^2} \&c. \right) \\ & + \frac{gdt}{dx} \left( Q' - \frac{dR'}{dx} + \frac{ddR''}{dx^2} \&c. \right) \\ & - \frac{dt}{dx} \left( gQ' - \frac{d \cdot gR'}{dx} + \frac{dd \cdot gR''}{dx^2} \&c. \right) \\ & + \frac{gddt}{dx^2} \left( R' - \frac{dR'}{dx} \&c. \right) \\ & - \frac{ddt}{dx^2} \left( gR' - \frac{d \cdot gR''}{dx} \&c. \right) \\ & + \frac{gd^3t}{dx^3} \left( R'' - \&c. \right) \\ & - \frac{d^3t}{dx^3} \left( gR'' - \&c. \right) \\ & \&c. \end{aligned}$$

Si ayant différencié les deux parties intégrales (\*) on fait les réductions convenables, qu'on réduise aussi les autres parties, qu'on intègre de nouveau les parties qu'on aura différenciées, on trouvera l'équation suivante.

$$\begin{aligned}
 vSVdx &= Vvx + Sndx.Stdx \left( N' - \frac{dP'}{dx} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{ddQ'}{dx^2} - \&c. \right) \\
 &+ Stdx \left( nP' - \frac{ndQ' - d.nQ'}{dx} + \frac{nddR' + d.ndR'' + dd.nR''}{dx^2} \right. \\
 &\quad \left. - \&c. \right) \\
 &+ t \left( nQ' - \frac{ndR' - d.nR'}{dx} + \frac{nddR'' + d.ndR'' + dd.nR''}{dx^2} \right. \\
 &\quad \left. - \&c. \right) \\
 &+ \frac{dt}{dx} \left( nR' - \frac{ndR'' - d.nR''}{dx} + \&c. \right) \\
 &+ \frac{ddt}{dx^2} \left( nR'' - \&c. \right) \\
 &+ \&c.
 \end{aligned}$$

(\*) Puisque  $g = Sndx$ ; donc  $dg = ndx$ . La différentielle des deux parties intégrales sera  $ndx.Stdx \left( N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \&c. \right) + gtdx \left( N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} - \&c. \right) - tdx \left( gN' - nP' - \frac{gdP'}{dx} + \&c. \right)$ . Mais alors  $gtdxN'$  est détruit par  $-tdx.gN'$ ,  $-gtdx \times \frac{dP'}{dx} = -gtdP'$  est détruit par  $-tdx. \frac{-gdP'}{dx} = +tdg.dP'$ , &c. Dans les parties absolues  $gtdP'$  détruit  $-$  Lorsque

Lorsque  $SV dx$  doit être un *maximum* ou un *minimum*, il faut éгалer les parties intégrales à 0, ce qui se fait en faisant attention à la *limite*, jusques où s'étend l'intégrale  $SV dx$ , pour laquelle *limite*, si on suppose  $g=A$ , on en déduira de la première formule 0 =

$$(A-g)N' - \frac{d.(A-g)P'}{dx} + \frac{dd.(A-g)Q'}{dx^2} \&c. (*);$$

mais de quelle façon qu'on traite cette équation, il

est  $gP'$ . La quantité  $\frac{dgQ}{dx}$  qui, prise avec le signe —, forme le second terme de la seconde partie absolue, devient  $nQ' + \frac{gdQ'}{dx}$ ; ainsi ce second terme, étant pris avec le signe qu'il a & multiplié par —  $\epsilon$ , donnera  $+\epsilon nQ' + \frac{\epsilon gdQ'}{dx}$ ; or  $\frac{\epsilon gdQ'}{dx}$  est détruit par la partie correspondante  $\frac{\epsilon \epsilon dQ'}{dx}$  de la première partie absolue, &c. Il est aisé de voir comment on peut continuer.

(\*) Il faut considérer  $A$  comme constant; car il l'est en effet, puisque si  $n dx$  représente l'élément de l'aire d'une courbe,  $Sn dx$  sera constant aussi-tôt que l'abscisse  $x$  & l'ordonnée  $n$  seront déterminées. A la fin de l'intégration on pourra faire passer  $A$  sous le signe d'intégration, & l'on aura  $S \epsilon dx \left( AN' - A \frac{dP'}{dx} + \&c. \right)$   
 $- S \epsilon dx \left( gN' - \frac{dgP'}{dx} \&c. \right) = S \epsilon dx \left( (A-g)N' - \frac{d.(A-g)P'}{dx} + \&c. \right)$ ; car la différentielle de  $A$  est = 0, &  $d.AP' = A dP'$ ,  $dd.AQ' = A ddQ'$ , &c.; donc en égalant cette quantité à 0, différenciant & divisant par  $\epsilon dx$ , on aura l'équation dont il s'agit.

faudra faire disparaître  $g$  par la différenciation, & par-là on chassera  $A$ , & l'équation résultante ne dépendra plus de la limite de l'intégration.

En général en supposant  $= A$  l'intégrale  $Sndx$  correspondante à toute l'intégrale  $SVdx$ , la variation dans ce cas sera  $vSVdx = Vvx +$

$$Sdx \left( (A-g)N' - \frac{d(A-g)P'}{dx} + \frac{dd(A-g)Q'}{dx} \&c. \right) \\ + \epsilon \left( nQ' - \frac{ndR' - d.nR'}{dx} \&c. \right) \\ + \frac{d\epsilon}{dx} \left( nR' - \frac{ndR'' - d.nR''}{dx} + \&c. \right) \\ + \frac{dd\epsilon}{dx^2} \left( nR'' - \&c. \right) \\ + \&c.$$

Dans cette formule  $A - g$  exprime la valeur de  $Sndx$ , depuis le terme extrême de l'intégration jusqu'à un terme quelconque pris en reculant.

25. PROBLEME.  $z$  étant  $= Sm dx$  &  $dm = M'dx + N'dy + P'dp + \&c.$ , tandis que  $V$  est une fonction qui contient non-seulement les variables  $x, y, p = \frac{dy}{dx}$ ,  $q = \frac{dp}{dx}$ , &c. mais encore la quantité  $z$ , trouver la variation de la formule intégrale compliquée  $SVdx$ . Soit

$dV = Hdz + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq \&c.$ , l'on aura la variation de  $V$  exprimée par l'équation  $vV = Hvz + Mvx + Nvy + Pvp \&c.$ , mais à cause de  $dz = m dx$ ,  $dy = p dx$ ,  $dp = q dx \&c.$ , l'on a  $dV = dx (Hm + M + Np + Pq + Qr + \&c.)$ ; l'on a aussi  $vm = M'vx + N'vy + P'vp \&c.$  Or il est visible (par le n°. 10) que  $vz = S(m.vdx + dx.vm) = mvx + S(dxvm - dm.vx)$ ; donc ayant fait  $vy - pvx = \epsilon$ , on aura (selon le n°. 24)  $vz = mvx + Sdx \left( N'\epsilon + \frac{P'd\epsilon}{dx} + \frac{Q'dd\epsilon}{dx^2} \right)$



+  $\frac{R'd^3t}{dx^3} + \&c.$ ), équation dans laquelle  $dx$  est con-

stant, & que je désignerai par (A). Ces choses supposées, à cause de  $vSVdx = Vvx + S(dxvV - dV.vx)$ , si nous supposons  $dV = Hd\zeta + dV'$ , pour avoir  $vV = Hv\zeta + vV'$ , &  $dV' = Mdx + Ndy + Pdp + \&c.$ , nous aurons (B)  $vSVdx = Vvx + S(Hdxv\zeta - Hd\zeta vx) + S(dxvV' - dV'vx)$ . Mais

$$dxvV' - dV'vx = dx \left( Nt + \frac{Pdt}{dx} + \frac{Qddt}{dx^2} \&c. \right).$$

Et à cause de  $d\zeta vx = mdx.vx$ , si l'on substitue cette valeur dans l'équation A multipliée par  $dx$  & qu'on transpose, on aura  $dxv\zeta - mdxvx$ , ou  $dxv\zeta - d\zeta vx = dxSdx \left( N't + \frac{P'dt}{dx} + \frac{Q'ddt}{dx^2} \&c. \right)$ ;

donc en substituant dans l'équation (B), on aura la variation cherchée:  $vSVdx = Vvx$

$$+ SHdxSdx \left( N't + \frac{P'dt}{dx} + \frac{Q'ddt}{dx^2} \&c. \right)$$

$$+ Sdx \left( Nt + \frac{Pdt}{dx} + \frac{Qddt}{dx^2} + \frac{Rd^3t}{dx^3} \&c. \right)$$

Supposons maintenant l'intégrale  $SHdx = g$ , de manière que pour le commencement d'où l'on compte l'intégrale  $SVdx$ ,  $g$  s'évanouisse, & que pour la fin où se termine  $SVdx$ , on ait  $g = A$ , l'on aura

$$SHdxSdx \left( N't + \frac{P'dt}{dx} \&c. \right) = ASdx \left( N't + \frac{P'dt}{dx} + \&c. \right) - Sgdx \left( N't + \frac{P'dt}{dx} \&c. \right) (*),$$

(\*) Les commençants pourront, peut-être, être surpris de ce que l'on exprime par A l'intégrale  $g$ , lorsqu'elle peut se trouver hors du signe, & non lorsqu'elle se trouve sous le signe d'intégration: mais il est aisé de leur faire

&c ainsi l'on aura  $\nu S V dx = V \nu x$

$$\begin{aligned}
 &+ A S dx \left( N' t + \frac{P' dt}{dx} \&c. \right) \\
 &- S g dx \left( N' t + \frac{P' dt}{dx} \&c. \right) \\
 &+ S dx \left( N t + \frac{P dt}{dx} \&c. \right)
 \end{aligned}$$

Mais en faisant  $N + (A - g) N' = n'$ ;  $P + (A - g) P' = p'$ ;  $Q + (A - g) Q' = q'$ ;  $R + (A - g) R' = r'$ ; &c. nous aurons  $\nu S V dx = V \nu x + S dx \left( n' t + \frac{p' dt}{dx} + \frac{q' ddt}{dx^2} \&c. \right)$ . Et en éliminant

les différentielles de  $t$  qui se trouvent après le signe d'intégration, nous trouverons en suivant la méthode ci-dessus (12), &c ajoutant une constante, nous trouverons, dis-je, l'équation suivante:  $\nu S V dx$

sentir par un exemple fort simple, que cela doit être ainsi. Soit la formule  $S H dx S P dx = g S P dx - S g P dx$ , en supposant  $S H dx = g$ . Soit de plus  $H = x x$ ,  $P = \frac{2}{3} x^2$ , & supposons que l'intégrale  $g$  doive s'évanouir lorsque l'intégrale  $S H dx S P dx$  est  $= 0$ , ou lorsque  $x = 0$ , & que  $g$  doit être  $= A$ , au terme auquel finit l'intégrale  $S H dx S P dx$ , c'est à dire, par exemple, lorsque  $x = a$ ; alors nous aurons  $A S P dx - S g P dx = x^3 - \frac{1}{3} x^3 = \frac{2}{3} x^3$ . Il est donc évident que cette intégrale est  $= \frac{2}{3} a^3$ , lorsque  $x = a$ . Mais si dans  $- S g P dx$ , on faisoit  $g = A = a a$ , on auroit  $A S P dx - S g P dx = a^2 x^3 - a^2 x^3$ ; & en supposant  $x = a$ , on auroit  $a^3 - a^3 = 0$ , ce qui ne doit pas être. Et la raison en est que  $A$  étant supposé constant ou variable, la valeur de  $S P dx$  dans  $A S P dx$  ne change pas; mais dans  $S g P dx$  la valeur n'est pas la même, lorsqu'on suppose  $g$  constant &  $= a a$ , ou lorsqu'on suppose  $g$  variable &  $= x x$ .

$$\begin{aligned}
 &= S t d x \left( n' - \frac{d p'}{d x} + \frac{d d q'}{d x^2} - \frac{d^3 r'}{d x^3} \&c. \right) \\
 &+ V y x + t \left( p' - \frac{d q'}{d x} + \frac{d d r'}{d x^2} \&c. \right) \\
 &+ \text{constante} + \frac{d t}{d x} \left( q' - \frac{d r'}{d x} + \frac{d d s'}{d x^2} \&c. \right) \\
 &\quad + \frac{d d t}{d x^2} \left( r' - \frac{d s'}{d x} + \&c. \right) \\
 &\quad + \frac{d^3 t}{d x^3} \left( s' - \&c. \right) \\
 &\quad + \&c.
 \end{aligned}$$

La constante introduite par l'intégration doit être telle que pour le terme du commencement duquel on compte l'intégration  $S V d x$ , les parties absolues ou non affectées du signe d'intégration s'évanouissent, en prenant l'intégrale de la première partie, de manière qu'elle s'évanouisse aussi dans le même cas; alors pour la fin de l'intégration l'on doit avoir  $S H d x = A$ .

26. COROLLAIRE. Dans la partie affectée du signe  $S$  d'intégration la variabilité doit avoir lieu pour toute l'étendue de l'intégration; mais dans les parties absolues il suffit d'avoir égard au commencement & à la fin de l'intégration. Or les conditions de la question doi-

vent donner les valeurs de  $d x$ ,  $t$ ,  $d t$ ,  $\frac{d t}{d x}$ ,  $\frac{d d t}{d x^2}$ , &c. pour le commencement & la fin.

Lorsque par les conditions du commencement on aura déterminé la valeur de la constante qu'on doit ajouter, constante qui doit faire évanouir les parties absolues pour le même commencement, il ne restera qu'à procéder à l'intégration finale. Pour le commencement ou  $g = 0$ , on aura  $n' = N + A N'$ ;  $p' = P + A P'$ ;  $q' = Q + A Q'$ ; &c. Mais pour la fin de l'intégration l'on doit avoir évidemment  $g = A$ ;  $n' = N$ ;  $p' = P$ ;  $q' = Q$ ; &c.

27. REMARQUE. Afin de mieux comprendre l'esprit de la méthode des variations, les commençans doivent observer que le rapport des variations de  $x$  & de  $y$  est donné pour le commencement & pour la fin de l'intégration, qu'il est donné, dis-je, par la nature du problème; mais pour le milieu ces variations ne sont assujetties à aucune loi.

On considère donc premièrement une certaine relation entre les deux variables  $x$  &  $y$ , que cette relation soit connue, ou qu'on doive la déterminer dans la suite; & la formule  $S. V dx$  qui contient cette relation, étant renfermée entre certaines limites, c'est-à-dire, ayant lieu depuis un commencement donné jusques à une fin ou limite donnée, doit avoir une certaine valeur; mais à chaque  $x + vx$  doit répandre  $y + vy$ ; cependant le rapport de  $yx$  à  $vy$ , n'est assujetti à aucune loi, excepté pour les variations extrêmes.

Ayant pris la partie intégrale, de manière qu'elle devienne  $= 0$  pour le commencement de l'intégration, on doit ensuite ajouter une constante qui rende nulles les parties absolues pour le même commencement. Ce qui étant fait, on pourra procéder à l'intégration finale, afin d'obtenir par ce moyen la véritable variation depuis le commencement jusqu'à la fin. Or on peut employer la doctrine des variations pour résoudre deux espèces de questions, l'une dans laquelle connoissant la relation entre  $x$  &  $y$ , on demande la variation de la formule  $S V dx$ , prise depuis un certain terme, jusques à un terme donné; l'autre dans laquelle on cherche la relation qu'il doit y avoir entre  $x$  &  $y$ , pour que la variation de la formule ait une certaine propriété, qu'elle soit, par exemple, un *maximum* ou un *minimum*; & alors on suppose cette variation  $= 0$ . Mais il y a deux cas, l'un lorsqu'on suppose que les variations de  $x$  & de  $y$  ne sont assujetties à aucune loi, l'autre si l'on demande qu'elles suivent une certaine loi.

28. PROBLÈME. Si la fonction  $V$  renferme non-seulement les deux variables  $x$  &  $y$  avec leurs différentielles

$p = \frac{dy}{dx}$ ,  $q = \frac{dp}{dx}$  &c., mais encore plusieurs formules intégrales  $z = \int M dx$ ,  $z' = \int M' dx$ , &c., de manière que l'on ait,

$$dm = M' dx + N' dy + P' dp \text{ &c.}$$

$$dm' = M'' dx + N'' dy + P'' dp' \text{ &c.}$$

$$dV = (H dz + H' dz' + \text{&c.}) + M dx + N dy + P dp \text{ &c.},$$

trouver la variation de la formule intégrale  $SV dx$ . Si on entreprend de résoudre ce problème en suivant la méthode qu'on a employée dans la solution du précédent, on verra facilement que le calcul n'est pas troublé par les deux formules intégrales  $z$  &  $z'$ ; il ne le seroit pas même quand il y en auroit plusieurs autres. C'est pourquoi toute la solution (en ne supposant que deux formules  $z$  &  $z'$ ) se réduit, après avoir fixé les limites de l'intégration, à prendre les intégrales  $\int H dx = g$  &  $\int H' dx = g'$ , de manière que pour le commencement de l'intégration on ait  $g = 0$ ,  $g' = 0$ ; tandis que pour la fin de l'intégration  $g = A$ ,  $g' = A'$ . Ces quantités étant trouvées, on fera

$$N + (A - g) N' + (A' - g') N'' = n';$$

$$P + (A - g) P' + (A' - g') P'' = p';$$

$$Q + (A - g) Q' + (A' - g') Q'' = q';$$

&c.

Et en attribuant à  $x$  &  $y$  des variations quelconques on aura selon la solution du problème précédent,

$$\nu SV dx = S \epsilon dx \left( n' - \frac{dp'}{dx} + \frac{d^2 q'}{dx^2} - \text{&c.} \right)$$

$$+ V \nu x + \epsilon \left( p' - \frac{dq'}{dx} + \text{&c.} \right)$$

$$+ \text{constante} + \frac{d \epsilon}{dx} \left( q' - \frac{dr'}{dx} + \text{&c.} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{d^2 \varepsilon}{dx^2} \left( r' - \frac{ds'}{dx} + \&c. \right) \\
 & + \frac{d^3 \varepsilon}{dx^3} \left( s' - \&c. \right) \\
 & \&c.
 \end{aligned}$$

formule dans laquelle on suppose  $dx$  constant.

COROLLAIRE. Si donc la fonction  $V$  renfermoit un plus grand nombre de formules intégrales de la forme  $S m'' dx$ ,  $S m''' dx$ ,  $\&c.$ , l'expression de la variation cherchée ne changeroit pas; seulement la valeur des quantités  $n'$ ,  $p'$ ,  $q'$ ,  $\&c.$  seroit différente.

29. REMARQUE. Quoique les formules intégrales  $g = SH dx$ ,  $g' = SH' dx$  renferment deux variables  $x$  &  $y$ , & qu'ainsi elles paroissent ne pouvoir être susceptibles d'une valeur déterminée; cependant on peut faire attention que dans toutes ces questions on suppose une certaine relation entre  $x$  &  $y$ , que cette relation soit donnée absolument, ou qu'elle doive être déterminée par le calcul; c'est pourquoi, en faisant usage de cette relation, on pourra regarder  $y$  comme une fonction de  $x$ , & les formules  $g$  &  $g'$  obtiendront des valeurs déterminées.

30. PROBLEME. Si la fonction  $m$  renferme non-seulement les variables  $x$  &  $y$  & leurs valeurs différentielles  $p$ ,  $q$ ,  $\&c.$ , mais encore la formule intégrale  $u = S m' dx$ , de manière que l'on ait

$$dm = h du + M' dx + N' dy + P' dp \&c.$$

$$dm' = M'' dx + N'' dy + P'' dp \&c.$$

supposant de plus que  $V$  est une fonction de  $x$ ,  $y$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $\&c.$  & de la formule intégrale  $z = S m dx$ , de sorte que l'on ait  $dV = H dz + M dx + P dp \&c.$  déterminer la variation de la formule intégrale  $S V dx$ . Par la solution de l'avant-dernier problème, il sera aisé de trouver la variation de  $S m dx = z$ ; car ayant déterminé les limites de l'intégration, & ayant fait  $Sh dx = g''$ , de manière que pour le commencement on ait  $g'' = 0$ , &  $g'' = A'$  pour la fin de l'intégration: si alors on fait  $N' + (A' - g') N'' = N'''$ ;  $P' + (A' - g') P'' = P'''$ ;

$R' + (A' - g') Q'' = Q'''$ ; &c. on' aura par la solution du problème cité :  $v\zeta = m\upsilon x + Sdx \left( \epsilon N''' + \frac{P''' d\epsilon}{dx} + \frac{Q''' d d\epsilon}{dx^2} \&c. \right)$ ,  $dx$  étant supposé constant &  $\epsilon = \upsilon y - p\upsilon x$ . Maintenant en supposant  $dV = H d\zeta + dV'$ , &  $\upsilon V = H\upsilon\zeta + \upsilon V'$ , il viendra  $dV' = M dx + N dy + P dp$  &c., & (comme il suit de l'endroit cité) l'on aura l'équation (D) suivante :  $\upsilon SV dx = V\upsilon x + S(H dx \upsilon\zeta - H d\zeta \upsilon x)$

$$+ Sdx \left( N\epsilon + \frac{P d\epsilon}{dx} + \frac{Q d d\epsilon}{dx^2} \&c. \right),$$

en substituant  $Sdx \left( N\epsilon + \frac{P d\epsilon}{dx} \&c. \right)$ , au lieu de  $S(dx \upsilon V' - dV' \upsilon x)$  dans l'équation (B) du problème dont on vient de parler. Mais  $d\zeta = m dx$ , &  $v\zeta = m\upsilon x + Sdx (N''\epsilon + \&c.)$ ; donc  $dx \upsilon\zeta - d\zeta \upsilon x = dx \upsilon\zeta - m dx \upsilon x = dx Sdx \left( N'''\epsilon + \frac{P''' d\epsilon}{dx} + \frac{Q''' d d\epsilon}{dx^2} \&c. \right)$ . Si l'on fait maintenant  $SH dx = g$ , de

manière que pour le commencement de l'intégration l'on ait  $g = 0$ , & que pour la fin de l'intégration  $g = A$ , on trouvera facilement l'équation  $SH(dx \upsilon\zeta - d\zeta \upsilon x) = S(A - g) dx \left( N'''\epsilon + \frac{P''' d\epsilon}{dx} + \&c. \right)$ .

Remettant maintenant les valeurs de  $N'''$ ,  $P'''$ ,  $Q'''$ , &c., & supposant pour abrégé que

$$\begin{aligned} N + (A - g) N' + (A - g)(A' - g') N'' &= n'; \\ P + (A - g) P' + (A - g)(A' - g') P'' &= p'; \\ &\&c. \end{aligned}$$

Il est visible que la variation cherchée sera  $\upsilon SV dx = V\upsilon x + Sdx \left( n'\epsilon + \frac{p' d\epsilon}{dx} + \frac{q d d\epsilon}{dx^2} + \&c. \right) (*)$ ,

(\*) Car en faisant les substitutions convenables,

formule d'où l'on peut tirer la même expression que nous avons trouvée vers la fin de la solution de l'avant-dernier problème.

REMARQUE. Si la fonction  $m'$  renfermoit une formule intégrale, dans ce cas les lettres  $p'$ ,  $q'$ , &c. recevraient une valeur différente, dépendante de la dernière formule intégrale que l'on auroit; & il est aisé de voir comment on pourroit trouver la variation dans ce cas. Enfin de quelque manière que la formule  $S V dx$  soit compliquée, ce que nous avons dit jusqu'ici suffit pour faire trouver sa variation.

*De la variation des formules intégrales à trois variables  $x, y, z$ , dont la relation est déterminée par deux équations, de manière que l'on peut regarder deux variables quelconques prises séparément comme une.*

31. PROBLÈME.  $V$  étant une formule qui renferme les trois variables  $x, y, z$ , avec leurs différentielles quelconques, trouver sa variation. Si l'on écrit dans  $V$  au lieu des variables  $x, y, z$ , les quantités  $x + vx, y + vy, z + vz$ ; qu'au lieu des différentielles de ces variables on écrive  $dx + vdx, dy + vdy, dz + vdz$ , &c. & que du résultat  $V'$  on retranche  $V$ , on aura la variation cherchée  $vV$ . D'où l'on peut conclure qu'on trouvera cette variation par la méthode de la différenciation, en substituant le signe de la variation au lieu de celui de la différenciation. Il sera cependant bon d'observer qu'en prenant les variations des différentielles, il est indifférent de

l'équation (D) donnera  $v S V dx = V v x$

$$+ S(A - g) dx \left( N' t + (A' - g') N'' t + \&c. \right) \\ + S dx \left( N t + \frac{p dt}{dx} + \&c. \right)$$

d'où il est aisé de tirer l'équation que nous avons donnée.



placet le signe de la variation avant ou après le signe de la différenciation, comme nous l'avons prouvé ci-devant.

COROLLAIRE. Puisque nous pouvons regarder  $y$  aussi-bien que  $z$  comme une fonction de  $x$ , si on suppose  $\frac{dy}{dx} = p$ ,  $\frac{dz}{dx} = p'$ , on aura  $vp = \frac{dvy - p dvx}{dx}$ ,

&  $vp' = \frac{dvz - p' dvx}{dx}$ . Si l'on fait maintenant  $vy$

$- p vx = t$ ,  $vz - p' vx = t'$ , on aura  $dvy - p dvx - q dx vx = dt$ , &  $dvz - p' dvx - q' dx vx$

$= dt'$ , en faisant  $\frac{dp}{dx} = q$ ,  $\frac{dp'}{dx} = q'$ ; de sorte que

$vp - q vx = \frac{dt}{dx}$ ;  $vp' - q' vx = \frac{dt'}{dx}$ , en supposant

de plus  $\frac{dp}{dx} = r$ ;  $\frac{dq}{dx} = r'$ ; &c. & faisant  $dx$  constant.

On aura aussi  $vq - r vx = \frac{ddt}{dx^2}$ ;  $vq' - r' vx = \frac{ddt'}{dx^2}$ ;

& ainsi de suite.

REMARQUE I. Si l'on n'avoit qu'une seule équation entre les trois variables  $x, y, z$ ; les lettres  $p, p'$  n'auroient aucune valeur déterminée, puisque cette équation subsistant, les rapports de  $dy : dx$ , & de  $dz : dx$ , seroient indéterminés. Cependant on pourroit dans ce cas, en employant la règle du problème, trouver la variation de  $V$ , & cela en n'introduisant ni les lettres  $p$  &  $p'$ , ni leurs différentielles.

REMARQUE II. Dans les courbes à double courbure l'on a deux équations entre trois co-ordonnées perpendiculaires; ainsi ce que nous dirons ici pourra servir à trouver ces sortes de courbes qui sont susceptibles d'un maximum ou d'un minimum.

32. PROBLEME.  $V$  étant supposée une fonction des variables  $x, y, z$ , & de leurs différentielles d'un ordre quelconqué, trouver la variation de la formule intégrale

S.  $V dx$ . Ayant fait  $\frac{dy}{dx} = p$ ,  $dp = q dx$ , &c.  $d\zeta = p'dx$ ,  $dp' = q'dx$ , &c. On pourra faire en sorte que  $V$  devienne une fonction de  $x, y, \zeta, p, q$ , &c. Ainsi sa différentielle aura cette forme :  $dV =$

$$M dx + N dy + P dp + Q dq + \&c. \\ + N' d\zeta + P' dp' + Q' dq' + \&c.$$

L'on aura aussi ,

$$vV = Mvx + Nvy + Pvp + \&c. \\ + N'v\zeta + P'vp' + \&c.$$

Mais, par ce que nous avons dit ci-devant, il est visible que  $vSV dx = S(Vd vx + dxvV) = Vvx + S(dxvV - dVvx)$ ; mais en substituant les valeurs de  $vV$  & de  $dV$ , l'on a  $\frac{dxvV - dVvx}{dx} =$

$$Mvx + Nvy + Pvp + Qvq + \&c. \\ + N'v\zeta + P'vp + Q'vq' + \&c. \\ - Mvx - Np vx - Pq vx + \&c. \\ - N'p' vx - P'q' vx + \&c.$$

Mais  $Nvy - Np vx = N\epsilon$ ,  $N'v\zeta - N'p' vx = N'\epsilon'$ ; &c. de sorte que la variation cherchée pourra (on suppose  $dx$  constant) s'exprimer ainsi :  $vSV dx =$

$$Vvx + S dx \left\{ N\epsilon + \frac{P d\epsilon}{dx} + \frac{Q dd\epsilon}{dx^2} + \&c. \right. \\ \left. + N'\epsilon' + \frac{P' d\epsilon'}{dx} + \frac{Q' dd\epsilon'}{dx^2} + \&c. \right\}.$$

équation à laquelle on peut, par ce qui précède, donner la forme suivante :  $vSV dx$

$$= S\epsilon dx \left( N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} + \&c. \right) \\ + S\epsilon' dx \left( N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} + \&c. \right)$$

$$\begin{aligned}
 &+ V y x + \epsilon \left( P - \frac{dQ}{dx} \text{ \&c.} \right) \\
 &+ \text{const.} + \epsilon' \left( P' - \frac{dQ'}{dx} \text{ \&c.} \right) \\
 &+ \frac{d\epsilon}{dx} \left( Q - \frac{dR}{dx} \text{ \&c.} \right) \\
 &+ \frac{d\epsilon'}{dx} \left( Q' - \text{\&c.} \right) \\
 &+ \text{\&c.}
 \end{aligned}$$

On doit observer à l'égard de la constante les mêmes choses que ci-devant.

COROLLAIRE. Si l'on ne regardoit une quelconque des trois variables  $x, y, z$ , comme une fonction des deux autres, de manière que  $z$  &  $y$  pussent être déterminées en  $x$  par une relation connue, ou qui doit être déterminée par la nature de la variation, la formule  $S V dx$  ne sauroit avoir de signification déterminée. Mais si la formule  $V dx$  est intégrable par elle-même sans supposer aucune relation entre les trois variables, dans ce cas la variation de l'intégrale  $S V dx$  ne sauroit envelopper aucune formule intégrale; de sorte qu'alors le second membre de l'équation précédente ne doit renfermer aucune formule intégrale; donc dans ce cas on aura les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} \text{ \&c.} &= 0. \\
 N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} \text{ \&c.} &= 0.
 \end{aligned}$$

Réciproquement si ces deux équations ont lieu, ce sera un signe certain que la formule différentielle  $V dx$  est intégrable par elle-même, sans supposer aucune relation entre les variables.

EXEMPLE. Supposons que l'on ait  $S V dx = \frac{z dy}{x dz} =$

$\frac{p\zeta}{p'x}$  (\*); donc  $V = \frac{-p\zeta}{xxp'} + \frac{p}{x} + \frac{\zeta q}{xp'} - \frac{\zeta p q'}{xp'p'}$ .

En différenciant cette valeur de  $V$ , on trouvera facilement  $N = 0$ ;  $P = \frac{-\zeta}{xxp'} + \frac{1}{x} - \frac{\zeta q'}{xp'p'}$ ;  $Q = \frac{\zeta}{xp'}$ .

Mais  $N' = \frac{-p}{xxp'} + \frac{q}{xp'} - \frac{pq'}{xp'p}$ ;  $P' = \frac{p\zeta}{xxp'p'} - \frac{\zeta q}{xp'p'} + \frac{2\zeta p q'}{xp'p'p'}$ , &  $Q' = \frac{-\zeta p}{xp'p'}$ . Maintenant à cause de  $N = 0$ , la première équation donnera  $-\frac{dP}{dx} + \frac{d dQ}{dx^2} = 0$  &  $P - \frac{dQ}{dx} = C$ , constante.

À l'égard de la seconde équation  $N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d dQ'}{dx^2} = 0$ , on en conclura  $SN'dx = P' - \frac{dQ'}{dx}$ ; ainsi en substituant la valeur de  $N'$ , il sera nécessaire que la formule  $N'dx = \frac{-p dx}{xxp'} + \frac{q dx}{xp'} - \frac{p dx}{xp'p'}$  soit intégrable. Mais à cause de  $dp = q dx$ , on aura  $SN'dx = \frac{p}{xp'}$ ; donc  $\frac{dQ'}{dx} = P' - SN'dx = \frac{p\zeta}{xxp'p'} - \frac{\zeta q}{xp'p'} + \frac{2\zeta p q'}{xp'p'p'} - \frac{p}{xp'}$ ; ce qu'on trouvera être vrai en différenciant  $Q = \frac{-\zeta p}{xp'p'}$ .

---

(\*) Car  $dy = p dx$  &  $d\zeta = p' dx$ ; ainsi  $\frac{d\gamma}{d\zeta} = \frac{p dx}{p' dx} = \frac{p}{p'}$ , &  $\frac{\zeta dy}{x d\zeta} = \frac{p\zeta}{xp'}$ .

REMARQUE. Si la formule  $SV dx$  doit avoir une valeur qui soit un *maximum* ou un *minimum*, on égalera séparément à 0 les deux parties intégrales, ce qui donnera ces deux équations :

$$N - \frac{dP}{dx} + \&c. = 0.$$

$$N' - \frac{dP'}{dx} + \&c. = 0.$$

Ces équations expriment une double relation entre les trois variables  $x, y, z$ , telle qu'on peut ensuite regarder  $y$  aussi-bien que  $z$ , comme une fonction de  $x$ . Lorsque ces équations sont différentielles, l'intégration introduit dans le calcul, & cela pour chaque équation, autant de constantes arbitraires qu'il est désigné par le plus haut degré différentiel de chaque équation. On doit ensuite déterminer ces constantes, de manière qu'on satisfasse aux conditions prescrites de l'intégration de la formule  $V dx$ , pour le commencement & pour la fin de l'intégration ; & faisant de plus en sorte que les parties absolues de la variation soient  $= 0$ . 1°. On doit déterminer la constante dont on a parlé ci-dessus, de manière qu'elle satisfasse aux conditions pour le commencement de l'intégration, où ces quantités  $t, \frac{dt}{dx}, \frac{ddt}{dx^2}, t', \frac{dt'}{dx}, \&c.$  ont ordinairement des valeurs déterminées par la nature de la question. Or comme cela arrive également à la fin de l'intégration, on détermine par toutes ces valeurs les constantes introduites par l'intégration.

REMARQUE II. Les membres qui expriment la variation de la formule  $SV dx$ , se partagent comme naturellement en deux classes, dont l'une regarde la variation de  $y$ , c'est-à-dire, son rapport relativement à  $x$ , comme si  $z$  étoit constant, & l'autre regarde le rapport de  $z$  à  $x$  comme si  $y$  étoit constant. De-là on doit conclure que s'il y avoit une quatrième variable  $u$ , qu'on peut aussi regarder comme une fonction de  $x$ , il faudroit ajouter une autre classe qui renfermeroit des membres semblables dépendans de la seule variabilité

de  $u$ , & ainsi de suite s'il y avoit encore d'autres variables. De sorte que quelque nombre de variables que contienne  $V$ , pourvu qu'on puisse regarder ces variables comme toutes déterminées par une seule, on trouvera toujours la variation de  $SVdx$  par la même méthode.

33. PROBLEME.  $m$  étant supposée une fonction des variables  $x, y, z$ , & de leurs différentielles d'un degré quelconque, trouver la variation de la formule  $SVdx$ , en supposant que  $V$  renferme non-seulement les variables  $x, y, z$ , & leurs différentielles d'un ordre quelconque, mais encore la formule intégrale  $Sm dx = u$ . On aura  $dV = H du + M dx + N dy + P dp + Q dq + \&c.$   
 $+ N' dz + P' dp' + Q' dq' + \&c.$

Mais à cause de  $du = m dx$ , on a  $d m = M^b dx + N^b dy + P^b dp + \&c.$   
 $+ N^f dz + P^f dp' + \&c. (*)$

Si au lieu du signe  $d$  on substitue par-tout le signe  $v$ , on aura les variations de  $V$  & de  $m$ ; or  $vSVdx = V vx + S(dx v V - dV vx)$ . Mais à cause que la valeur de la différentielle de  $dV$  ne diffère de la précédente qu'en ce qu'elle contient la partie  $H du = H m dx$  qu'elle ne contenoit pas dans le dernier problème, & que la variation  $vV$  contient de plus la partie  $H vu$  qu'elle ne contenoit pas dans le même problème, la variation cherchée sera exprimée par une formule semblable à la précédente, en y ajoutant le membre  $SH(dx v Sm dx - m dx vx) = SH dx (v Sm dx m vx)$ . Mais par ce que  $Sm dx$  est une formule semblable à celle du problème précédent, on aura, en supposant  $dx$  constant, l'équation suivante:  $v Sm dx =$

(\*) Les lettres  $b$  &  $f$  ne désignent pas ici des exposans; on ne s'en est servi que pour distinguer les coefficients de la dernière équation de ceux de la première.

$$mvx = Sdx \left\{ \begin{array}{l} N^b t + \frac{P^b dt}{dx} + \frac{Q^b ddt}{dx^2} \&c. \\ N^f t' + \frac{P^f dt'}{dx} + \frac{Q^f ddt'}{dx^2} \&c. \end{array} \right.$$

Supposons l'intégrale  $SHdx = g$ , de manière que pour le commencement de l'intégration on doive avoir  $g = 0$ , & que pour la fin de l'intégration  $g$  soit  $= A$ . Cela posé, l'on aura pour toute l'étendue de l'intégration  $SHdx (vSm dx - mvx)$

$$= S(A - g)dx \left\{ \begin{array}{l} N^b t + \frac{P^b dt}{dx} \&c. \\ N^f t' + \frac{P^f dt'}{dx} \&c. \end{array} \right.$$

Supposons maintenant, pour abrégér, que l'on fasse

$$\begin{array}{l} N + (A - g)N^b = N''; \quad N' + (A - g)N^f = N' \\ P + (A - g)P^b = P''; \quad P' + (A - g)P^f = P' \\ Q + (A - g)Q^b = Q''; \quad Q' + (A - g)Q^f = Q' \\ \&c. \qquad \qquad \qquad \&c. \end{array}$$

Alors on aura  $vSVdx = Vvx +$

$$S'dx \left\{ \begin{array}{l} N'' t + \frac{P'' dt}{dx} + \frac{Q'' ddt}{dx^2} + \&c. \\ N' t' + \frac{P' dt'}{dx} + \frac{Q' ddt'}{dx^2} + \&c. \end{array} \right.$$

La partie intégrale, étant développée, il viendra

---

(\*) On doit se souvenir que  $n$  &  $s$  ne désignent pas des exposans, de sorte que  $N'$  sert seulement à distinguer  $N'$  de  $N$ ,  $N'$ ,  $N^b$ ,  $N^f$ .

$$\begin{aligned}
vSV dx &= St dx \left( N'' - \frac{dP''}{dx} + \frac{ddQ''}{dx^2} \&c. \right) \\
&+ S t' dx \left( N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{ddQ'}{dx^2} \&c. \right) \\
&+ V vx + t \left( P'' - \frac{dQ''}{dx} \&c. \right) \\
&+ \text{const.} + t' \left( P' - \frac{dQ'}{dx} \&c. \right) \\
&+ \frac{dt}{dx} \left( Q'' - \&c. \right) \\
&+ \frac{dt'}{dx} \left( Q' - \&c. \right) \\
&+ \&c.
\end{aligned}$$

REMARQUE. Il est aisé de voir par la méthode que nous venons de suivre dans la solution du problème, comment il faudroit s'y prendre si  $V$  renfermoit plusieurs formules intégrales, ou si  $m$  contenoit aussi des formules intégrales, quand même ces formules intégrales contiendroient plus de trois variables.

*De la variation des formules à trois variables, dont la relation est donnée par une seule équation.*

34. PROBLÈME. Trouver les variations des formules

$$p = \left( \frac{dz}{dx} \right), \quad p' = \left( \frac{dz}{dy} \right). \quad \text{L'on aura } p + vp = \left( \frac{d(z + vz)}{d(x + vx)} \right) (*) = \left( \frac{dz}{dx} + \frac{dvz}{dx} - \frac{dz dvx}{dx^2} \right).$$

(\*) Dans cette expression  $y$  est censé constant, & l'on considère  $z$  comme une fonction des variables  $x$  &  $y$ ; de



Dont à cause de  $p = \frac{d\zeta}{dx}$ , on aura  $vp = \left(\frac{dv\zeta}{d\zeta}\right) - \left(\frac{d\zeta}{dx} \cdot \frac{dvx}{dx}\right) = \left(\frac{dv\zeta}{d\zeta}\right) - p \left(\frac{dvx}{dx}\right)$ . On aura aussi  $vp' = \left(\frac{dv\zeta}{dy}\right) - p' \left(\frac{dvy}{dy}\right)$ . Dans la valeur de  $vp$ ,  $y$  est regardé comme constant; mais  $x$  est regardé comme constant dans la valeur de  $vp'$ .

REMARQUE I. On peut regarder également chacune des variables  $x$ ,  $y$ ,  $\zeta$  comme une fonction des deux autres; mais il suffit de se servir des deux formules différentielles du premier degré, dont on vient de trouver les variations; parce qu'on peut réduire les

autres à celles-là. En effet  $\left(\frac{dx}{d\zeta}\right) = \frac{1}{p}$ ;  $\left(\frac{dy}{d\zeta}\right) = \frac{1}{p'}$ ;

$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-p}{p'}$ ; &  $\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{-p'}{p}$ ; or  $p$  &  $p'$  sont

des fonctions de  $x$  &  $y$ . Maintenant il est aisé de

voir qu'on aura  $v \left(\frac{dx}{d\zeta}\right) = \frac{-vp}{pp} = -\frac{1}{pp} \left(\frac{dv\zeta}{dx}\right)$

$+ \frac{1}{p} \left(\frac{dvx}{dx}\right)$ ;  $v \left(\frac{dy}{d\zeta}\right) = \frac{-vp'}{p'p'} = -\frac{1}{p'p'} \left(\frac{dv\zeta}{dy}\right)$

$+ \frac{1}{p'} \left(\frac{dvy}{dy}\right)$ ;  $v \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-vp}{p'} + \frac{pv p'}{p'p'} = -\frac{1}{p'} \times$

$\left(\frac{dv\zeta}{dx}\right) + \frac{p}{p'} \left(\frac{dvx}{dx}\right) + \frac{p}{p'p'} \left(\frac{dv\zeta}{dy}\right) - \frac{p'}{p'} \left(\frac{dvy}{dy}\right)$ .

REMARQUE II. Les formules différentielles ne fau-  
roient avoir une valeur certaine, si l'on ne compare

même on peut considérer  $vx$ ,  $vy$ ,  $v\zeta$  comme des fonctions infiniment petites de  $x$  & de  $y$ ; car quand même elles dépendroient de  $\zeta$ , celle-ci est une fonction de  $x$  &  $y$ ; on voit donc que  $vx$  dispa-  
roît devant  $x$  & que  $v\zeta$  s'évanouit devant  $\zeta$ .

ensemble deux différentielles, en regardant la troisième variable, s'il y en a trois, ou même toutes les autres s'il y en a un plus grand nombre, comme constantes. Ainsi dans le cas présent où l'on suppose trois varia-

bles  $x, y, z$  & une seule équation, la formule  $\left(\frac{dz}{dx}\right)$

ne peut avoir aucune signification déterminée si on ne regarde  $y$  comme constant. En effet en regardant  $z$  comme une fonction de  $x$  & de  $y$ , telle que  $dz =$

$p dx + p' dy$ , on aura  $\frac{dz}{dx} = p + p' \frac{dy}{dx}$ . Or cette

équation peut avoir lieu d'une infinité de manières quel que soit le rapport de  $dy$  à  $dx$ . On peut remarquer encore que quoique  $dz = p dx + p' dy$ , il ne s'ensuit pas que  $vz = p vx + p' vy$ ; parce que, quoique  $z$  soit une fonction de  $x$  &  $y$ , nous pouvons lui attribuer une variation qui lui soit propre & qui soit indépendante de celles de  $x$  & de  $y$ .

35. PROBLÈME. *Trouver les variations des formules*

*du second degré*  $q = \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$ ;  $q' = \left(\frac{d^2 z}{dx dy}\right)$ ;  $q'' =$

$\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right)$ . Dans le problème précédent nous avons fait

$p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$  &  $p' = \left(\frac{dz}{dy}\right)$ ; ainsi on aura  $q =$

$\left(\frac{dp}{dx}\right)$ ;  $\bullet = \left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dp'}{dx}\right)$  &  $q'' = \left(\frac{dp'}{dy}\right)$ . Main-

tenant en cherchant les variations de  $q, q', q''$ , par la même méthode qui nous a fait trouver celles de  $p$  & de  $p'$  dans le problème précédent, nous aurons

$vq = \left(\frac{dvp}{dx}\right) - q \left(\frac{dvx}{dx}\right)$ , où l'on trouve  $\left(\frac{dvp}{dx}\right)$

en différenciant la valeur de  $vp$ , dans la supposition de  $y$  constant, & divisant le résultat par  $dx$ , ce qui donne

$$\left(\frac{dvp}{dx}\right) = \left(\frac{ddvz}{dx^2}\right) - q \left(\frac{dvx}{dx}\right) - p \left(\frac{ddvx}{dx^2}\right) (*),$$

à cause de  $q = \left(\frac{dp}{dx}\right)$ ; d'où l'on conclut  $vq =$

$$\left(\frac{ddvz}{dx^2}\right) - 2q \left(\frac{dvx}{dx}\right) - p \left(\frac{ddvx}{dx^2}\right).$$

De même à cause de  $q' = \left(\frac{dp}{dy}\right)$ , on aura aussi  $vq' =$

$$\left(\frac{dvp}{dy}\right) - q' \left(\frac{dvy}{dy}\right). \text{ Mais } \left(\frac{dvp}{dy}\right) = \left(\frac{ddvz}{dx dy}\right)$$

$$- q' \left(\frac{dvx}{dx}\right) - p \left(\frac{ddvx}{dx dy}\right); \text{ ainsi } vq' = \left(\frac{ddvz}{dx dy}\right)$$

$$- q' \left(\frac{dvx}{dx}\right) - q' \left(\frac{dvy}{dy}\right) - p \left(\frac{ddvx}{dx dy}\right). \text{ La troisième}$$

$$\text{formule } q'' = \left(\frac{dp'}{dy}\right) \text{ donne } vq'' = \left(\frac{ddvz}{dy^2}\right) - 2q'' \times$$

$$\left(\frac{dvy}{dy}\right) - p' \left(\frac{ddvy}{dy^2}\right).$$

REMARQUE. L'autre valeur de  $q' = \left(\frac{dp'}{dx}\right)$  donne

$$vq' = \left(\frac{ddvz}{dx dy}\right) - q' \left(\frac{dvx}{dx}\right) - q' \left(\frac{dvy}{dy}\right) - p' \times$$

$$\left(\frac{ddvy}{dx dy}\right), \text{ valeur qui paroît entièrement différente de la}$$

première. Mais on peut ramener l'une à l'autre, en rendant la variation de  $x$  indépendante de  $y$ , & la variation de  $y$  indépendante de  $x$ ; de sorte que

$$\left(\frac{dvx}{dy}\right) \text{ sera alors } = 0 \text{ \& } \left(\frac{dvy}{dx}\right) = 0, \text{ ce qui}$$

(\*) Avant de différencier on doit substituer la valeur de  $vp$  prise du problème précédent.

donnera aussi  $\left(\frac{d^2 v x}{dx dy}\right) = 0$ , &  $\left(\frac{d^2 v y}{dx dy}\right) = 0$ ; & alors les deux valeurs seront égales.

Mais pour aller au-devant de tous les doutes, nous n'avons qu'à supposer (comme on le supposera toujours dans la suite), que la seule variable  $z$  subit des variations, les variations de  $x$  & de  $y$  étant chacune  $= 0$ ; de sorte que l'on ait  $vx = 0$  &  $vy = 0$ , &

alors nous aurons  $vp = \left(\frac{dvz}{dx}\right)$  &  $vp' = \left(\frac{dvz}{dy}\right)$ .

On aura aussi  $q = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$ ;  $q' = \left(\frac{ddz}{dx dy}\right)$ ;  $q'' = \left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$  comme ci-devant; mais alors  $vq = \left(\frac{ddvz}{dx^2}\right)$ ;  $vq' = \left(\frac{ddvz}{dx dy}\right)$ ;  $vq'' = \left(\frac{ddvz}{dy^2}\right)$ .

36. PROBLÈME. Trouver les variations des différentielles de tous les genres, en supposant que  $z$  est une fonction de  $x$  &  $y$ , & que  $vx = 0$  &  $vy = 0$ . On aura

$r = \left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)$ ;  $r' = \left(\frac{d^3 z}{dx^2 dy}\right)$ ;  $r'' = \left(\frac{d^3 z}{dx dy^2}\right)$ ;

$r''' = \left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right)$ . Et il est évident qu'on aura  $vr =$

$\left(\frac{d^3 vz}{dx^3}\right)$ ;  $vr' = \left(\frac{d^3 vz}{dx^2 dy}\right)$ ;  $vr'' = \left(\frac{d^3 vz}{dx dy^2}\right)$ ;

$vr''' = \left(\frac{d^3 vz}{dy^3}\right)$ . En général il est aisé de voir que pour

une différentielle d'un ordre quelconque  $\left(\frac{d^{m+n} z}{dx^m dy^n}\right)$ , on

aura toujours sa variation  $= \left(\frac{d^{m+n} vz}{dx^m dy^n}\right)$ .

REMARQUE. Puisque les variables  $x$ ,  $y$  sont indépendantes l'une de l'autre, & que l'une peut varier par tous les degrés possibles, l'autre restant

invariable, il est visible que la formule  $\left(\frac{dx}{dy}\right)$  ne sauroit avoir une signification déterminée : ainsi cette formule ne doit jamais se rencontrer dans le calcul ; & il en est de même de celle-ci  $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ . Mais parce que  $z$  est une fonction de  $x$  &  $y$ , les formules  $\left(\frac{dz}{dx}\right)$  ;  $\left(\frac{dz}{dy}\right)$  ont des significations déterminées.

37. PROBLEME. En regardant toujours  $z$  comme une fonction de  $x$  & de  $y$  &  $V$  comme une fonction des trois variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$  & de leurs différentielles d'un ordre quelconque, trouver la variation de  $V$ . Pour ôter l'ap-

parence des différentielles, supposons  $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$  ;  $p' = \left(\frac{dp}{dy}\right)$  ;  $q = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$  ;  $q' = \left(\frac{ddz}{dx dy}\right)$  ;  $q'' = \left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$  ;  $r = \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)$  ;  $r' = \left(\frac{d^3z}{dx^2 dy}\right)$  ;  $r'' = \left(\frac{d^3z}{dx dy^2}\right)$  ;  $r''' = \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)$  ; &c. Si nous faisons à présent  $z = t$  (\*), il viendra  $vp = \left(\frac{dt}{dx}\right)$  ;  $vp' = \left(\frac{dt}{dy}\right)$  ;  $vq = \left(\frac{ddt}{dx^2}\right)$  ; &c. Maintenant à cause que  $V$  peut être regardé comme une fonction des quantités  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $p$ ,  $p'$ ,  $q$ ,  $q'$ , &c., on aura

$$\begin{aligned} dV = & H dx + M dy + N dz + P dp + Q dq + R dr \&c. \\ & + P' dp' + Q' dq' + R' dr' \&c. \\ & + Q'' dq'' + R'' dr'' \&c. \\ & + R''' dr''' \&c. \\ & \&c. \end{aligned}$$

(\*) On doit regarder  $t$  comme une fonction de  $x$  & de  $y$ .

& parce que  $v x = 0$  &  $v y = 0$ , on a

$$\begin{aligned} vV &= N v\zeta + P v p + Q v q \text{ \&c.} \\ &\quad + P' v p' + Q' v q' \text{ \&c.} \\ &\quad + Q'' v q'' \text{ \&c.} \\ &\quad \text{\&c.} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} vV &= N \dot{\zeta} + P \left( \frac{d\zeta}{dx} \right) + Q \left( \frac{d\zeta}{dy} \right) \text{ \&c.} \\ &\quad + P' \left( \frac{d\zeta}{dx} \right) + Q' \left( \frac{d\zeta}{dy} \right) \text{ \&c.} \\ &\quad + Q'' \left( \frac{d\zeta}{dy} \right) \text{ \&c.} \\ &\quad \text{\&c.} \end{aligned}$$

**REMARQUE.** Nous supposons que  $\zeta$  doit être regardé comme une fonction de  $x$  & de  $y$ , & nous attribuons des variations à  $\zeta$  sans en donner à  $x$  & à  $y$ , ce qui paroît contradictoire. En effet, si on substituoit la valeur de  $\zeta$  en  $x$  &  $y$  dans  $V$ , la quantité  $V$  deviendrait une fonction de  $x$  & de  $y$  & n'auroit par conséquent aucune variation. Pour faire évanouir cette difficulté, il n'y a qu'à regarder  $\zeta$  comme une fonction inconnue de  $x$  &  $y$  (quand même on la connoit), & ne substituer sa valeur en  $x$  &  $y$ , qu'après qu'on aura entièrement trouvé la variation qui dépend uniquement de  $\zeta$ .

Avant de passer au problème suivant, nous remarquerons que si  $V$  exprime une fonction des variables  $x, y, \zeta$  & que  $\zeta$  soit regardé comme une fonction de  $x$  &  $y$ , on aura, par une conséquence des principes établis au commencement de ce calcul,  $vSSV dx dy = SSV dx dy$ , où  $vV$  désigne la variation de  $V$ ; & l'on aura besoin d'une double intégration pour l'une & l'autre formule. Maintenant si nous supposons  $SSV dx dy = S dx SV dy = V'$ ; en différenciant dans la supposition de  $x$  seul variable, on trouvera  $SV dy = \left( \frac{dV'}{dx} \right) dx$ , &

en différenciant cette dernière équation, en considérant  $y$  seul comme variable, il viendra  $V = \left( \frac{d d V'}{d x d y} \right)$ ; de sorte que l'intégrale  $V'$  doit être telle que  $V = \left( \frac{d d V'}{d x d y} \right)$ . Mais parce qu'il faut faire deux intégrations, l'une en regardant  $x$  comme constant, l'autre en regardant  $y$  comme constant, il est visible que l'on doit ajouter à l'intégrale, au lieu de deux constantes arbitraires, une fonction de  $x$  que nous ferons  $= X$ , & une fonction arbitraire de  $y$  que nous représenterons par  $Y$ ; par conséquent l'on aura l'intégrale complète  $SSV dx dy = V' + X + Y$ .

38. PROBLEME.  $V$  étant une formule quelconque composée des trois variables  $x, y, z$  & de leurs différentielles, &  $z$  étant regardé comme une fonction de  $x$  & de  $y$ , trouver la variation de la formule intégrale  $SSV dx dy$ . Il est visible par le problème précédent que  $dV = H dx$

$$+ M dy + N dz + P dp + Q dq + R dr + \&c. \\ + P' dp' + Q' dq' + R' dr' + \&c. \\ + Q'' dq'' + R'' dr'' + \&c. \\ + R''' dr''' + \&c.$$

Mais à cause de  $vx = 0$  & de  $vy = 0$ , on trouve

$$\left. \begin{aligned} vV &= N v z + P v p + \&c. \\ &+ P' v p' + \&c. \\ &+ \&c. \end{aligned} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{aligned} N z + P \left( \frac{dz}{dx} \right) + Q \left( \frac{ddz}{dx^2} \right) \&c. \\ + P' \left( \frac{dz}{dy} \right) + Q' \left( \frac{ddz}{dx dy} \right) \&c. \\ + Q'' \left( \frac{ddz}{dy^2} \right) \&c. \end{aligned} \right.$$

Si on multiplie par  $dx dy$ , on aura

$$v V dx dy = dx dy \cdot \left\{ \begin{array}{l} N t + P \left( \frac{dt}{dx} \right) \&c. \\ + P' \left( \frac{dt}{dy} \right) \&c. \\ \&c. \&c. \end{array} \right.$$

Et  $SS v V dx dy$ , ou  $v SSV dx dy =$

$$SS dx dy \cdot \left\{ \begin{array}{l} N t + P \left( \frac{dt}{dx} \right) \&c. \\ + P' \left( \frac{dt}{dy} \right) \&c. \\ \&c. \end{array} \right.$$

REMARQUE. Si la nature de la fonction  $\tau$  & de  $v \tau = t$ , étoit donnée en  $x$  &  $y$ , on pourroit facilement, en multipliant chaque terme de la valeur de  $v V$  par  $dx dy$  & intégrant ensuite deux fois (à cause du double signe  $SS$ ), trouver la variation de la formule proposée. Mais lorsque  $\tau$  est supposé inconnu & qu'on doit le trouver par la nature du problème, alors  $t$  n'a aucune signification déterminée : comme, par exemple, si on demande que la formule  $SSV dx dy$  soit un *maximum* ou un *minimum*. Dans ce cas il est nécessaire de réduire la variation de cette formule de manière qu'après le signe  $SS$  on trouve  $t$  & non les différentielles de  $t$ . Or avant d'entreprendre cette résolution, nous observerons que lorsqu'on parvient à des formules intégrales dans lesquelles l'une des deux variables  $x, y$  est regardée comme constante, on peut indiquer facilement laquelle des variables est regardée comme constante. La formule  $S.T dx$  indiquera dans la suite l'intégrale de  $T dx$  en supposant  $y$  constant, & la formule  $S.T dy$  indiquera l'intégrale de  $T dy$ , en regardant  $x$  comme constant. Pour ce qui regarde les formules doubles  $SSV dx dy$ , on doit les intégrer deux fois, de manière qu'une des intégrations ait rapport



à la variabilité de  $x$ , & l'autre à la variabilité de  $y$ .

39. PROBLEME. Transformer la variation de la formule  $SSV dx dy$  trouvée dans le problème précédent, de manière qu'après le double signe  $SS$  on trouve partout  $t$ , mais non pas ses différentielles. Pour que cette transformation soit plus étendue, soient  $T$  &  $u$  des fonctions des variables  $x$  &  $y$ , & considérons cette

$$\text{formule } SST dx dy \left( \frac{du}{dx} \right) = S dy ST dx \left( \frac{du}{dx} \right).$$

Or dans  $ST dx \left( \frac{du}{dx} \right)$  on doit regarder  $x$  seul comme

variable, & alors on aura  $dx \left( \frac{du}{dx} \right) = du$ , parce

que  $y$  est regardé comme constant; c'est pourquoi on doit avoir  $ST du = Tu - SudT$ . Mais parce que dans  $dT$  on regarde  $x$  seul comme variable, il con-

viendra de faire  $dT = dx \left( \frac{dT}{dx} \right)$ , pour avoir

$$ST dx \left( \frac{du}{dx} \right) = Tu - Sudx \left( \frac{dT}{dx} \right).$$

Cela posé, il est visible que notre formule réduite donnera

$$SST dx dy \left( \frac{du}{dx} \right) = ST u dy - SS u dx dy \left( \frac{dT}{dx} \right).$$

Si l'on change les variables, on aura  $SST dx dy \left( \frac{du}{dy} \right)$

$$= ST u dx - SS u dx dy \left( \frac{dT}{dy} \right).$$

Ce principe établi, la réduction de la variation trouvée dans le problème précédent pourra se faire ainsi:

$$SSP dx dy \left( \frac{dt}{dx} \right) = SP t dy - SS t dx dy \left( \frac{dP}{dx} \right);$$

$$SSP' dx dy \left( \frac{dt}{dy} \right) = SP' t dx - SS t dx dy \left( \frac{dP'}{dy} \right);$$

& si pour les membres suivans, on fait  $\left( \frac{dt}{dx} \right) = u$

& par conséquent  $\left(\frac{dd\tau}{dx^2}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right)$ , il viendra  
 $SSQ dx dy \left(\frac{dd\tau}{dx^2}\right) = SQ dy \left(\frac{d\tau}{dx}\right) - SS dx dy \left(\frac{dQ}{dx}\right) \left(\frac{d\tau}{dx}\right)$ . Mais en réduisant le dernier membre  
de la même manière, on trouve  $SSQ dx dy \left(\frac{dd\tau}{dx^2}\right)$   
 $= SQ dy \left(\frac{d\tau}{dx}\right) - S\tau dy \left(\frac{dQ}{dx}\right) + SS\tau dx dy \left(\frac{ddQ}{dx^2}\right)$ .  
Par la même substitution, nous aurons  $\left(\frac{dd\tau}{dx dy}\right) =$   
 $\left(\frac{du}{dy}\right)$ ; donc  $SSQ' dx dy \left(\frac{dd\tau}{dx dy}\right) = SQ' dx \left(\frac{d\tau}{dx}\right)$   
 $- SS dx dy \left(\frac{d\tau}{dx}\right) \left(\frac{dQ'}{dy}\right) = SQ' dx \left(\frac{d\tau}{dx}\right) -$   
 $S\tau dy \left(\frac{dQ'}{dy}\right) + SS\tau dx dy \left(\frac{ddQ'}{dx dy}\right) = Q'\tau - S\tau dx$   
 $\left(\frac{dQ'}{dx}\right) + SS\tau dx dy \left(\frac{ddQ'}{dx dy}\right) - S\tau dy \left(\frac{dQ'}{dx}\right)$ , à cause  
de  $SQ' dx \left(\frac{d\tau}{dx}\right) = Q'\tau - S\tau dx \left(\frac{dQ'}{dx}\right)$ . On aura aussi  
 $SSQ'' dx dy \left(\frac{dd\tau}{dy^2}\right) = SQ'' dx \left(\frac{d\tau}{dy}\right) - S\tau dx \left(\frac{dQ''}{dy}\right) +$   
 $SS\tau dx dy \left(\frac{ddQ''}{dy^2}\right)$ . Mais parce que  $\left(\frac{d^3\tau}{dx^3}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right)$ , on a  
 $SSR dx dy \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) = SR dy \left(\frac{du}{dx}\right) - Sudy \left(\frac{dR}{dx}\right)$   
 $+ SSudy dx dy \left(\frac{ddR}{dx^2}\right)$ , &  $SSudy dx dy \left(\frac{ddR}{dx^2}\right) =$   
 $S\tau dy \left(\frac{ddR}{dx^2}\right) - SS\tau dx dy \left(\frac{d^3R}{dx^3}\right)$ ; de sorte que

$$\text{l'on aura } SSR' dx dy \left( \frac{d^3 t}{dx^3} \right) = SR dy \left( \frac{d dt}{dx^2} \right) - \\ S dy \left( \frac{dt}{dx} \right) \left( \frac{dR}{dx} \right) + S t dy \left( \frac{d dR}{dx^2} \right) - SS t dx dy \left( \frac{d^3 R}{dx^3} \right).$$

Si l'on fait maintenant attention que  $\left( \frac{d^3 t}{dx^2 dy} \right) = \left( \frac{d du}{dx dy} \right)$ , on verra aisément que  $SSR' dx dy \left( \frac{d du}{dx dy} \right)$  est

$$= R' u - S u dx \left( \frac{dR'}{dx} \right) + SS u dx dy \left( \frac{d dR'}{dx dy} \right) - \\ S u dy \left( \frac{dR'}{dy} \right). \text{ Et parce qu'ici } SS u dx dy \left( \frac{d dR'}{dx dy} \right) \\ = S t dy \left( \frac{d dR'}{dx dy} \right) - SS t dx dy \left( \frac{d^3 R'}{dx^2 dy} \right), \text{ on peut}$$

conclure que  $SSR' dx dy \left( \frac{d^3 t}{dx^2 dy} \right) = R' \left( \frac{dt}{dx} \right)$

$$- S \left( \frac{dt}{dx} \right) dx \left( \frac{dR'}{dx} \right) + S t dy \left( \frac{d dR'}{dx dy} \right) \\ - S \left( \frac{dt}{dx} \right) dy \left( \frac{dR'}{dy} \right) - SS t dx dy \left( \frac{d^3 R'}{dx^2 dy} \right).$$

Si nous changeons  $x$  en  $y$ , nous aurons

$$SSR'' dx dy \left( \frac{d^3 t}{dx dy^2} \right) = R'' \left( \frac{dt}{dy} \right) \\ - S \left( \frac{dt}{dy} \right) dy \left( \frac{dR''}{dy} \right) + S t dx \left( \frac{d dR''}{dx dy} \right) \\ - S \left( \frac{dt}{dy} \right) dx \left( \frac{dR''}{dx} \right) - SS dx dy \left( \frac{d^3 R''}{dx dy^2} \right).$$

$$\text{Et } SSR''' dx dy \left( \frac{d^3 t}{dy^3} \right) = SR''' dx \left( \frac{dt}{dy^2} \right) -$$

$$S \left( \frac{dt}{dy} \right) dx \left( \frac{dR'''}{dy} \right) + S t dx \left( \frac{d dR'''}{dy^2} \right) - \\ S S t dx dy \left( \frac{d^3 R'''}{dy^3} \right); \text{ \& ainsi de suite.}$$

En substituant ces valeurs, nous trouverons  $v S S V dx dy$

$$= S S t dx dy \left\{ \begin{aligned} & N - \left( \frac{dP}{dx} \right) + \left( \frac{d dQ}{dx^2} \right) - \left( \frac{d^3 R}{dx^3} \right) \\ & - \left( \frac{dP'}{dy} \right) + \left( \frac{d dQ'}{dx dy} \right) - \left( \frac{d^3 R'}{dx^2 dy} \right) \\ & + \left( \frac{d dQ''}{dy^2} \right) - \left( \frac{d^3 R''}{dx dy^2} \right) \\ & - \left( \frac{d^3 R'''}{dy^3} \right) \end{aligned} \right.$$

$$+ S P t dy + S Q dy \left( \frac{dt}{dx} \right) - S t dy \left( \frac{dQ}{dx} \right) + Q' t \\ + S P' t dx - S t dx \left( \frac{dQ'}{dx} \right) - S t dy \left( \frac{dQ'}{dy} \right) \\ + S Q' dx \left( \frac{dt}{dy} \right) - S t dx \left( \frac{dQ''}{dy} \right) \\ + S R dy \left( \frac{d dt}{dx^2} \right) + R' \left( \frac{dt}{dx} \right) - S \left( \frac{dt}{dx} \right) dx \left( \frac{dR'}{dx} \right) \\ - S \left( \frac{dt}{dy} \right) dy \left( \frac{dR''}{dy} \right) + S R''' dx \left( \frac{d dt}{dy^2} \right) \\ - S \left( \frac{dt}{dx} \right) dy \left( \frac{dR'}{dx} \right) + R'' \left( \frac{dt}{dy} \right) \\ - S \left( \frac{dt}{dx} \right) dy \left( \frac{dR'}{dy} \right) - S \left( \frac{dt}{dy} \right) dx \left( \frac{dR''}{dx} \right) \\ - S \left( \frac{dt}{dy} \right) dx \left( \frac{dR'''}{dy} \right) + S t dy \left( \frac{d dR}{dx^2} \right) + S t dy \left( \frac{d dR'}{dx dy} \right)$$

$$+ S t d x \left( \frac{d d R''}{d x d y} \right) + S t d x \left( \frac{d d R'''}{d y^2} \right) \\ \&c.$$

REMARQUE I. La première partie de cette expression est assez évidente, & l'on peut arranger commodément les autres parties de la manière suivante :

$$S t d y \left\{ \begin{array}{l} P - \left( \frac{d Q}{d x} \right) + \left( \frac{d d R}{d x^2} \right) \\ - \left( \frac{d Q'}{d y} \right) + \left( \frac{d d R'}{d x d y} \right) \&c. \\ + \left( \frac{d d R''}{d y^2} \right) \end{array} \right\} \\ + S t d x \left\{ \begin{array}{l} P' - \left( \frac{d Q''}{d y} \right) + \left( \frac{d d R'''}{d y^2} \right) \\ - \left( \frac{d Q'}{d x} \right) + \left( \frac{d d R''}{d x d y} \right) \&c. \\ + \left( \frac{d d R'}{d x^2} \right) \end{array} \right\} \\ + S \left( \frac{d t}{d x} \right) d y \left\{ \begin{array}{l} Q - \left( \frac{d R}{d x} \right) \\ - \left( \frac{d R'}{d y} \right) \&c. \end{array} \right\} \\ + S \left( \frac{d t}{d y} \right) d x \left\{ \begin{array}{l} Q' - \left( \frac{d R'''}{d y} \right) \\ - \left( \frac{d R''}{d x} \right) \&c. \end{array} \right\}.$$

Il est aisé de voir comment on pourroit continuer.

40. REMARQUE II. Parmi ces formules intégrales il y en a qui contiennent  $dy$ , & d'autres qui contiennent  $dx$ ; dans les premières on doit supposer  $x$  constant

& égal à la valeur qu'il doit avoir à la fin de l'intégration ; mais on doit regarder  $y$  comme constant & égal à la valeur qu'il doit recevoir à la fin de l'intégration, lorsqu'il s'agit des formules qui contiennent  $dx$ .

Maintenant pour savoir si la quantité désignée par la formule  $\iint V dx dy$  est un *maximum* ou un *minimum*, il faut, avant toutes choses, égaler à zéro la partie de la variation qui est affectée du double signe d'intégration, de quelle manière que l'on prenne  $vz = z$ , de sorte que

$$\begin{aligned} \text{On aura } 0 = N - \left( \frac{dP}{dx} \right) + \left( \frac{ddQ}{dx^2} \right) &\&c. \\ - \left( \frac{dP'}{dy} \right) + \left( \frac{ddQ'}{dx dy} \right) &\&c. \\ + \left( \frac{ddQ''}{dy^2} \right) &\&c. \end{aligned}$$

Cette équation exprimera la nature de la quantité cherchée. A l'égard des quantités qui doivent être introduites par la double intégration, on les déterminera de manière à satisfaire aux autres parties de la variation.

### *Usages du Calcul des variations dans la Géométrie.*

41. AVANT d'entrer en matière, nous observerons que si  $V$  est une fonction de  $x$  & de  $y$  sans différentielles, on aura  $dV = M dx + N dy$  &  $vV = Nvy$ , en supposant (ce qui est très-permis)  $vx = 0$ ; donc  $vV dx = Nvy dx$ . Or si  $V$  désigne l'ordonnée  $BN$  d'une courbe  $AM$  (fig. 2), dont la courbe variée soit  $am$ , l'on aura  $vV = Nn$ ; & il est clair que l'aire infiniment petite  $Nnfr$  sera la variation de l'aire  $BNrb$ , & que  $AanN$  (variation de l'aire  $DANB$ ) sera la somme des élémens de la variation de l'aire correspondante à l'abscisse  $DB$ ; ainsi cette aire  $AanN$  sera  $= \iint vV dx$ : car l'élément  $Nnfr = vV dx$ . Mais en supposant que toutes les variations qui répondent

dent aux ordonnées de la courbe sont nulles, excepté celles qui répondent à  $Bb = dx$ , alors toute la variation se réduit à l'élément  $v V dx = N r f n$ ; & lorsque  $S V dx$  devra être un *maximum* ou un *minimum*,  $v V dx = N r f n$  sera  $= 0$ ; & il faudra, selon ce qu'on a dit ci-dessus (15), faire  $N = 0$ . Lorsqu'on cherche une courbe qui jouit de quelque propriété du *maximum* ou du *minimum*, comme, par exemple, si on demande quelle est la courbe qui sous même longueur renferme un plus grand espace entre deux ordonnées, la partie correspondante de l'axe & la courbe, cette propriété affecte toute la courbe & non un de ses points en particulier; de sorte que les *maxima* & les *minima*, dont il est ici question, sont fort différens de ceux dont on a parlé dans le calcul différentiel.

42. PROBLÈME. Trouver la courbe dans laquelle  $S V dx = S dx (y^3 - n a x y)$  est un *maximum* ou un *minimum* (\*). On aura  $dV = M dx + N dy = - a n y dx - a n x dy + 3 y^2 dy$  &  $N = - a n x + 3 y^2$ ; donc en

faisant  $N = 0$ , on aura  $3 y^2 = a n x$ ,  $y^2 = \frac{a n}{3} x$ , équation à une parabole dont le sommet seroit A

(fig. 5), l'axe AP & le paramètre  $= \frac{a n}{3}$ . Pour déterminer si cette valeur est un *maximum* ou un *minimum*, au lieu d'une parabole je suppose une ligne droite qui se confonde avec l'axe AP; mais alors  $y = 0$ , &  $S dx (y^3 - n a x y) = 0$ ; donc nous avons trouvé un *maximum* & non un *minimum*.

REMARQUE. Puisque le terme représenté par  $M dx$  est  $= 0$ , on pourra différencier V en supposant  $x$  constant, & égaliser le résultat à zéro.

(\*) Il est visible que le problème seroit le même si on demandoit de trouver quelle doit être la relation entre les  $x$  & les  $y$ , pour que la formule proposée soit un *maximum* ou un *minimum*.

43. PROBLÈME. Trouver la courbe dans laquelle la formule  $S \sqrt{dx} = S. (15 a a x x y - 15 a^3 x y + 5 a^2 y^3 - 3 y^5) dx$  est un maximum ou un minimum. On aura  $N = 15 a a x x - 15 a^3 x + 15 a^2 y^2 - 15 y^4 = 0$ ; donc  $a^2 x^2 - a^3 x + a^2 y^2 - y^4 = (ax - yy)(ax + yy - aa) = 0$ , équation de la courbe cherchée. A cause des deux facteurs l'on a deux courbes, savoir,  $ax = y^2$ , &  $(a - x)a = y^2$ , toutes les deux à la parabole. Pour savoir si ces courbes sont pour le maximum ou pour le minimum, substituons la valeur de  $y$  prise des équations que nous venons de trouver, dans la formule  $S \sqrt{dx}$ , supposons  $x$  infiniment petit, & effaçons les termes qui s'évanouissent respectivement aux autres; alors la première courbe donnera  $S. -10 a^3 x dx \sqrt{ax}$ , la seconde donnant  $S. 2 a^3 dx$  (\*). Et si l'on suppose  $y = 0$ , la formule deviendra  $S. 0 dx = 0$ . Ainsi la seconde courbe donne un maximum, & la première un minimum, c'est-à-dire, un maximum négatif.

44. PROBLÈME. Entre toutes les courbes qui ont la même abscisse  $x$ , trouver celle dans laquelle, en supposant  $p = \frac{dy}{dx}$ , ou  $dy = p dx$ ,  $S dx \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{x}}$  est un minimum. On aura  $V = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{x}}$ , &  $dV = M dx + N dy + P dp = \frac{-dx \sqrt{(1+pp)}}{2x \sqrt{x}} + \frac{p dp}{\sqrt{x(1+pp)}}$ . Donc dans l'équation ci-dessus (12), on aura  $M = -\frac{\sqrt{(1+pp)}}{2x \sqrt{x}}$ ,  $N = 0$ ,  $P = \frac{p}{\sqrt{x(1+pp)}}$ ,  $Q = 0$ ,  $R = 0$ , &c. & dans l'équation  $N - \frac{dP}{dx} +$

(\*) Car à cause de  $x = \frac{1}{\infty}$ , on a  $(a - x).a = aa = y^2$  &  $y = a$ .



$\frac{ddQ}{dx^2}$  &c. = 0, qui (15) doit avoir lieu dans ce cas, on aura  $N - \frac{dP}{dx} = 0$  &  $dP = 0$ , à cause de  $N = 0$ , &  $P = \frac{p}{\sqrt{[x.(1+pp)]}}$  sera une constante (\*) que nous ferons =  $\frac{1}{\sqrt{a}}$ ; donc  $p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$ ,  $dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$ ; &  $y = S. \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} = S. \frac{dx.x}{\sqrt{(ax-xx)}}$ , équation à une cycloïde (\*\*).

45. PROBLÈME.  $\gamma$  désignant la surface d'un solide engendré par la courbe  $AM$  (fig. 2) autour de l'axe  $DP$ , laquelle en exprimant par  $c$  la circonférence d'un cercle dont le rayon est = 1, est =  $S. c\sqrt{dx} \sqrt{(1+pp)}$  (\*\*\*), &  $V$  étant une fonction quelconque de cette surface, trouver

(\*) Car puisque la différentielle de  $P$  est = 0,  $P$  est constant ou = 0; mais il est évident qu'il n'est pas égal à zéro.

(\*\*) Ayant mené  $AP$  perpendiculaire sur la base  $AD$  de la demi-cycloïde  $AB$  (fig. 6), & les autres lignes que représente la figure, faisons  $AP = Da = x$ ,  $Pp = Nm = dx$ ,  $Pn = y$ ,  $Mm = Nn = dy$ . A cause de la corde  $Bb$  parallèle à la tangente  $Nt$  de la cycloïde, les triangles  $Nmn$ ,  $Bab$  sont semblables. Mais ce dernier est semblable au triangle  $bAD$ : car le triangle  $BbD$  rectangle en  $b$ , est divisé par la perpendiculaire sur son hypoténuse  $BD$  en deux triangles semblables entr'eux (voyez la Géométrie); donc  $dy : dx :: x : ba$ ; &  $dy = \frac{dx.x}{ba} = \frac{dx.x}{\sqrt{(ax-xx)}}$ , en faisant le diamètre  $BD = a$ , ce qui donne  $ba = \sqrt{(ax-xx)}$ .

(\*\*\*) Car  $dy = p'dx \& \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{(1+pp)}$ .

la nature de la courbe dans laquelle  $SV dx$  est un maximum ou un minimum. Soit fait  $dV = n d\zeta$ ,  $n$  sera une fonction de  $\zeta$ . Or en faisant  $\zeta = S.m dx$ , on aura  $m = y \sqrt{1+pp}$ , en négligeant la constante qui ne peut changer la nature de la courbe, &  $dm = dy \sqrt{1+pp}$

$$+ \frac{y p dp}{\sqrt{1+pp}} = M' dx + N' dy + P' dp \&c.$$

$$(24); \text{ donc } M' = 0, N' = \sqrt{1+pp}, P' =$$

$$\frac{y p}{\sqrt{1+pp}}, Q' = 0, R' = 0, \&c. \text{ Ainsi en suppo-}$$

sant que  $A$  &  $g$  aient les mêmes significations que ci-dessus (24), nous aurons  $(A - g) \cdot \sqrt{1+pp}$

$$- \frac{d(A - g) P'}{dx} = 0; \text{ donc en faisant } A - g = u,$$

multipliant par  $dx$  & transposant, on aura  $u dx \sqrt{1+pp}$

$$+ \frac{y p u}{\sqrt{1+pp}} = \frac{u p^2 dx}{\sqrt{1+pp}} +$$

$$\frac{u y dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y p du}{\sqrt{1+pp}}, \text{ à cause de } dy = p dx.$$

$$(1+pp)^{\frac{3}{2}}; \text{ Multipliant par } \sqrt{1+pp}, \text{ transposant ensuite } u p^2 dx$$

$$\& \text{ réduisant, il vient } u dx = \frac{u y dp}{1+pp} + y p du. \text{ Mais}$$

$$\text{à cause de } u = A - g, \& \text{ de } A \text{ qu'on doit traiter}$$

$$\text{comme constant, ainsi qu'on l'a dit ci-devant,}$$

$$\text{on a } du = -dg = -n dx (24); \text{ donc } u dx =$$

$$\frac{u y dp}{1+pp} - y p n dx. \text{ Supposons que } V \text{ soit } = \zeta, \text{ de ma-}$$

$$\text{nière que la formule } S dx S y dx \sqrt{1+pp} \text{ doive}$$

$$\text{être un maximum, on aura } n = 1, S. n dx = g = x.$$

$$\text{Mais parce que } A \text{ désigne } S. n dx \text{ prise depuis le point}$$

$$\text{où commence l'intégrale, jusques au terme où elle}$$

$$\text{finir, en supposant qu'alors } x = a, \text{ on aura } A = a$$

$$\& u = A - g = a - x (*). \text{ Ainsi l'équation de la}$$

(\*) Si  $DB = x$  &  $DP = a$ ,  $A - g$  exprimera la valeur de  $S. n dx$  correspondante à  $BP$ .

courbe sera  $a - x. dx = \frac{(a-x)y dp}{1+pp} - y p dx$ ,  
 équation que je ne sache pas qu'on puisse ramener à  
 une intégrale finie par aucune méthode connue.

46. PROBLÈME. Dans quelle courbe S.  $\frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{y}}$   
 est un minimum? Comparant cette formule avec la  
 formule  $SV dx$ , & faisant attention que  $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$   
 $= dx \sqrt{(1+pp)}$ , on a  $V = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{y}}$  &  $dV$   
 $= M dx + N dy + P dp = \frac{-dy \sqrt{(1+pp)}}{2y \sqrt{y}} +$   
 $\frac{p dp}{\sqrt{y.(1+pp)}}$ ; donc  $M=0$ ,  $N = \frac{-\sqrt{(1+pp)}}{2y \sqrt{y}}$ ,  
 &  $P = \frac{p}{\sqrt{y.(1+pp)}}$ ;  $Q=0$ ,  $R=0$ , &c. Pour

trouver la nature de la courbe, on fera  $N - \frac{dP}{dx} = 0$ .

Pour intégrer cette équation je multiplie par  $dx$  &  
 j'ai en transposant,  $N dx = dP$ ;  $N p dx = p dP$ , &  
 $N dy = p dP$ , à cause de  $p dx = dy$ . Or puisque  $M$   
 $= 0$ , & que  $dV = M dx + N dy + P dp$ , on  
 aura  $dV = N dy + P dp = p dP + P dp$ , & en in-  
 tégrant,  $V = Pp + C$ ,  $C$  étant une constante. Donc

puisque  $V = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{y}}$  &  $P = \frac{p}{\sqrt{y.(1+pp)}}$ ,

on aura  $\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{y}} = \frac{pp}{\sqrt{y.(1+pp)}} + C$ , &  $C =$

$\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{y}} - \frac{pp}{\sqrt{y.(1+pp)}} = \frac{1}{\sqrt{y. \sqrt{(1+pp)}}}$ .

Si on suppose  $C = \frac{1}{\sqrt{a}}$ , on aura  $\frac{1}{a} = \frac{1}{y.(1+pp)}$

$$y.(1+pp) = a; pp = \frac{a-y}{y} = \frac{ay-yy}{yy}, p = \frac{dy}{dx} \\ = \frac{\sqrt{ay-yy}}{y}, \text{ \& } dx = \frac{y dy}{\sqrt{ay-yy}} (*), \text{ \& } \text{équation}$$

tion différentielle du premier ordre qui renferme une constante arbitraire  $a$ . Pour intégrer cette équation, on remarquera que  $\frac{y dy}{\sqrt{ay-yy}} = \frac{\frac{1}{2} a dy}{\sqrt{ay-yy}} -$

$d. \sqrt{ay-yy}$ , \& que  $\frac{\frac{1}{2} a dy}{\sqrt{ay-yy}}$  est la différentielle d'un arc de cercle, dont le rayon  $= \frac{1}{2} a$  \& le sinus  $= \sqrt{ay-yy}$ ; de sorte qu'en désignant cet arc par  $z$ , on a  $x = z - \sqrt{ay-yy} + b$ ,  $b$  est une constante. Ainsi cette intégrale renferme deux constantes arbitraires  $a$  \&  $b$ , introduites par les deux intégrations qu'on a faites.

On voit par-là que cette équation qui fait que la formule proposée devient un *maximum* ou un *minimum*, n'est point entièrement déterminée, puisqu'elle renferme deux constantes arbitraires; on peut donc ajouter au problème proposé deux nouvelles conditions, qu'on remplira au moyen de ces deux constantes.

Si l'on veut, par exemple, que  $x$  étant  $= c$ ,  $P$  soit  $= 0$ , on aura  $\frac{p}{\sqrt{y} \sqrt{1+pp}} = 0 (**)$ ,  $p =$

(\*) Si l'on change  $y$  en  $x$  on aura  $dy = \frac{x dx}{\sqrt{ax-xx}}$  qui est (par le n°. 44) une équation à la cycloïde. Il est bon d'observer qu'en faisant  $PN = x$  (fig 6), on a  $PN =$  l'arc  $Db$  — le sinus de cet arc: car  $Pa = AD = BbD$  \& l'arc  $Bb = bN$ ; donc  $PN + ba =$  l'arc  $Db$ , donc  $PN =$  l'arc  $Db - ba$ .

(\*\*) C'est la même chose que si dans la deuxième formule du n°. 13, on faisoit le membre absolu  $= 0$ .

$\sqrt{(ay - yy)} = 0$ , &  $a = y$ ; par conséquent l'arc  $z$  fera la demi-circonférence d'un cercle dont le diamètre  $= a$ ; ainsi notre intégrale, en substituant  $c$  pour  $x$  &  $0$  pour  $\sqrt{(ay - yy)}$ , deviendra  $c = z + b$ , & l'on aura  $b = c - D$ ,  $D$  étant la demi-circonférence du diamètre  $a$ , par conséquent notre équation sera  $x = z - \sqrt{(ay - yy)} + c - D$ .

Si l'on veut de plus que lorsque  $x = 0$ ,  $y$  soit aussi  $= 0$ , dans ce cas on a  $0 = 0 - 0 + c - D$  &  $c = D$ ; donc on aura  $x = z - \sqrt{(ay - yy)}$ . Maintenant si l'on fait  $D : g :: \frac{1}{2}a : 1$ ,  $g$  sera la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon  $= 1$ , & l'on aura  $D =$

$\frac{ga}{2}$ . Si l'on fait de même  $z : u :: \frac{1}{2}a : 1$ , on aura  $z$

$= \frac{au}{2}$ ,  $u$  étant un arc semblable à l'arc  $z$ , mais pris

dans un cercle dont le rayon  $= 1$ . Mais l'équation

$c = D$  devient alors  $c = \frac{ga}{2}$ , d'où l'on tire  $a = \frac{2c}{g}$ ;

donc  $z = \frac{cu}{g}$ , & notre équation sera  $x = \frac{cu}{g} -$

$\sqrt{\left(\frac{2c}{g}y - yy\right)}$ .

47. PROBLÈME. *Etant donnée une surface courbe, déterminer la ligne la plus courte qu'on peut mener entre deux points pris sur cette surface.* Sur un plan quelconque  $AMP$  (fig. 5), auquel on rapporte la surface, on prendra  $AP$  pour l'axe de la projection de la ligne cherchée. De chaque point  $m$  de cette ligne on abaissera des perpendiculaires  $mM$  sur le plan des  $y$  & des  $x$ ; ces perpendiculaires traceront la ligne  $AM$  qui sera la projection de la ligne cherchée, & celle-ci étant connue, la plus courte ligne demandée le sera aussi. Soit  $AP = x$ ,  $PM = y$ ,  $Mm = z$ ; puisque la nature de la surface est donnée,  $z$  sera donné en  $x$  &  $y$ . Supposons  $dz = e dx + u dy$ ,  $dt = e dx +$

$f dy, du = f dx + g dy$ . La quantité  $f$  doit être la même dans l'une & l'autre formule (\*); mais l'élément de la ligne cherchée (qu'on doit considérer comme une courbe à double courbure) est  $= \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + (tdx + udy)^2} = dx \sqrt{(1 + pp + tt + 2tup + uupp)}$ , en faisant  $dz = p dx$ ; l'intégrale de cette quantité doit donc être un *minimum*. Faisons  $= V$  le multiplicateur de  $dx$  pour avoir

$$dV = \frac{\left\{ \begin{array}{l} + t edx + t f dy + p dp \\ + u e p dx + u f p dy + t u dp \\ + t f p dx + t g p dy + u u p dp \\ + u f p p dx + u g p p dy \end{array} \right\}}{\sqrt{(1 + pp + tt + 2tup + uupp)}}$$

Mais parce que l'on doit avoir ici  $N - \frac{dP}{dx} = 0$ , ou

$$N dx = dP, \text{ on aura } \frac{t f dx + u f p dx + t g p dx + u g p p dx}{\sqrt{(1 + pp + tt + 2tup + uupp)}} \\ = d \left( \frac{p + t u + u u p}{\sqrt{(1 + pp + tt + 2tup + uupp)}} \right). \text{ Mais } f dx$$

(\*) Pour ne laisser aucun doute là-dessus, soit  $S(P dx + Q dy) = V$ ; de manière que l'on ait  $dP = m dx + n dy$ ,  $dQ = M dx + N dy$ ; donc  $P dx = \left( \frac{dV}{dx} \right) dx$ , &  $Q dy = \left( \frac{dV}{dy} \right) dy$ . Dans  $P$  &  $Q$  (fonctions de  $x$  & de  $y$ ), faisons varier successivement  $x$  &  $y$ , pour avoir  $dP = \left( \frac{d dV}{dx dx} \right) dx + \left( \frac{d dV}{dx dy} \right) dy$ , &  $dQ = \left( \frac{d dV}{dy dy} \right) dy + \left( \frac{d dV}{dy dx} \right) dx$ . Mais ici  $\left( \frac{d dV}{dy dx} \right) = N = \left( \frac{d dV}{dx dy} \right) = n$ ; donc puisque dans nos équations,  $f$  représente  $n$  &  $N$ ; il est clair que  $f$  a la même valeur dans l'une & dans l'autre.

+  $g p dx = du = f dx + g dy$  ; donc

$$\frac{t du + u p du}{\sqrt{[1 + p p + (t + u p)^2]}} = d \left( \frac{p + t u + u u p}{\sqrt{[1 + p p + (t + u p)^2]}} \right) ;$$

donc , en différenciant le second membre , multipliant ensuite par  $[1 + p p + (t + u p)^2]^{\frac{1}{2}}$  , réduisant , transposant

$$\& \text{ divisant , on aura } dp = \frac{(t p - u) \cdot (d t + p du)}{1 + t t + u u} .$$

Mais  $p = \frac{dy}{dx}$  , &  $dp = \frac{dd y}{dx}$  ; donc (en multipliant tout

$$\text{par } dx^2) \quad dx dd y = \frac{(t dy - u dx) \cdot (d t dx + dy du)}{1 + t t + u u} ,$$

équation de la courbe de projection sur le plan des  $y$  & des  $x$  , laquelle étant trouvée , on déterminera facilement sur la surface donnée , la plus courte ligne entre deux points donnés de cette surface.

Nous avons traité des *maxima* & des *minima* , relativement aux courbes qui ont la même abscisse , cette méthode peut s'appeller la *méthode absolue des maxima & des minima*. Nous appelons *méthode relative des maxima & des minima* , celle qui nous apprend à déterminer les courbes qui jouissent de la propriété du *maximum* ou du *minimum* , non pas parmi toutes les courbes qui ont une même abscisse , mais seulement entre celles qui ont une ou plusieurs propriétés communes : le fameux problème des *isopérimètres* , proposé au commencement de ce siècle , par lequel on demandoit de déterminer entre toutes les courbes de même longueur & correspondantes à la même abscisse , celle qui jouit de quelque propriété du *maximum* ou du *minimum* , appartient à cette seconde méthode. Il faut bien remarquer que la propriété ou les propriétés communes , dont il s'agit ici , doivent affecter toute la courbe , & non un ou plusieurs de ses élémens. Il est bon aussi d'observer que les *maxima* & les *minima* sont de telle nature , que si on fait un changement infiniment petit dans la courbe , la courbe variée aura le même *maximum* , ou le même *minimum*.

48. PROBLÈME. Entre toutes les courbes rapportées à la même abscisse  $AB$  (fig. 7), dans lesquelles l'expression  $V'$  a la même valeur, déterminer celle dans laquelle  $V$  est un maximum ou un minimum. Supposons que  $az$  soit la courbe cherchée & que dans cette courbe on ait  $V' = B$ , quantité déterminée, que l'on ait aussi  $V = A$  qui doit être un maximum ou un minimum; ayant fait  $AP = x$ ,  $PM = y$ ,  $pn = y'$ ,  $Pp = dx$ , je fais varier  $y$  &  $y'$ , & prenant la variation de  $B$  & de  $A$  par la méthode ordinaire, & égalant à 0 l'une & l'autre variation, j'aurai facilement l'équation de la courbe.

Supposons qu'en prenant la variation par rapport à l'ordonnée  $y$ , j'aie  $vydA$ , & que j'aie  $vy'dA'$ , en prenant la même variation par rapport à  $y' = y + dy$ , & prenant  $dA$  &  $dA'$  conformément aux règles qu'on a suivies dans les variations, & que la valeur variée de  $V$  soit  $= vydA + vy'dA'$ , & celle de  $V' = vydB + vy'dB'$ , on aura  $vydA + vy'dA' = 0$ ,  $vydB + vy'dB' = 0$ . Multipliant la première équation par  $f$  & la seconde par  $g$ , il vient  $vy.f dA + vy'.f dA' = 0$ , &  $vy.g dB + vy'.g dB' = 0$ . Ajoutant ensuite ces équations, j'aurai  $vy(f dA + g dB) + vy'(f dA' + g dB') = 0$ , équation qui ne peut avoir lieu dans toutes les suppositions des valeurs de  $vy$  &  $vy'$ , à moins que l'on n'ait à la fois  $f dA + g dB = 0$ , &  $f dA' + g dB' = 0$ ; mais en prenant la variation qui arrive à  $f dA + g dB$ , lorsque  $y$  devient  $y'$ , on a  $f' dA' + g' dB' = 0$ , & comparant cette dernière avec  $f dA' + g dB' = 0$ , il vient  $f' = f$ ,  $g' = g$ ; de sorte que  $f$  &  $g$  sont des constantes quelconques. Pour résoudre le problème proposé, on fera  $f dA + g dB = 0$  (\*), d'où l'on tirera l'équation de la courbe.

(\*) Si l'on chasse  $vy$  &  $vy'$  des équations ci-dessus, on aura  $\frac{vy}{vy'} = \frac{-dA'}{dA} = \frac{-dB'}{dB}$ ; donc  $\frac{dA'}{dA} = \frac{dB'}{dB}$ ; mais  $dA' = dA + ddA$ , &  $dB' = dB + ddB$ ; donc  $1 + \frac{ddA}{dA} = 1 + \frac{ddB}{dB}$ , ou  $\frac{ddA}{dA} = \frac{ddB}{dB}$ , & en inté-



REMARQUE I. Il est visible que la solution sera la même, soit qu'on demande la courbe qui parmi toutes celles qui ayant une propriété commune  $V'$  rendent  $V$  un *maximum* ou un *minimum*, soit qu'on demande la courbe qui parmi toutes celles qui jouissant de la propriété commune  $V$  rendent  $V'$  *maximum* ou *minimum*. L'on peut aussi proposer le problème, de manière qu'il appartienne à la méthode absolue des *maxima* & des *minima*; car il revient au même que si on demandoit de déterminer entre toutes les courbes rapportées à la même abscisse celle dans laquelle  $fV + gV'$  est un *maximum* ou un *minimum*; de sorte que l'on n'a besoin que de la variation d'une seule ordonnée  $y$ , & nullement de la variation de  $y'$ . Si l'agissoit de la formule  $fSV dx + gSV' dx$ , il est visible que le problème ne seroit pas différent.

REMARQUE II. Si la variation de  $SV dx$  est supposée =  $Svy dx \left( N - \frac{dP}{dx} \&c. \right)$

$$+ vy \left( P - \frac{dQ}{dx} \&c. \right)$$

&c.

(voyez ci-dessus le n°. 13) &  $vSV' dx =$

$$Svy dx \left( N' - \frac{dP'}{dx} \&c. \right)$$

+ &c.,

pour trouver la courbe dans laquelle  $fSV dx + gSV' dx$  est un *maximum* ou un *minimum*, on égalera à 0 la somme des quantités qui sont sous le signe d'intégration, après avoir multiplié la première par  $f$  & la

seconde par  $g$ , pour avoir  $fSvy dx \left( N - \frac{dP}{dx} \&c. \right)$

grant,  $L. dA = L. dB + c$ , ou  $dA = c dB$ , quantité qui en

faisant  $c = \frac{-g}{f}$ , devient  $f dA = -g dB$ ; donc  $f dA$

+  $g dB = 0$ . On comprendra facilement par les exemples suivans ce qu'on doit entendre par  $dA$  & par  $dB$ .

+  $g S v y d x \left( N' - \frac{dP'}{dx} \&c. \right) = 0$ . Donc en différenciant & divisant par  $v y$ , on aura  $f d x \left( N - \frac{dP}{dx} \&c. \right) + g d x \left( N' - \frac{dP'}{dx} \&c. \right) = 0$ , ou  $f d A + g d B = 0$ , équation d'où l'on tirera aisément celle de la courbe, ainsi qu'on va le voir dans les problèmes suivans.

49. PROBLÈME. *Entre toutes les courbes de même longueur qui passent par les points a & z (fig. 7), déterminer celle dont l'aire A a z B est la plus grande.* La longueur de l'arc a z est  $= S d x \sqrt{(1 + p p)}$ , ce qui est la propriété commune. La variation de cette longueur est donc nulle. C'est pourquoi en supposant  $S V d x = S d x \sqrt{(1 + p p)}$ , on aura  $d V = M d x + N d y +$

$$P d p; \& M = 0, N = 0, P = \frac{p}{\sqrt{(1 + p p)}}, Q$$

$= 0$ , &c. La formule  $S V' d x$  du *maximum* est ici  $= S y d x$ , d'où l'on tire  $d V' = M' d x + N' d y + P' d p + \&c. = d x d y$ . Car  $d x$  est constant,  $M' = 0$ ,  $N' = d x$ ,  $P' = 0$ ,  $Q' = 0$ , &c., ainsi  $v V' = v y d x = v y d B$ ; donc  $d B = d x$ . Si on multiplie  $d V'$  par 1 &  $d V$  par  $b$ , on aura  $f = b$ ,  $g = 1$ , & l'équation

$$f d A + g d B = 0, \text{ deviendra } d x - b d. \frac{p}{\sqrt{(1 + p p)}}$$

$$= 0; \text{ ainsi } d x = b d. \frac{p}{\sqrt{(1 + p p)}}, \& \text{ en intégrant,}$$

$$x + c = \frac{b p}{\sqrt{(1 + p p)}}; \text{ donc } x + c \cdot (1 + p p) =$$

$$b^2 p^2, \text{ } x + c = \frac{b^2 p^2}{[b^2 - (x + c)^2] p^2}, \&$$

$$\frac{x + c}{\sqrt{[b b - (c + x)^2]}} = p = \frac{d y}{d x}; \text{ donc en multipliant}$$

par  $d x$ , intégrant & ajoutant une constante  $a$ , on aura

$a - \sqrt{bb - (x+c)^2} = y$ . D'où l'on tire  $bb - (x+c)^2 = y^2$ , ou  $bb - x'x' = y'y'$  (en faisant  $x+c = x'$ ,  $y-a = y'$ ), équation au cercle. Ainsi la courbe cherchée est un cercle; mais un arc de cercle d'une longueur donnée peut passer par les points  $a$  &  $z$ , en tournant sa concavité ou sa convexité vers l'axe  $AB$ ; dans le premier cas l'aire  $ABza$  sera un *maximum*, mais cette aire sera un *minimum* dans le second cas.

50. PROBLÈME. Entre toutes les courbes de même longueur passant par les points  $A$  &  $M$ , trouver celle qui avec les droites  $AC$ ,  $MC$ , menées au point fixe  $C$ , contient une aire  $ACM$ , qui soit un maximum ou un minimum (fig. 8). Ayant mené  $Cm$  infiniment proche de  $CM$ , avec le rayon  $CB = 1$ , décrivez l'arc  $Bf$ , & avec le rayon  $Cm$  l'arc  $Mn$ . Faisons  $Bb = x$ ,  $bf = dx$ ,  $CM = y$ ,  $nm = dy$ , les secteurs semblables  $Cfb$ ,  $CMn$  donneront  $1 : dx :: y : Mn = ydx$ ; donc l'élément de la courbe  $Mm$  sera  $= \sqrt{(dy^2 + y^2 dx^2)} = dx \sqrt{(pp + yy)}$ , & l'élément de l'aire sera  $= \frac{1}{2} y^2 dx$ . Si dans la formule qui (13) exprime la variation de  $S \sqrt{dx}$  en supposant  $vx = 0$ , on fait  $V = \sqrt{(pp + yy)}$ , & ensuite  $V = \frac{1}{2} y^2 (*)$ , on trouvera, selon la seconde remarque de l'avant-dernier problème, on trouvera, dis-je, en faisant  $f = b$ , &  $g = -1$ , que

$$\begin{aligned} \text{l'équation } f dA + g dB = 0, & \text{ deviendra } \frac{by dx}{\sqrt{(pp + yy)}} \\ - b d. \frac{p}{\sqrt{(pp + yy)}} - y dx = 0; & \text{ donc en multi-} \\ \text{pliant par } p, & \text{ faisant attention que } p = \frac{dy}{dx} \text{ \& trans-} \\ \text{posant, } \frac{by dy}{\sqrt{(pp + yy)}} - b p d. \frac{p}{\sqrt{(pp + yy)}} = y dy, & \\ \text{ou } b d. \sqrt{(pp + yy)} - \frac{b p dp}{\sqrt{(pp + yy)}} = & \end{aligned}$$

(\*) Dans notre problème  $\frac{1}{2} y y$  est représenté par  $V$ .

$b p d. \frac{P}{\sqrt{(p p + y y)}} = y d y$ , dont l'intégrale (\*)  
 donne  $b \sqrt{(p p + y y)} - \frac{b p p}{\sqrt{(p p + y y)}} + b c =$   
 $\frac{b y^2}{\sqrt{(p p + y y)}} + b c = \frac{y^2}{2}$ ,  $b c$  étant une constante  
 arbitraire. Ayant mené  $C P = z$  perpendiculaire à la  
 tangente  $M P$ , les triangles semblables & rectangles  
 $C P M$ ,  $M m n$  donnent  $M m = d x \sqrt{(p p + y y)$ ;  $M n$   
 $= y d x :: C M = y : C P = z = \frac{y^2}{\sqrt{(p p + y y)}}$ ;  
 donc  $2 b z + 2 b c = y^2$  &  $z = \frac{y y - 2 b c}{2 b}$ .

Voici comme on peut prouver que cette équation  
 est au cercle; je tire les lignes  $C M$ ,  $C m$  (fig. 9),  
 infiniment proches avec les tangentes  $P M$  &  $p m$ , cette  
 dernière coupe en  $t$  le prolongement de  $P M$ , je mene  
 aussi les lignes  $C P T$ ,  $C g p$ , la première perpendicu-  
 laire sur  $M P$ , & la seconde perpendiculaire sur  $m p$   
 & supposant que  $M c$ ,  $m c$  sont aussi perpendiculaires  
 aux tangentes dont on vient de parler; il est visible  
 que  $M c$  fera le rayon osculateur de la courbe. Enfin  
 du centre  $C$  ayant décrit l'arc  $M n$ , je fais  $C M = y$ ,  $n m$   
 $= d y$ ; donc  $C P = z = \frac{y y - 2 b c}{2 b}$ . Mais  $g p$  est la

(\*) Si l'on avoit quelque peine à trouver cette inté-  
 grale, on n'auroit qu'à différencier  $\frac{-b p p}{\sqrt{(p p + y y)}}$ , aussi  
 bien que  $\frac{P}{\sqrt{(p p + y y)}}$ , & l'on verroit facilement que  
 la différentielle de la première quantité est  $-\frac{b p d p}{\sqrt{(p p + y y)}}$   
 $-\frac{b p d. P}{\sqrt{(p p + y y)}}$ .

différentielle de CP; donc  $g p = \frac{y dy}{b}$ . Faisant MP

$= t$ , on aura aussi  $m p = t$  (car ces tangentes ne peuvent différer que d'une quantité inassignable); faisons de plus  $M m = ds$ , &  $M c = R$ , rayon osculateur de la courbe. Cela posé, je remarque que les tangentes  $M t$ ,  $m t$ , sont nécessairement égales, parce que l'arc infiniment petit  $M m$  peut être regardé comme circulaire; donc l'angle  $P t p$  extérieur au triangle  $M m t$  vaut le double de l'angle  $M m t$ : or celui-ci a pour mesure la moitié de  $M n$ , dont l'angle  $P t p$  a pour mesure  $M m$ ; donc les triangles  $t g p$ ,  $M c m$  sont sem-

blables, & donnent  $p g : M m :: t p : M c$ , ou  $\frac{y dy}{b} : ds$

::  $t : R = \frac{b t ds}{y dy}$ . Mais à cause des triangles sembla-

bles  $M m n$ ,  $C M P$ , on a  $ds : dy :: y : t$ ; donc

$y dy = t ds$ ; donc  $R = \frac{b t ds}{t ds} = b$ . Ainsi notre courbe

a le rayon osculateur constant, propriété qui convient uniquement au cercle; la courbe cherchée est donc un cercle. Pour le déterminer je tire une ligne  $C D = \sqrt{2 b c}$ , & menant à celle-ci une perpendiculaire  $D c = b$ , du point  $c$  pris pour centre avec le rayon  $b$ , je décris un cercle  $M c D$ , qui satisfera au problème.

51. PROBLÈME. Trouver la courbe qui parmi toutes celles de même longueur qui passent par les points  $a$  &  $z$ , engendrera en tournant autour de l'axe  $AB$  (fig. 7) un solide dont la surface soit un maximum ou un minimum. La propriété commune est  $S dx \sqrt{(1+pp)}$ ; donc la valeur de

la différentielle  $dA$  est  $= -d. \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$ ; la formule

du maximum ou du minimum est comme  $S y dx \sqrt{(1+pp)}$ , la valeur de  $dB$  est  $= dx \sqrt{(1+pp)} -$

$d. \frac{y p}{\sqrt{(1+pp)}}$ ; & l'équation de la courbe sera

$$b d. \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = dx \sqrt{(1+pp)} - d. \frac{yp}{\sqrt{(1+pp)}} (B);$$

multipliant par  $p$  & intégrant, on aura  $\frac{b}{\sqrt{(1+pp)}}$

$$= \frac{y}{\sqrt{(1+pp)}} (*), \text{ ou } a = \frac{b+y}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{z}{\sqrt{(1+pp)}},$$

en faisant  $b+y=z$ ; donc  $p = \frac{\sqrt{(z^2-a^2)}}{a} =$

$$\frac{dy}{dx}; \text{ donc } dx = \frac{adz}{\sqrt{(zz-aa)}}; \text{ (parce que à cause}$$

de  $b+y=z$ , l'on a  $dy=dz$ ). Or l'équation  $dx =$

$$\frac{adz}{\sqrt{(zz-aa)}}, \text{ appartient à la ligne des cosinus hy-}$$

perboliques,  $z$  étant le cosinus hyperbolique; ainsi cette courbe, en tournant autour de l'axe AB, engendrera une surface qui sera un *maximum* lorsque la courbe tournera sa concavité vers AB, mais la surface sera un *minimum*, si la courbe tourne sa convexité à l'axe AB (\*\*).

52. PROBLÈME. *Entre toutes les courbes de même longueur  $c$ , & qui passent par les points A & B de la ligne horizontale AB, trouver celle dont le centre  $p$  de grandeur ou de gravité est le plus bas possible, c'est-à-dire, le plus éloigné de la ligne AB (fig. 10).* Selon ce qu'on a dit dans la section précédente, en faisant l'élément de la courbe  $= ds$ , l'ordonnée  $PM = y$ ,  $y ds$  sera le moment de l'élé-

ment  $m Mn$ , &  $\frac{\sum y ds}{c}$  exprimera la distance du centre

---

(\*) On trouvera facilement que cette intégrale est vraie, en faisant attention que  $p dx = dy$ , & en effectuant les différenciations indiquées dans l'équation (B).

(\*\*) Selon ce qu'on dira dans la quatrième section, la chaînette ou la catenaire, est la même que la ligne des cosinus hyperboliques.

de

de gravité de toute la courbe ADB par rapport à l'axe AB. Il est donc nécessaire que  $S. \frac{y ds}{c}$  soit un *maximum*; d'où il suit que  $S. y ds$  sera aussi un *maximum*. Mais  $ds = dx \sqrt{1 + pp}$ ; ainsi  $S. y dx \sqrt{1 + pp}$  doit être un *maximum*, ce qui a lieu dans la ligne des cosinus hyperboliques. Par conséquent la courbe cherchée est la ligne des cosinus hyperboliques.

53. REMARQUE. Si l'expression  $a'A + b'B + c'C$  (A, B, C, désignant des formules intégrales quelconques  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  des constantes) a une valeur de *maximum* dans une courbe P, & que dans la courbe R, A & B aient la même valeur que dans la courbe P; il est visible qu'à cause de la partie  $a'A + b'B$  qui doit avoir la même valeur dans les deux courbes, l'expression totale  $a'A + b'B + c'C$  aura une plus grande valeur dans la courbe P que dans la courbe R; puis-que cette expression est un *maximum* dans la première, & non dans la seconde, ainsi que nous le supposons. Ce que nous venons de dire du *maximum* doit également s'entendre pour le *minimum*: de sorte que si l'on cherche une courbe qui parmi toutes celles qui ont les propriétés A & B communes, doive avoir pour C un *maximum* ou un *minimum*, on multipliera A, B, C par des constantes arbitraires, & l'on prendra la différentielle de leur somme, qu'on égalera à 0, en prenant toujours cette différentielle par la méthode des variations. On fera bien de comparer ceci avec ce que nous avons dit sur les *maxima* & les *minima* dans le calcul différentiel.

54. PROBLEME. Entre toutes les courbes de même longueur & de même aire qui passent par les points a & x (fig. 7), trouver celle qui, en tournant autour de l'axe AB, engendrera un solide dont la valeur soit un *maximum* ou un *minimum*. Les propriétés communes sont  $S dx \sqrt{1 + pp}$ ,  $S. y dx$ , & l'expression du *maximum* ou du *minimum* est comme  $S y y dx$ . Leurs valeurs différentielles sont  $-d. \frac{p}{\sqrt{1 + pp}}$ ,  $dx$ ,  $dx. 2y$ ; d'où en

supposant une des constantes, dont on a parlé ci-devant

(53) = 1, & les deux autres égales l'une à  $c$  & l'autre à  $b$ , on tire  $c d. \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = b dx + 2y dx$ ,

ou  $\frac{cdp}{(1+pp)^{\frac{1}{2}}} = b dx + 2y dx$ . Multipliant par  $p$ ,

écrivant  $dy$  au lieu de  $p dx$  & intégrant, on a  $\frac{-c}{\sqrt{(1+pp)}} = a + by + yy$ ; d'où l'on tire  $c^2 =$

$$(a + by + yy)^2 \cdot (1 + pp), \quad p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{[cc - (a + by + yy)^2]}}{a + by + yy}, \quad \& \quad dx = \frac{dy(a + by + yy)}{\sqrt{[cc - (a + by + yy)^2]}}.$$

A cause que le radical doit avoir le signe  $\pm$ , l'un de ces signes indique le *maximum* & l'autre le *minimum*; & parce que aucune abscisse déterminée ne s'y trouve, c'est une marque que toute portion de la courbe a la même propriété. Il y a trois constantes  $a, b, c$  dans l'équation, & l'on doit en ajouter une quatrième dans l'intégration. Par la détermination de ces constantes, nous pouvons obtenir non-seulement que la courbe passe par deux points donnés  $a$  &  $z$ , mais encore remplir deux autres conditions, comme, par exemple, qu'elle passe par deux autres points  $Q$  &  $T$ .

### *Application du Calcul des variations à la Mécanique.*

Parmi tous les problèmes de Mécanique qu'on peut résoudre par le Calcul des variations, nous nous bornerons aux deux suivans; ce qui suffira pour donner une idée de la manière dont on peut appliquer ce Calcul aux sciences Physico-Mathématiques.

§5. PROBLÈME I. Déterminer la nature de la brachystochrone ou la courbe de la plus vite descente. Soit  $AM$  (fig. 11) la brachystochrone,  $AP = x$ ,  $PM = y$ ,  $Mm = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx \sqrt{(1 + pp)}$ . On fait par la Mécanique élémentaire qu'un corps mis



en mouvement par l'action de la gravité, acquiert en parcourant l'arc  $AM$ , une vitesse désignée par la racine de la hauteur verticale  $MP$  de cet arc; de plus cette vitesse ne pouvant que varier infiniment peu le long de l'arc infiniment petit  $Mm$ , on pourra la supposer uniforme le long de cet arc. Mais dans le mouvement uniforme le tems est comme le quotient de l'espace divisé par la vitesse; ainsi en désignant par  $t$  le tems

le long de  $AM$ , l'on aura  $dt = \frac{ds}{\sqrt{y}} = \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{y}}$

&  $t = S. \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{y}}$ , quantité qui doit être un

*minimum*. Or en s'y prenant comme ci-dessus (46), on verra que la courbe cherchée est une cycloïde; ainsi la brachystochrone est une cycloïde. •

Si l'on veut que la courbe  $AM$  soit terminée à un plan vertical  $BD$  perpendiculaire à la ligne des abscisses, l'abscisse correspondante  $AB$  n'aura aucune variation. En faisant la partie absolue  $= 0$  (voyez le n°. 15), ou

$\frac{p}{\sqrt{y}\sqrt{(1+pp)}} = 0$ , l'on aura  $p = \frac{dy}{dx} = 0$ ,

c'est-à-dire, que l'angle de la courbe avec l'axe des abscisses, ou plutôt avec une parallèle à cet axe, doit être nul, & la courbe doit être parallèle à l'axe des abscisses, & par conséquent perpendiculaire au plan vertical dont on vient de parler. Comme la variation entière doit  $= 0$ , l'on peut faire la partie absolue  $= 0$ ; & de-là il suit que  $A$  étant l'origine de la brachystochrone,  $AB$  sera la demi-circonférence du cercle générateur. A l'égard du point  $A$  que nous supposons donné, l'ordonnée correspondante ne doit subir aucune variation, & ce n'est qu'au point correspondant à l'abscisse  $AB$  qu'on a l'équation  $\frac{dy}{dx} = 0$ .

REMARQUE. On a supposé dans la résolution du problème précédent que la courbe de la plus vite descendante étoit à simple courbure; mais on n'en doutera

nullement quand on aura lû la solution du problème suivant.

56. PROBLÈME II. Déterminer la courbe de la plus vite descente, sans supposer cette courbe à simple courbure. Comme on est censé ne pas connoître cette courbe, nous la supposons à double courbure,  $x$  étant l'abscisse verticale,  $y$  &  $z$  les co-ordonnées horizontales. Donc  $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = ds$ , sera l'élément de l'arc de cette courbe,  $\frac{ds}{\sqrt{x}}$  l'élément du tems, &  $t$  sera =

S.  $\frac{ds}{\sqrt{x}}$ . Mais en faisant  $p = \frac{dy}{dx}$ , ou  $dy = p dx$  &

&  $dz = p' dx$ , on a  $t = S. dx \frac{\sqrt{(1 + pp + p'p')}}{\sqrt{x}}$ ;

donc en faisant  $V = \frac{\sqrt{(1 + pp + p'p')}}{\sqrt{x}}$ , on aura  $dV$ .

$$= \frac{-1. dx}{2x\sqrt{x}} \sqrt{(1 + pp + p'p')} + \frac{p dp}{\sqrt{x} \sqrt{(1 + pp + p'p')}} + \frac{p' dp'}{\sqrt{x} \sqrt{(1 + pp + p'p')}}; \text{ or (32) } dV \text{ est } =$$

$$M dx + N dy + P dp + \&c. \\ + N' dz + P' dp' + \&c.$$

Donc ici  $N = 0$ ;  $P = \frac{p}{\sqrt{x} \sqrt{(1 + pp + p'p')}} =$

$$\frac{dy}{\sqrt{x} dx \sqrt{(1 + pp + p'p')}} = \frac{dy}{\sqrt{x} ds}; Q = 0; \&c.$$

On a aussi  $N' = 0$ ;  $P' = \frac{dp'}{\sqrt{x} ds}$ ;  $Q' = 0$ ; &c. mais

(par l'endroit cité) on doit avoir les deux équations

$$N - \frac{dp}{dx} + \&c. = 0; N' - \frac{dp'}{dx} + \&c. = 0; \text{ donc à cause}$$

de  $N = 0$ ,  $N' = 0$ ,  $Q = 0$ ,  $Q' = 0$ , &c. on aura (en

multipliant par  $dx$ ) —  $dP=0$ , &  $\frac{dP'}{dx}=0$ , ou —  
 $d. \frac{dy}{\sqrt{x.ds}}=0$ , & —  $d. \frac{dz}{\sqrt{x.ds}}=0$ . En intégrant  
ces équations, après avoir changé leurs signes, il vient  
 $\frac{dy}{\sqrt{x.ds}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ ;  $\frac{dz}{\sqrt{x.ds}} = \frac{1}{\sqrt{b}}$ ;  $a$  &  $b$  sont des  
constantes arbitraires.

Si l'on divise la première intégrale par la seconde,  
le premier membre de la première par le premier de  
la seconde, le second par le second, l'on aura  $\frac{dy}{dz}$   
 $= \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ , équation à ligne droite (\*) qui fait connoître  
que la courbe de projection sur le plan de la base  
(c'est ici le plan des  $z$  & des  $y$ ), est une ligne droite,  
& qu'ainsi la courbe cherchée  $AND$  (fig. 12) est  
à simple courbure. Pour déterminer sa nature, rappor-  
tons-là à deux co-ordonnées, dont l'une soit  $x$  &  
l'autre  $u$ ; en supposant  $AP=z$ ,  $PM$  (perpendiculaire  
à  $AP$ ) =  $y$  &  $AM=u$ ; nous aurons (A)  $u =$   
 $\sqrt{(y^2 + z^2)}$ . Mais  $\frac{dy}{dz} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ , ou  $dy = \frac{dz \sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ ;  
donc  $y = \frac{z \sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ . En substituant cette valeur de  $y$   
dans l'équation (A), on trouvera aisément  $z =$

(\*) Soit (fig. 12) l'abscisse  $AP=z$ , l'ordonnée  $PM$   
 $=y$ , ayant mené  $pm$  infiniment proche de  $PM$ , & la  
ligne  $Mn$  parallèle à  $AP$ , si l'on fait  $Aa = \sqrt{a}$ ,  $ab$   
 $= \sqrt{b}$ , & que l'on ait toujours  $Aa : ba :: dz : dy ::$   
 $Mn : mn = Pp$ , il est visible que l'on aura  $z : y ::$   
 $\sqrt{a} : \sqrt{b}$ , &  $y. \sqrt{a} = z. \sqrt{b}$ , équation à une ligne  
droite. Ainsi les  $MN$  (x.) qui doivent être perpendicu-  
laires au plan des  $y$  & des  $z$  (comme nous le suppo-  
sons ici), seront dans un même plan.

$\frac{u \sqrt{a}}{\sqrt{(a+b)}}; y = \frac{u \sqrt{b}}{\sqrt{(a+b)}}; dy = \frac{du \sqrt{b}}{\sqrt{(a+b)}}.$  L'on a encore l'élément de l'arc  $= ds = \sqrt{(du^2 + dx^2)};$   
 & enfin  $\frac{dy}{ds \cdot \sqrt{x}} = \frac{du \sqrt{b}}{\sqrt{(a+b)} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{(dx^2 + du^2)}}$

$= \frac{1}{\sqrt{a}};$  donc (en quarrant & ôtant les fractions)  
 $ab du^2 = (ax + bx) dx^2 + (ax + bx) du^2; (ax + bx) dx^2 = du^2 (ab - ax - bx); x dx^2 = du^2 \left( \frac{ab}{a+b} - x \right);$  d'où (en faisant  $g = \frac{ab}{a+b}$ )

il est aisé de tirer  $du = \frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{(g-x)}} = \frac{dx \cdot x}{\sqrt{(gx - x^2)}},$  équation à une cycloïde, dont le diamètre du cercle générateur est  $= g.$

Si le premier point A de la brachystochrone (fig. 11) est supposé donné, & que le mobile doive arriver dans le moindre tems possible à un plan horizontal Cn, on fera les parties absolues égales à 0, ce qui donnera  $P = 0$  &  $P' = 0$ , c'est-à-dire,  $\frac{dy}{\sqrt{x} \cdot ds} = 0 =$

$\frac{1}{\sqrt{a}};$  &  $\frac{d\tau}{\sqrt{x} \cdot ds} = \frac{1}{\sqrt{b}} = 0;$  donc  $a = \infty$  &  $b = \infty;$

donc  $g = \frac{ab}{a+b} = \infty;$  c'est-à-dire, que le diamètre du cercle générateur doit être infini. Donc l'arc fini AM de la brachystochrone devient une ligne verticale AC; ainsi le corps A, arrivera au plan Cn dans le moindre tems possible, en suivant une ligne verticale AC, ce qui est évident.

Fig. 3.

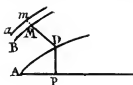


Fig. 4.

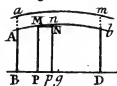


Fig. 7.

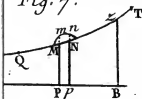


Fig. 8.

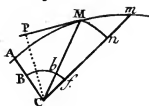


Fig. 10.

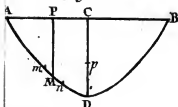


Fig. 12.

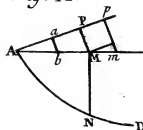
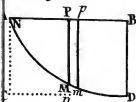


Fig. n.





# SECTION QUATRIÈME.

## PROBLÈMES

### PHYSICO-MATHÉMATIQUES.

Nous nous proposons ici principalement de faire des applications du Calcul différentiel & du Calcul intégral aux problèmes Physico-Mathématiques; ce qui ne nous empêchera pas d'en résoudre plusieurs sans employer ces Calculs. Mais quoique nous supposions nos Lecteurs instruits des principes généraux de la Mécanique, nous croyons devoir rapporter le fameux principe de M. d'Alembert.

1. Principe général du mouvement. *De quelque manière que plusieurs corps viennent à changer leurs mouvemens actuels, si l'on conçoit que le mouvement que chaque corps auroit dans l'instant suivant, s'il devenoit libre, soit décomposé en deux autres, dont l'un soit celui qu'il aura réellement après le changement; le second doit être tel, que si chacun des corps n'eût eu d'autre mouvement que ce second, tous les corps fussent demeurés en équilibre. Ce principe est évident; car si en vertu des seconds mouvemens les corps ne restoient pas en repos, les premiers mouvemens ne seroient pas ceux que les corps auroient après le changement, puisqu'ils seroient nécessairement altérés par les seconds.*

Toute la doctrine du mouvement est appuyée sur les équations dont nous allons parler. Si  $x$  représente l'espace décrit d'un mouvement variable pendant le tems  $t$ ,  $dx$  représentera l'espace infiniment petit décrit pendant le tems infini-

ment petit  $dt$ , pendant lequel la vitesse  $v$  du mobile est censée uniforme. Mais alors  $dx = v dt$ ; donc  $v = \frac{dx}{dt}$ , première équation fondamentale. Dans un mouvement uniformément accéléré la vitesse acquise à la fin du tems  $t$  doit évidemment être égale au produit de la force accélératrice constante  $p$  par le tems  $t$ ; donc  $v = pt$ , &  $p = \frac{v}{t}$ . Mais si cette force est variable, on peut néanmoins la considérer comme constante pendant le tems  $dt$ , pendant lequel elle produit la vitesse  $dv$ ; donc  $p = \frac{dv}{dt}$ , ou  $dv = p dt$ , seconde équation fondamentale des mouvements variés. De l'équation  $dx = v dt$ , on tire  $dt = \frac{dx}{v}$ . Substituant cette valeur dans l'équation  $dv = p dt$ , on a  $p dx = v dv$ . Il est évident que lorsque le mouvement est retardé, on doit donner le signe  $-$  à  $dv$ . L'équation  $v = \frac{dx}{dt}$ , donne  $dv = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$ . Substituant cette valeur dans l'équation  $p dt = \pm dv$  (on met le signe  $-$  pour le mouvement retardé), on a  $p dt = \pm d\left(\frac{dx}{dt}\right)$ . Si on suppose  $dt$  constant, il vient  $p dt = \pm \frac{d^2x}{dt^2}$ , ou  $p dt^2 = \pm d^2x$ .

2. LORSQUE deux corps qu'on suppose sans aucun ressort viennent à se rencontrer en allant du même côté, la quantité de mouvement qui se trouve dans les deux corps, se distribue de manière qu'il en résulte la même vitesse



pour tous les deux. Car celui qui va plus vite agit sur l'autre, seulement jusqu'à ce que celui-ci, ayant acquis autant de vitesse qu'il en reste au premier, ne fait plus obstacle à son mouvement.

Mais si des corps élastiques se rencontrent, pendant qu'ils se choquent le choc est employé à plier leurs parties, à tendre leur ressort, & ces corps ne demeurent appliqués l'un contre l'autre que jusqu'à ce que leur ressort les sépare en se débandant, & les fasse éloigner avec autant de vitesse qu'ils s'approchoient : car la vitesse respective étant la seule cause qui ait bandé leur ressort, le débandement de ce ressort doit reproduire la même vitesse respective qui avoit lieu auparavant. M. de Maupertuis entend par *quantité d'action*, le produit de la masse d'un corps par sa vitesse & l'espace parcouru, & selon ce Savant, on doit admettre dans la nature le principe suivant.

**PRINCIPE.** *Lorsqu'il arrive quelque changement dans la nature, la quantité d'action qui le produit est la plus petite possible.*

3. PROBLEME. Soient A & B deux corps sans ressort qui vont du même côté, la vitesse du corps A étant  $V$ , celle du corps B étant  $= u < V$ , de manière que le corps A aille choquer le corps B, on demande leur vitesse commune  $x$  après le choc. La vitesse perdue par le corps A sera  $V - x$  la vitesse gagnée par le corps B étant  $x - u$ . Les espaces parcourus en tems égaux par ces vitesses, étant entr'eux comme ces vitesses, la quantité d'action employée par le corps A sera comme A.  $(V - x)^2$ , & la quantité d'action gagnée par le corps B sera comme B.  $(x - u)^2$ ; la quantité totale d'action sera comme A.  $(V^2 - 2 V x$

$+xx) + B.(xx - 2ux + uu)$ . Si l'on suppose que cette quantité est un *minimum*, on différenciera cette somme, & l'on supposera la différence  $= 0$ , donc on aura  $A.(-2Vdx + 2xdx) + B.(2xdx - 2udx) = 0$ , d'où l'on tire  $2Ax + 2Bx = 2AV + 2Bu$ , ou  $x = \frac{AV + Bu}{A + B}$ , c'est-à-dire, que la vitesse commune

après le choc, sera égale à la somme des mouvemens divisée par la somme des masses.

COROLLAIRE. Si le corps B alloit dans un sens opposé au corps A, il suffiroit de considérer  $u$  comme une quantité négative, & dans ce cas l'on auroit  $x = \frac{AV - Bu}{A + B}$ , c'est-à-dire,

que la vitesse commune après le choc, seroit égale à la différence des mouvemens divisée par la somme des masses. Si, dans ce dernier cas,  $AV = Bu$ , on aura  $x = 0$ , c'est-à-dire, que si deux corps supposés sans ressort vont se choquer directement avec des mouvemens opposés & égaux, ils resteront en repos après le choc.

Si  $u = 0$ , on aura  $x = \frac{AV}{A + B}$ , c'est-à-dire, si

le corps B est supposé en repos avant le choc, la vitesse commune après le choc, sera égale au mouvement du corps choquant divisé par la somme des masses.

4. PROBLÈME. Si le corps A élastique va choquer le corps B aussi élastique & qui se meut dans le même sens, de manière que la vitesse de A soit  $= V$  & la vitesse de B  $= u$ , on demande la vitesse de chaque corps après le choc? Soit  $x$  la vitesse

de A &  $y$  la vitesse de B après le choc, la vitesse perdue par A sera  $V - x$ , & la vitesse gagnée par B sera  $y - u$ . La quantité d'action employée dans le changement qui arrive dans la nature à l'occasion du choc, sera comme A.  $(V^2 - 2Vx + xx) + B. (y^2 - 2yu + uu)$ . En supposant que cette quantité est un *minimum*, on aura A.  $(-2Vdx + 2xdx) + B. (2ydy - 2udy) = 0$  (C). Mais dans les corps à ressort parfait tels que nous les supposons ici, la vitesse respective après le choc étant la même qu'avant le choc, on a  $V - u = y - x$ , ou  $y = V - u + x$ , &  $dy = dx$ .

Si on substitue ces valeurs de  $y$  & de  $dy$  dans l'équation C, on aura en transposant & divisant,  $x = \frac{AV - BV + 2Bu}{A + B}$ . Mais par l'équa-

tion  $V - u = y - x$ , on a  $x = y + u - V$ , &  $dx = dy$ ; en substituant ces valeurs de  $x$  & de  $dx$  dans l'équation C, on trouve facilement  $y = \frac{2AV - Au + Bu}{A + B}$ . Si on supposoit  $u$

$= 0$ , l'on auroit  $x = \frac{AV - BV}{A + B}$  qui deviendrait

$= 0$ , en supposant  $A = B$ , c'est-à-dire, qu'alors le corps A resteroit en repos après le choc; mais

on auroit  $y = \frac{2AV}{A + B}$ , qui deviendrait  $y =$

$\frac{2AV}{2A} = V$ , en faisant  $A = B$ ; donc dans ce cas

le corps B se mouvrait avec la vitesse  $V$  du corps A avant le choc. Si l'on avoit  $A < B$ , le corps

A seroit repoussé & rebrousseroit chemin. Si B alloit au-devant du corps A, on feroit  $u$  négatif, & l'on auroit par-là la valeur de  $x$  & de  $y$  pour ce cas.

REMARQUE. Si on multiplie A par  $x^2$  & B par  $y^2$ , on aura en substituant les valeurs de  $x$  & de  $y$  trouvées ci-dessus, on aura, dis-je,  $A. x^2 + B. y^2 = A. V^2 + B. u^2$ ; c'est ce qu'on appelle, la conservation des forces vives (\*).

5. PROBLEME. Si un rayon de lumière doit passer de  $a$  en  $b$  (fig. 1) en traversant les milieux  $m$  &  $n$  séparés l'un de l'autre par la surface  $cg$ , on demande dans quel rapport seront les sinus d'incidence & de réfraction, en supposant que cet effet doive être produit par la moindre quantité d'action? Soit désignée par  $m$  la vitesse de la lumière dans le milieu  $m$ , & par  $n$  la vitesse de la même lumière dans le milieu  $n$ , soit fait de plus  $ap = x$ ,  $pb = y$ ,  $pc = z$ ,  $pg = s$ ,  $ac = f$ ,  $bg = h$ ;  $mx + ny$  sera un minimum, aussi-bien que  $m\sqrt{zz + ff} + n\sqrt{ss + hh}$ . Donc puisque  $f$  &  $h$  sont constans à cause que la position des points  $a$  &  $b$  est déterminée par rapport à la surface  $cg$ , on aura  $\frac{mzdz}{\sqrt{zz + ff}} + \frac{nds}{\sqrt{ss + hh}}$

(\*) Il y a des Philosophes qui prétendent que la force vive, c'est-à-dire, la force d'un corps en mouvement, doit s'estimer par le produit de la masse multipliée par le carré de la vitesse, tandis que la force d'un corps qui presse un autre corps, ou un plan immobile sans lui communiquer de mouvement, & qu'on nomme force morte, doit s'estimer par le produit de la masse & de la simple vitesse; mais les François & les Anglois soutiennent que les forces vives doivent se mesurer par le produit de la masse & de la vitesse.

$= 0$ . Mais à cause de  $cg$  constant, on a  $d\tau = -ds$ ; donc en remettant les valeurs des radicaux & divisant,  $\frac{m\tau}{x} - \frac{ns}{y} = 0$ , ou  $\frac{m\tau}{x} = \frac{ns}{y}$ ; d'où l'on tire  $\frac{\tau}{x} : \frac{s}{y} :: n : m$ . Mais en supposant le rayon  $= 1$ , on a  $x : \tau :: 1 : \sin. pac = \frac{\tau}{x}$ , &  $y : s :: 1 : \sin. pbg = \frac{s}{y}$ . De plus en tirant la ligne  $MpN$  perpendiculaire sur  $cg$ , l'angle  $pac$  est  $= apM$  angle d'incidence, & l'angle  $pbg$  est  $= bPN$  angle de réfraction; donc le sinus de l'angle d'incidence est au sinus de l'angle de réfraction en raison inverse de la vitesse qu'a la lumière dans chaque milieu.

6. COROLLAIRE. Si on suppose que la vitesse de la lumière dans différents milieux suive la raison de leur densité, le sinus d'incidence sera à celui de réfraction en raison inverse des densités des milieux, & par conséquent en raison constante.

7. PROBLEME. Etant donnée la position d'un plan horizontal  $BD$ , & du plan vertical  $BA$  (fig. 2) mener par un point donné  $D$ , le plan  $DM$  par lequel un corps  $M$  puisse parvenir du plan vertical  $BA$ , au point donné  $D$  dans le moindre tems possible. Il est évident que le tems de la descente dépend de l'espace à parcourir & de la vitesse du mobile. Si l'espace  $DN$  est plus petit, la vitesse sera plus petite; si le plan  $DA$  est plus long, la vitesse sera plus grande, mais aussi l'espace sera plus grand. Il est donc évident qu'il y a un plan moyen  $DM$ , le long duquel le tems doit être le plus petit possible.

Soit  $BD = a$ ,  $BM = x$ . On aura  $DM = \sqrt{aa + xx}$ ; la vitesse acquise par le corps M en venant de M en D sera comme la racine de la hauteur du plan MD, ainsi qu'on le démontre en mécanique, c'est à-dire, sera exprimée par  $\sqrt{x}$ , & cette vitesse suffiroit pour faire décrire d'un mouvement uniforme au corps M un espace double de MD dans le tems employé à parcourir MD, & de plus les espaces parcourus par un mouvement uniforme sont comme le produit de la vitesse & du tems; c'est pourquoi le quotient de l'espace, divisé par la vitesse, représente le tems: donc le tems employé à parcourir DM sera  $= \frac{2\sqrt{aa+xx}}{\sqrt{x}}$ . Ce tems devant être un *minimum*, son quarré  $\frac{4aa+4xx}{x}$  le sera aussi; donc en différenciant on aura  $\frac{8xxdx - 4aadx - 4xxdx}{x^2} = 0$ , ou  $4xx = 4aa$ , ou  $x = a$ , ou  $BM = BD$ ; donc le plan MD doit faire un angle de  $45^\circ$  avec le plan horizontal BD.

Mais si on demandoit de mener le plan MD par lequel un corps puisse parvenir du point donné M au plan horizontal BD dans le moindre tems possible. En faisant  $BM = a$  &  $BD = x$ , le tems cherché sera  $\frac{2\sqrt{aa+xx}}{\sqrt{a}}$ , son quarré sera  $= \frac{4a^2+4xx}{a}$ , qui doit être un *minimum*; donc on aura  $8axdx = 0$ , &  $x = BD = 0$ ; donc

le point D tombera sur le point B, & le plan de la plus prompte descente sera le plan vertical MB, ce qui d'ailleurs est évident.

8. PROBLÈME. Si un globe parfaitement élastique (on doit dire la même chose de la lumière) doit arriver de *m* en *n* par le chemin le plus court, après avoir été réfléchi quelque part par le plan horizontal *pL*, déterminer l'angle de réflexion (fig. 3). Supposons que le point de réflexion est situé en D, & qu'on a tiré les lignes que l'on voit dans la figure, faisons de plus  $nh = b$ ,  $gp = mL = a$ ,  $DL = x$ ,  $hL = c$ . On aura  $Dh = c - x$ ; on aura encore  $mD + nD = \sqrt{(aa + xx)} + \sqrt{(bb + cc - 2cx + xx)}$ , qui doit être un *minimum*; donc en différenciant, divisant par  $dx$ , égalant le résultat à zéro, ôtant les fractions & transposant, on trouvera, (A)

$x \sqrt{(bb + cc - 2cx + xx)} = c - x. \sqrt{(aa + xx)}$ , ou  $DL \times nD = Dh \times mD$ ; donc  $DL : mD :: Dh : nD$ . Mais  $Dh : nD :: Dp : gD$ ; donc les triangles  $mdL$ ,  $Dpg$  sont semblables, ils sont de plus égaux à cause de  $mL = gp$ ; ainsi  $gp$  &  $mL$  sont sinus d'angles égaux, en prenant  $Dm$  &  $Dg$  pour rayons; donc  $mDf$  &  $gDf$  compléments d'angles égaux, sont égaux; donc pour qu'un corps élastique (on doit dire la même chose de la lumière) parvienne de *m* en *n* par le chemin le plus court, après avoir été réfléchi par le plan horizontal *hL*, l'angle de réflexion  $gDf$  doit être égal à l'angle d'incidence  $mDf$ .

Pour déterminer le point D, on quarrera l'équation (A), & effectuant les multiplications, réduisant & transposant, on aura  $a^2 x^2 - b^2 x^2 -$

$$2a^2cx = -aacx, \text{ \& par conséquent } x^2 - \frac{2aacx}{aa-bb} = \frac{-aacx}{aa-bb}.$$

Cette équation, étant résolue par la méthode du second degré, donne

$$x = \frac{(a \pm b)ac}{aa-bb} = \frac{ac}{a \mp b}.$$

Prolongez  $mL$  jusqu'à ce que  $HL = mL + nh$ , & ayant tiré  $Hh$ , menez-lui par le point  $m$  la parallèle  $mD$ , le point  $D$  sera le point de réflexion; car on aura  $HL : hL :: mL : LD$ , ou  $a + b : c :: a : x = DL$ . Si on suppose  $a = b$ , on aura  $x = \frac{c}{2}$ .

9. PROBLÈME. *Etant donnée la position d'une pièce d'argent D sur le plan horizontal BD, trouver sur la verticale Bm la situation d'un flambeau, de manière que la pièce D soit le plus éclairée qu'il est possible (fig. 4).* Du point D comme centre avec le rayon DB décrivez l'arc BM; & supposant que le point A est le point cherché, on tirera la ligne AD, & par le point M, où cette ligne rencontre l'arc BM, on menera MN perpendiculaire sur BD; cette ligne sera le sinus de l'angle BDA. Soit maintenant  $BD = a$ ,  $BA = x$ , on aura  $AD = \sqrt{aa + xx}$ . Mais à cause des triangles semblables BAD & NMD,  $\sqrt{aa + xx} : x :: a : MN = \frac{ax}{\sqrt{aa + xx}}$ . Supposons

maintenant que la vivacité de la lumière du flambeau, lorsque cette lumière éclaire la pièce D perpendiculairement soit  $= 1$ ; cette force fera à la force de la lumière qui éclaire la pièce dans une situation oblique & à la même distance, comme le sinus total est au sinus de l'angle d'obliquité



d'obliquité ADB(\*) ou comme  $DM = BD = a$ :

$$MN = \frac{ax}{\sqrt{(aa + xx)}} :: 1 : \frac{x}{\sqrt{(aa + xx)}}.$$

De plus sous le même angle d'obliquité ADB, la force de la lumière qui viendrait de M est à la force de la lumière qui partiroit de A en raison inverse des quarrés des distances, ou comme

$$\frac{1}{MD^2} : \frac{1}{AD^2} :: \frac{1}{aa} : \frac{1}{a^2 + x^2} :: \frac{x}{\sqrt{(aa + xx)}}$$

$$: \frac{ax}{(a^2 + x^2) \sqrt{(aa + xx)}}, \text{ en multipliant l'an-}$$

técédent & le conséquent par  $\frac{ax}{\sqrt{(aa + xx)}}$ . Main-

tenant  $\frac{ax}{(a^2 + x^2) \sqrt{(aa + xx)}}$  doit être un *mini-*  
*mum*; donc en faisant  $\sqrt{(aa + xx)} = y$ ,

$\frac{axy}{y^3 - aa}$  fera un *minimum*. Si on égale à 0

la différentielle de cette quantité, on aura (en ôtant les fractions, & faisant les opérations ordinaires) l'équation  $a^2 = 2y^2 = 2aa + 2xx$ , d'où l'on tire  $aa = 2xx$ . C'est pourquoi, pour avoir la position du flambeau, il faut faire un angle ADB de  $45^\circ$ , mener la ligne AD, & par le point M où cette ligne rencontre l'arc BM, tirer Mm perpendiculaire sur AB; le point m sera le point cherché: car on aura  $mB = MN$

(\*) Car ayant mené DF perpendiculaire sur AP & infiniment petite, les triangles rectangles DPF, ADB, dont les angles en P & D sont censés égaux, donnent  $DP : DF :: \sqrt{(aa + xx)} : x$ . Mais DF représente la quantité de lumière qui illumine DP, & cette quantité de lumière est ce que nous entendons ici par la force de la lumière.

&  $\overline{MD}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{ND}^2 = 2.\overline{MN}^2 = 2xx$  ;  
donc  $Bm = x$ .

10. PROBLÈME. *Etant donné l'angle d'élévation FAM d'un mortier situé en A, avec la force de la poudre, déterminer la plus grande hauteur DH à laquelle une bombe puisse parvenir (fig. 5). L'inclinaison du mortier par rapport à l'horison AM étant connue avec la force de la poudre, on connoît la portée horizontale AM (\*) ; donc dans le triangle FAM rectangle en M on connoît un côté MA, l'angle A & l'angle M, & par conséquent aussi l'angle F ; ainsi on connoîtra aisément la ligne de chute MF. Soit maintenant  $AM = a$ ,  $MF = b$ ,  $AD = x$ , les triangles semblables  $ADn$ ,  $AMF$  donnent  $a : b :: x : Dn = \frac{bx}{a}$  ; donc  $An = xx + \frac{bbxx}{aa} = \frac{aaxx}{aa} + \frac{bbxx}{aa}$ ,  
&  $An = \frac{x\sqrt{(aa+bb)}}{a}$ .*

Ayant mené les lignes PH,  $mM$  parallèles à AF, tangente de la parabole A-M, ces lignes seront des ordonnées au diamètre Am, & par la nature de cette courbe on aura  $mM = AF^2 = (aa+bb) : PH^2 = An = \frac{xx(aa+bb)}{aa} :: Am = FM = b : AP = nH$  ; donc en multipliant les termes de la première raison par  $a^2$  & les divisant par  $aa+bb$  ; on aura  $aa : xx :: b : nH = \frac{bx^2}{aa}$  ; donc  $HD = Dn - Hn = \frac{bx}{a}$

(\*) Voyez ce que nous avons dit sur le jet des bombes dans la seconde édition de nos Institutions Mathématiques.

—  $\frac{bx^2}{aa} = \frac{abx - bx^2}{aa}$ , qui doit être un *maximum* ; donc  $\frac{abdx - 2bx dx}{aa} = 0$  ; donc (en multipliant par  $aa$ , divisant par  $bdx$  & transposant)  $a = 2x$ , &  $x = \frac{a}{2}$ . C'est pourquoi si on prend  $AD = \frac{AM}{2}$ , & qu'on mène la perpendiculaire  $DH$  jusqu'à la rencontre de la parabole ; cette ligne déterminera le point  $H$  de plus grande élévation. On ne fait pas attention ici à la résistance de l'air.

COROLLAIRE. Puisqu'on vient de trouver  $HD = \frac{abx - bx^2}{aa}$ , en substituant  $\frac{a}{2}$  au lieu de  $x$ , on aura  $HD = \frac{b}{4}$ .

II. PROBLÈME. Soit un vase  $CBD$  (fig. 6), tel qu'ayant pratiqué un orifice  $B$  d'un très-petit diamètre, la liqueur parcourt dans ce vase des espaces égaux en tems égaux, on demande la nature de la courbe  $DMB$  qui par sa révolution autour de l'axe  $AB$ , a produit le vase  $DBC$ . Soit  $BA = a$ ,  $AP = x$ ,  $Pp = dx$ , si l'on conçoit la liqueur partagée en une infinité de tranches telles que  $MmNn$ , dont l'épaisseur soit la même, chaque tranche parcourra, en descendant l'espace  $dx$  dans le même-tems infiniment petit  $dt$  ; ainsi en appelant  $u$  la vitesse de la descente pendant le tems  $dt$ , on aura l'espace  $dx = u dt$  ou  $u = \frac{dx}{dt} = c$ . De plus les vitesses d'une liqueur qui

s'écoule par l'orifice B sont proportionnelles aux racines des hauteurs de cette liqueur au-dessus de l'orifice B; donc en supposant que la liqueur soit descendue de A en P, la vitesse d'écoulement sera comme  $\sqrt{a-x}$ ; donc on aura

$$\frac{dx}{dt} = c : \sqrt{a-x} :: bb : y^2, \text{ en faisant } AD$$

$=b$  &  $PM=y$ . En effet les tranches de même épaisseur situées en A & P sont entre elles comme les carrés des ordonnées correspondantes, & les vitesses sont en raison inverse de ces carrés. En faisant  $\sqrt{a-x} = \sqrt{z}$  & quarrant, la proportion trouvée devient  $c^2 : z :: b^4 : y^4$ ;

$$\text{donc } y^4 = \frac{b^4 z}{c^2} = \frac{1 \cdot b^4}{c^2} z = p^3 z, \text{ en faisant}$$

$$\frac{1 \cdot b^4}{c^2} = p^3. \text{ Mais l'équation } y^4 = p^3 z \text{ désigne}$$

une courbe parabolique dont l'ordonnée PM est  $=y$ , l'abscisse BP  $=z$  & le paramètre  $=p$ ; ainsi la courbe cherchée est la première parabole du troisième genre. On peut remarquer que les vitesses des écoulemens sont d'autant plus grandes que les tranches correspondantes sont plus grandes, & que les vitesses avec lesquelles la liqueur s'écoule peuvent varier, quoique  $\frac{dx}{dt}$  qui représente la vitesse uniforme avec laquelle la liqueur s'abaisse aussi-bien que la vitesse d'écoulement qui répond à la première tranche soit constante.

12. COROLLAIRE. Supposant que la liqueur parvienne de A en f dans l'espace de vingt-quatre heures, ayant tiré CF, parallèle & égale à Af, divisez-la en douze parties

égales ; ces divisions indiqueront les heures, & l'on aura ainsi une espece d'horloge.

Il faut prendre  $Af$  un peu plus grande que  $AB$ , afin d'éviter l'irrégularité qui a ordinairement lieu vers la fin de l'écoulement, & qui vient principalement d'une espece d'entonnoir qui se forme à la surface de la liqueur ; ainsi il faut prendre  $Bf$ , de maniere que le point  $f$  soit au-dessus du point de l'axe  $AB$  auquel se forme cet entonnoir, ce que l'expérience indiquera facilement.

13. PROBLEME. *Etant donnée la gravité spécifique d'un liquide de l'eau, par exemple, trouver la gravité spécifique d'un solide plus léger, tel qu'étant plongé dans le liquide & dans une situation non naturelle, la force qui le retient dans cette situation soit la plus grande possible.* Soit un cylindre homogène  $AB$  (fig. 7) plongé obliquement par sa partie  $MB$  dans l'eau  $DCgf$  ; la force qui retient le cylindre dans cette situation doit vaincre le poids de la partie supérieure  $MA$  & la force avec laquelle l'eau fait effort pour repousser la partie plongée  $BM$ .

Soit la gravité spécifique de l'eau  $= a$ , la gravité spécifique du solide  $= x$ , son volume  $= b$  ; son poids sera  $bx$ . Or le poids du solide est égal à celui du volume d'eau qui répond à la partie plongée, & lorsque les poids sont égaux, les gravités spécifiques sont en raison inverse des volumes ; donc on aura  $a : x :: b : \frac{bx}{a}$ , volume d'eau égal au volume de la partie plongée. Donc le volume de la partie  $MA$  sera  $= b - \frac{bx}{a} = \frac{ab - bx}{a}$ , & son poids sera  $= \frac{a bx - bxx}{a}$ .

Mais la force de l'eau qui fait effort pour élever la partie plongée BM, est égale à la différence entre le poids du volume d'eau déplacé & celui de la partie BM, c'est-à-dire, est  $= \frac{abx}{a} - \frac{bx^2}{a} = \frac{abx - bxx}{a}$ ; donc la somme de l'effort de l'eau pour déplacer la partie plongée & du poids de la partie MA hors de l'eau, ou la force qui retient le solide dans sa situation est  $= \frac{2abx - 2bxx}{a}$ , qui doit être un *maximum*; donc  $\frac{2abd x - 4bxx}{a} = 0$ . Donc en ôtant la fraction, divisant par  $2bdx$  & transposant,  $a = 2x$ ; ainsi  $x = \frac{a}{2}$ , c'est-à-dire, que la gravité spécifique du solide doit être sous-double de celle du liquide.

14. PROBLÈME. Soit AB la section d'un canal *fghn* dans lequel on veut bâtir une écluse ADB, on demande l'angle ADB que doivent faire les portes AD, BD de l'écluse pour que leur résistance à la pression de l'eau soit la plus grande possible (fig. 8). Sur AB prise pour diamètre je décris la demi-circonférence AMB, & je tire AM perpendiculaire au prolongement de la porte BD. Cela posé, la pression contre la porte DB est comme la longueur DB; la hauteur de l'eau étant la même, de plus la force du bois de la même épaisseur est d'autant moindre que la longueur de la pièce est grande; donc la force de la porte BD est en raison inverse du quarré de

la longueur BD. Mais ayant tiré le rayon CD *m* perpendiculaire à AB les triangles rectangles semblables BCD, BMA donnent BD : BC ::

$$A.B : M.B ; \text{ donc } \overline{BD}^2 = \frac{\overline{BC}^2 \cdot \overline{AB}^2}{\overline{MB}^2} ; \text{ \& parce que}$$

BC & AB sont constantes , la force de la porte BD sera en raison directe de  $\overline{BM}^2$ . Or en prenant AB pour rayon , BM sera le sinus de l'angle MAC ; donc la force de la porte BD croît comme le quarré du sinus de cet angle. Il faut de plus avoir égard à la grandeur de l'angle ADB qui rend la résistance d'autant plus forte que son

sinus augment. Donc AM . BM doit être un plus grand. Si  $AB = a$  ,  $AM = x$  , on aura ( par la propriété du triangle rectangle BMA )  $\overline{BM}^2 = aa - xx$  , &  $AM . \overline{BM}^2 = aax - x^3$  ; donc  $aad x - 3x^2 dx = 0$  ; donc  $x = \sqrt[3]{\frac{aa}{3}}$ . Mais

$x$  ( sinus de l'angle MDA , en prenant DA pour rayon ) est le sinus de l'angle MBA ,  $a$  étant le rayon ; donc si on fait  $a = 1$  , on aura  $x = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ . Ainsi l'angle MBA = DAB doit être de  $36^\circ$  ,  $16'$  , dont le double  $72^\circ$  ,  $32'$  , étant retranché de  $180^\circ$  , donne  $109^\circ$  ,  $28'$  pour la valeur de l'angle ADB.

15. PROBLÈME. Etant donnée la vitesse d'un fluide parfait Mm (fig. 9) qui fait mouvoir une roue , on demande le plus grand effet que cette machine puisse produire dans un tems donné. Soit  $p$  le poids à élever par la machine ,  $f$  ,  $g$  , &c. les palettes de la machine ,  $u$  la vitesse du fluide ,  $a$

le bras  $CD$  du poids  $p$ , qui est attachée à une corde qui passe sur la poulie  $n$ , en même-tems qu'elle est roulée sur un cylindre dont  $CD$  est le rayon. Soit  $g$  le point où se réunissent les forces impulsives qui agissent sur la palette  $g$ , & faisons le bras de levier  $Cg$  (sur lequel agit le fluide)  $= b$ . Cela posé, par les règles de la Méchanique, dans le cas de l'équilibre le produit du poids  $p$  par le bras de levier  $a$ , doit être égal au produit de l'impulsion du fluide par le bras de levier  $b$ . Mais l'impulsion du fluide est comme le quarré de sa vitesse; donc on aura  $a.p = b.uu$ . Lorsque la machine est en mouvement, & que le point  $g$  a acquis la vitesse  $x$ , la force du fluide sur la palette est comme le quarré de sa vitesse respective (par rapport à la palette) ou est comme  $u - x$ . Donc cette force fera  $b.(u - x)^2$ . Pour avoir le moment de cette force, on la multipliera par la vitesse  $x$ ; ainsi  $b x.(u - x)^2$  fera le moment de cette force, ou l'exposant de l'effet de la machine: mais ce moment doit être un *maximum*; donc  $b dx(u - x)^2 - 2bx dx(u - x) = 0$ . D'où l'on tire  $uu - 4ux + 3xx = 0$ , ou  $(u - 3x) \times (u - x) = 0$ , c'est-à-dire,  $u = 3x$ , ou  $x = \frac{u}{3}$ , &  $x = u$ . L'équation  $x = \frac{u}{3}$  donne un plus grand, &  $x = u$  donne un moindre. En effet, si l'on fait  $z = bx(u - x)^2$ ,  $z$  &  $x$  peuvent croître depuis 0 jusqu'à ce que  $x = \frac{u}{3}$ , & alors  $z = \frac{4}{27} buu$ ; ensuite  $z$  diminue jusques à ce que  $x$  soit  $= u$ , & alors  $z = 0$ , si on suppose ensuite  $x$  négatif, la valeur de  $z$  ira en augmentant négativement jusqu'à l'infini.



REMARQUE I. On voit donc que la machine produira le plus grand effet possible, lorsque la vitesse du centre des palettes sera égale au tiers de celle du fluide. De plus si dans l'équation  $ap = buu$ , on met  $q$  au lieu de  $p$  &  $\frac{2}{3}u$  au lieu de  $u$  (\*), on aura  $\frac{4}{9}buu = aq$ . Si l'on multiplie ensuite ces équations l'une par l'autre, on aura  $\frac{4}{9}apb.uu = abquu$ , ou  $q = \frac{4}{9}p$ ; c'est-à-dire, que le plus grand poids que la machine puisse élever dans la plus grande perfection est les  $\frac{4}{9}$  de celui qui peut arrêter la machine. Maintenant le bras de levier  $b$  de la force motrice est au bras de levier du poids  $q$  (on peut concevoir  $q$  à la place de  $p$ ), comme la vitesse  $\frac{u}{3}$  est à la vitesse  $\frac{au}{3b}$  du poids  $q$ ; donc  $\frac{auq}{3b}$ , ou son égal  $\frac{4aup}{27b}$  fera l'exposant de l'effet de la machine. Cependant par une autre méthode dont nous parlerons dans la suite, on trouve un résultat différent.

REMARQUE II. Un fluide parfait, tel que celui que nous avons supposé dans le problème, est celui dont les molécules frapperoient un plan donné sans s'empêcher les unes les autres. Pour cela il faudroit, qu'après qu'une molécule a donné son coup, elle fût anéantie pour permettre à la suivante de donner aussi le sien. Dans un tel fluide les impulsions perpendiculaires seroient comme

(\*)  $\frac{2}{3}u$  est la vitesse respective du fluide par rapport au point  $g$ , lorsque la machine produit le plus grand effet possible.

les quarrés des vîtesſes multipliés par les ſurfaces, & les impulſions perpendiculaires ſeroient aux obliques ſous même vîteſſe, comme le quarré du ſinus total, au quarré du ſinus de l'angle d'incidence (\*); & ſi les ſurfaces étoient différentes, les impulſions ſeroient encore en raiſon des ſurfaces. Si les denſités étoient différentes, les impulſions ſuivroient encore la raiſon des denſités. De ſorte que les impulſions ſeroient en raiſon compoſée des denſités, des ſurfaces choquées, & des quarrés des ſinus d'incidence.

Cependant l'expérience apprend que pour le même fluide la théorie dont on vient de parler eſt d'autant plus erronée que l'angle d'incidence eſt plus petit, & que les impulſions ne ſuivent pas la raiſon des ſurfaces. Au reſte, nous reprendrons ailleurs la théorie du choc des fluides.

Lorſqu'un fluide choque un plan dans une direction perpendiculaire, l'adhérence de ſes parties entre-elles & par rapport au plan, fait qu'une plus grande maſſe agit ſur le plan, d'où réſulte un plus grand effort.

16. PROBLÈME. Si un poids  $m$  (fig. 10) fait effort pour élever un poids  $x$  par le moyen des poulies mouſſées, les cordons 1, 2, 3, 4, étant ſuppoſés parallèles, la machine ſans frottement & les cordes parfaitement flexibles, déterminer le rapport de  $m$  à  $x$  pour que la machine produiſe le plus grand effet poſſible. Nous ſuppoſerons les cordons ſans pelanteur, auſſi-bien.

(\*) On entend ici par angle d'incidence celui que fait la direction du fluide avec le plan choqué.

que les poulies  $f$  &  $g$  avec leur chappe, ou si l'on veut avoir égard au poids des poulies inférieures & de leur chappe, nous le supposons renfermé dans le poids  $m$ , nous négligerons de plus le frottement, la roideur des cordes & la résistance de l'air. Cela posé, il est aisé de voir, que par la nature de la machine, le poids  $x$  prendra quatre fois plus de vitesse en montant que le poids  $m$  en descendant. D'un autre côté le poids  $m$  est soutenu par quatre cordons, tandis que le poids  $x$  n'est soutenu que par un seul; donc la résistance du poids  $x$ , eu égard aux cordons, sera égale à  $4x$ , & ayant de plus égard à sa vitesse, elle sera  $= 16x$ ; ainsi la force qui doit faire descendre le poids  $m$ , doit être la même que celle qui mettroit en mouvement une masse  $= m + 16x$ . Or la force qui doit faire descendre  $m$  est l'excès de la pesanteur de  $m$  sur  $4x$ , c'est-à-dire, est  $= m - 4x$ . Et si l'on fait  $= g$  l'espace que fait parcourir la gravité dans un tems déterminé, en faisant  $m + 16x : g :: m - 4x :$

$\left(\frac{m - 4x}{m + 16x}\right) \cdot g$ , on aura la chute du poids  $m$ . Multipliant cette quantité par 4, on aura pour l'élévation du poids  $x$ , la quantité  $\frac{4g \cdot (m - 4x)}{m + 16x}$ .

Maintenant si on veut que l'effet de la machine soit le plus grand possible, il faudra qu'en multipliant la vitesse trouvée par le poids  $x$  qu'on veut élever, le produit  $\frac{4mx - 16xx}{m + 16x} \cdot g$  soit un *maximum*. Donc en différenciant égalant à 0,

divisant par  $4gdx$  & multipliant par  $m+16x^2$ , on aura  $m^2 - 8mx - 64x^2 = 0$ ; donc en résolvant cette équation par la méthode du second degré,  $x = m \left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{16} \right)$ . Ainsi  $x$  doit être à  $m$  à peu-près comme  $1 : 13$ , s'il y avoit  $2f$  poulies &  $2f$  cordons parallèles, en faisant  $2f = n$ , dans le cas du *maximum*, on auroit  $x = m \times \frac{-1 + \sqrt{1+n}}{n^2}$ . Le cordon  $Bx$  n'est pas compris dans le nombre  $n$ .

17. PROBLÈME. Si deux corps sans ressort  $a$  &  $p$  viennent à se choquer avec des directions diamétralement opposées & des vitesses données, on demande le rapport qu'il doit y avoir entre ces corps, pour que le plus fort  $a$  communique au plus foible  $p$  le plus grand mouvement possible. Soit  $V$  la vitesse du corps  $a$ ,  $u$  celle du corps  $p$ , selon ce que nous avons dit ci-dessus (3), la vitesse commune après le choc sera  $= \frac{aV - up}{a+p}$ . Multipliant cette vitesse par  $p$ , on aura la quantité de mouvement cherchée  $= \frac{aVp - upp}{a+p}$ , qui doit être un *maximum*; donc  $[(aVdp + aVpdp - 2aupdp - 2upppdp - aVpdp + upppdp)] : a+p = 0$  (\*); donc  $aaV - 2aup - 2up^2 + upp = 0$ , ou  $a^2V - 2aup - up^2 = 0$ , ou  $p^2 +$

---

(\*) Les deux points indiquent une division.

$$2ap = \frac{a^2 V}{u}, \text{ donc } p + a = + \sqrt{\left(\frac{aaV + aa u}{u}\right)},$$

$$\& p = -a + a \sqrt{\left(\frac{V + u}{u}\right)}. \text{ Si } V = 3 \& u = 1,$$

on aura  $p = -a + a.2 = 2a - a = a$ , c'est-à-dire, que si la vitesse du corps le plus fort, ou de celui qui a le plus de mouvement est triple de celle du plus foible, les masses des deux corps doivent être égales pour que le corps  $a$  communique au corps  $p$  le plus grand mouvement possible. Si  $V = 16 \& u = 2$ , on aura  $p = 2a$ , c'est-à-dire, que dans ce cas  $p$  doit être double de  $a$ , &c.

18. PROBLÈME. *Etant donnée une piece de bois AB supportée par une autre piece verticale AC, on demande la position d'un arc-boutant mn d'une longueur donnée, pour que la piece AB soit la mieux soutenue qu'il est possible (fig. 11).* Représentons la force absolue de l'arc-boutant par la ligne  $mn$ ; comme cette force est oblique à la piece  $AB$ , on la décomposera en  $nA$  &  $nD$ . Cette dernière force soutiendra la piece  $AB$ , & si l'on conçoit que cette piece fait effort pour tourner sur le point d'appui  $A$ ,  $An = mD$  sera le bras de levier par le moyen duquel agit la force  $Dn$ ; donc le produit  $Dn. An$  doit être un plus grand. Soit maintenant  $mn = a$ ,  $Dn = mA = x$ , on aura  $An = \sqrt{(aa - xx)}$ , &  $Dn. An = x \sqrt{(aa - xx)}$ ; donc  $dx \sqrt{(aa - xx)} - \frac{xx dx}{\sqrt{(aa - xx)}} = 0$ ; donc en ôtant la fraction, divisant par  $dx$  & réduisant,  $aa - 2xx = 0$  ou  $aa = \overline{Am} + \overline{An} = 2xx$ ; donc  $Am$

$\equiv An$ ; ainsi l'angle  $Amn$  que doit faire l'arc-boutant avec la pièce verticale  $AC$  doit être demi-droit. Ce problème peut avoir son application dans l'Architecture.

19. PROBLÈME. Déterminer l'angle  $ABC$  que les bras d'une ancre doivent faire avec la verge  $AB$  pour qu'ils puissent s'enfoncer dans le fond de la mer le plus qu'il est possible (fig. 12). Soit fait  $\equiv a$  la force qui traîne l'ancre selon la direction  $AB$ , cette force agit obliquement sur le bras  $BC$  qui doit s'enfoncer. C'est pourquoi je la décompose en deux autres forces  $Bn$  &  $np$ ,  $np$  étant perpendiculaire à  $BC$ , &  $Bp$  étant  $\equiv a$ ; donc la seule force  $Bn$  fait effort pour enfoncer le bras  $BC$ : or cette force  $Bn$  agit obliquement sur le fond de la mer  $Mh$ , & si l'on fait  $Cm \equiv Bn$ , en décomposant  $Cm$  dans les deux forces  $Ch$  &  $mh$ , cette dernière sera la seule qui produira l'enfoncement. Soit maintenant  $np \equiv x$ , on aura  $Bn \equiv Cm \equiv \sqrt{(aa - xx)}$ . Mais les triangles semblables  $Bpn$ ,  $Chm$  donnent  $a : x :: Cm \equiv \sqrt{(aa - xx)} : mh = \frac{x\sqrt{(aa - xx)}}{a}$ , qui doit être un plus grand; donc en différenciant & égalant le résultat à 0,  $\frac{\sqrt{(aa - xx)} dx}{a} - \frac{x^2 dx}{a\sqrt{(aa - xx)}} = 0$ . Otant les fractions, réduisant & divisant par  $dx$ ,  $aa - 2xx = 0$ , ou  $aa = 2xx = \frac{Bn^2}{2} + \frac{np^2}{2}$ ; donc  $Bn \equiv np$ ; donc l'angle  $nBA$  doit être demi droit. Ce problème peut avoir son application dans la marine.

20. PROBLÈME. *On veut élever un poids P par le moyen d'une corde m M qui passe sur une poulie de renvoi C, & va se rouler sur un cabestan A B (fig. 13), & l'on demande la plus grande vitesse possible avec laquelle des hommes appliqués aux barres ou leviers N du cabestan peuvent élever le poids P. Soit  $= f$  l'effort dont un homme est capable lorsqu'il ne perd aucune partie de sa force, par la promptitude de sa marche,  $a$  la vitesse qui lui fait perdre tout l'exercice de sa force,  $u$  la vitesse actuelle avec laquelle marchent les hommes appliqués aux leviers N, & supposons (ce qui est peut-être bien éloigné de la vérité) que lorsque la marche de l'homme devient double, triple, &c. son effort devient sous-double, sous-triple, &c. (\*). En faisant la vitesse  $a$ , est à l'effort  $f$  qu'elle détruit, comme la vitesse  $u$ , à l'effort que détruit cette vitesse, on aura  $\frac{f u}{a}$  pour cet effort détruit; donc  $f - \frac{f u}{a}$  sera l'effort que feront les hommes pour élever le poids P. Multipliant cet effort par le bras de levier auquel il est appliqué, & que nous désignons par  $x$ , on aura  $f x - \frac{f u x}{a}$  pour le moment de cet effort; & faisant le rayon du cabestan  $= b$ , nous aurons  $P. b = f x - \frac{f u x}{a}$ , lorsque le mouvement du poids P fera parvenu à*

---

(\*) Comme la solution du problème est fondée sur cette supposition, on ne doit pas la regarder comme bien rigoureuse.

l'uniformité. Supposons maintenant que les hommes, étant en repos, ils puissent soutenir la pesanteur du poids  $P$  au moyen d'un bras de levier  $c$  plus court, nous aurons donc  $b.P = c.f = fx - \frac{fux}{a}$ ; donc  $u = a - \frac{ca}{x}$ . Faisant maintenant

le bras de levier  $x$  est à la vitesse  $a - \frac{ca}{x}$  des hommes, comme le rayon  $b$  du cabestan est à la vitesse du poids  $P$ , on aura  $\frac{ba}{x} - \frac{bca}{xx}$ , qui

doit être un plus grand; donc  $-\frac{badx}{x^2} + \frac{2bcadx}{x^3} = 0$ ; donc  $2c = x$ , c'est-à-dire, qu'afin

que le mouvement du poids devienne le plus grand possible, supposant cependant qu'il est uniforme, il faut que le levier  $x$  soit double de celui avec lequel les hommes en repos peuvent soutenir ce poids, & par conséquent que la force effective employée à élever le poids  $P$  soit la moitié de celle qui est nécessaire pour le soutenir avec le même levier  $x$ . Si on substitue  $2c$  au lieu de  $x$  dans l'équation  $u = a - \frac{ca}{x}$ , on aura  $u = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$ , vitesse uni-

forme des hommes; ainsi leur vitesse doit être la moitié de celle qui épuiserait leur force. Nous négligerons le poids de la corde, le frottement, &c. Dans les vaisseaux on a souvent besoin de lever des ancres d'un très-grand poids, ce qu'on fait par le moyen d'un cabestan: ainsi  
notre



notre problème peut avoir son application dans la Marine.

21. PROBLÈME. *Supposons que le corps P puisse enlever le corps x par le moyen d'une corde parfaitement flexible & sans pesanteur qui passe sur une poulie A (fig. 14), déterminer le rapport des poids x & P pour que celui-ci communique au corps x la plus grande quantité de mouvement possible, on suppose que la poulie & l'air ne dérangent nullement l'action du poids P sur x. Soit c la vitesse que la cause de la gravité, agissant librement, communique à un corps dans un tems déterminé, par exemple, dans une seconde, c dt exprimera la vitesse communiquée au corps P pendant l'instant dt. Supposons que du exprime la vitesse effective avec laquelle P descend pendant le tems dt, — du sera la vitesse (en sens contraire) du poids x. Maintenant par le principe dont nous avons parlé ci-dessus (1), en concevant que la vitesse du corps P est composée de la vitesse du qu'il conserve & de la vitesse c dt — du qu'il doit perdre, P c dt — P du sera le mouvement que perd le corps P. De même en concevant que la vitesse du corps x est composée de la vitesse — du qu'il conserve, & de la vitesse c dt + du qu'il perd, il est évident que le mouvement perdu par ce corps sera c x dt + x du; or en vertu des mouvemens perdus, ces corps doivent rester en repos ou en équilibre, par le principe cité; donc P c dt — P du = c x dt + x du; ou (P c — c x) dt = (P + x). du, ou 
$$du = \frac{(P-x).c dt}{P+x}.$$*

Tome V.

V

$x$ , on aura  $\frac{(Px - xx)cdt}{P+x}$ , qui doit être un

plus grand. Différenciant cette quantité en regardant  $x$  seul comme variable, égalant le résultat à 0, ôtant la fraction, divisant par  $cdt.d x$ , & réduisant, on aura  $PP - 2Px - xx = 0$ ; donc  $xx + 2Px = + PP$ , ou  $xx + 2Px + PP = 2PP$ , ou  $x + P = \sqrt{2PP}$ , ou  $x = -P + P\sqrt{2} = P(\sqrt{2} - 1)$ . Mais  $\sqrt{2} = 1.4$ , en s'en tenant aux dixièmes; donc  $x = P(0.4) = \frac{4P}{10}$ , c'est-à-dire, que  $x$  doit être

à peu-près égal aux  $\frac{4}{10}$  de  $P$ ; de manière que si

$P = 10$  livres,  $x$  sera à peu-près de quatre livres. Le principe duquel nous avons tiré la solution de cette question, peut être d'un grand secours dans beaucoup d'autres.

22. PROBLÈME. *Etant donné un vaisseau BA qui fait voile dans la direction BA de la quille, on demande l'angle MBC que doit faire le gouvernail MB avec le prolongement de la quille pour que sa force, pour faire tourner le vaisseau, soit la plus grande possible (fig. 15). Soit  $= 2b$  la largeur MB du gouvernail,  $nB = b$ , le centre d'effort de l'eau se réunira sur le point  $n$ . Soit  $g$  le point sur lequel le vaisseau doit tourner, ayant tiré les lignes  $Bm$ ,  $pn$  perpendiculaires à  $BM$ , &  $gp$  perpendiculaire sur  $pn$ , nous aurons  $mp = nM = b$ . De plus en supposant que  $DnC$  est la direction selon laquelle l'eau frappe le gouvernail, & faisant l'angle  $ACD = \alpha$ ,  $CBM = \gamma$ , l'angle  $DnB$  extérieur au triangle*

C B n sera  $= \zeta + a$ , & si l'on fait le rayon  $= 1$ , la longueur B g (qu'on peut connoître par l'expérience)  $= c$ , le triangle rectangle B g m donnera  $1 : c :: \cos. \zeta : g m = c. \cos. \zeta$ ; parce que les angles C B M, m B g sont complémens l'un de l'autre. Donc g p  $= c. \cos. \zeta + b$  sera le bras de levier par le moyen duquel l'eau fait effort pour faire tourner le vaisseau. Maintenant par la théorie ordinaire l'impulsion du fluide est comme le carré du sinus de l'angle d'incidence D n B; donc l'action de l'eau pour faire tourner le vaisseau sera  $= \sin. B n D. g p = \sin. (\zeta + a) \times (c. \cos. \zeta + b)$ . Si nous regardons b comme nul par rapport à c; car en effet la demi-largeur du gouvernail est très-petite en comparaison de c, nous aurons  $\sin. (\zeta + a). (c. \cos. \zeta)$ , qui doit être un plus grand; donc  $2 d \zeta \sin. (\zeta + a) (\cos. \zeta + a) \times (c. \cos. \zeta) - c d \zeta. \sin. \zeta. \sin. (\zeta + a) = 0$ ; donc en divisant par  $c d \zeta \sin. (\zeta + a)$ , on aura  $2. \cos. \zeta. \cos. (\zeta + a) - \sin. \zeta. \sin. (\zeta + a) = 0$ , ou  $\cos. (2 \zeta + a) + \cos. a + \frac{1}{2} \cos. (2 \zeta + a) - \frac{1}{2} \cos. a = 0 (*)$ ; donc  $\frac{3. \cos. (2 \zeta + a)}{2} =$

(\*) Si dans la formule  $\cos. n + \cos. m = 2. \cos. \left( \frac{m+n}{2} \right) \times \cos. \left( \frac{m-n}{2} \right)$  (Géomérr. 170), on suppose  $m = 2 \zeta + a$ ,  $n = a$ , on aura en transposant les termes,  $2. \cos. (\zeta + a) \times \cos. \zeta = \cos. (2 \zeta + a) + \cos. a$ . Si dans la formule suivante du numéro cité, on fait la même supposition, on aura, en transposant les termes, changeant les signes & divisant par 2,  $-\sin. (\zeta + a). \sin. \zeta = \frac{1}{2} \cos. (2 \zeta + a) - \frac{1}{2} \cos. a$ .

$\frac{\cos. a}{2}$ , ou  $\cos. (2\zeta + a) = -\frac{1}{3} \cos. a$ . Le signe — indique qu'il faut prendre non l'angle  $a$ , mais son supplément.

23. Si la direction de l'eau est supposée parallèle à la quille, l'angle  $a$  sera  $= 0$ , & son cosinus sera  $= 1$ ; donc on aura alors  $2\zeta = -\frac{1}{3}$ . Mais si on faisoit le rayon  $= 100000$ , on auroit  $\cos. 2\zeta = 33333$ , en négligeant la fraction, & par le moyen des tables, on trouveroit  $33333 = \sin. 19^{\circ}. 28'$ , dont le cosinus  $= 70^{\circ}. 32'$ ; prenant son supplément à cause du signe —, on aura l'angle  $2\zeta = 109^{\circ}. 28'$ ; ainsi l'angle  $\zeta$  est  $= 54^{\circ}. 44'$ .

On trouvera de même que si  $SR$  désigne une voile, dont le centre soit situé en  $u$ , & que la distance du mât de cette voile au point  $g$  soit  $= c$ ; l'angle que doit faire la voile avec la quille doit être de  $54^{\circ}. 44'$ , lorsque la direction du vent est parallèle à la quille, pour que la force de la voile soit employée le plus avantageusement qu'il est possible à faire tourner le vaisseau. Quand il s'agit de la voile, la grandeur que nous avons désignée par  $b$  est censée  $= 0$ , parce que le centre de la voile est censé situé sur le mât.

24. REMARQUE. Les filers d'eau suivent les contours de la carène: ainsi ils ne sont pas parallèles à la quille; mais on peut supposer dans la pratique que leur direction moyenne fait un angle de  $15^{\circ}$  avec son prolongement; ainsi notre formule  $\cos. (2\zeta + a) = -\frac{1}{3} \cos. a$  deviendra  $\cos. (2\zeta + 15^{\circ}) = -\frac{1}{3} \cos. 15^{\circ} = -0.32198$  en supposant le rayon  $= 1$ , d'où l'on conclura par le moyen des tables que  $\zeta$  est  $= 46^{\circ}. 52'$ . M. Bouguer

trouve cet angle  $\approx 46^{\circ}.40'$ . Mais dans la pratique il n'est que d'environ  $30^{\circ}$  : cet angle est donc trop petit.

25. LEMME. Si un fluide parfait, dont la direction est  $VM$ , va frapper un plan  $AB$  qu'on suppose ne pouvoir se mouvoir que dans la direction  $MN$ , je dis que l'effort effectif de ce fluide sera proportionnel au carré du sinus d'incidence  $VM$  multiplié par le sinus de l'angle  $BMN$  du plan & de la route  $MN$  (fig. 16). Car si on décompose l'effort du fluide en deux autres, dont l'un soit parallèle, & dont l'autre ( $MP$ ) soit perpendiculaire à  $AB$ , le seul effort  $MP$  agira pour faire mouvoir le plan  $AB$ ; mais comme ce plan ne peut pas se mouvoir dans la direction  $MP$ , on décomposera  $MP$  en  $MC$  perpendiculaire à  $MN$  &  $\equiv PN$ , & en  $MN$ ; la force  $PN$  sera détruite & la force  $MN$  sera effective. Or le triangle rectangle  $MPN$  donne (en désignant le sinus total par 1)  $1 : PM :: \sin. MPN : MN$ . Mais les angles  $MPN$ ,  $BMN$  étant compléments du même angle  $PMN$  sont égaux, & de plus  $MP$  est proportionnel à l'effort absolu du fluide, lequel est comme le carré du sinus d'incidence; donc  $MN$  est comme  $\sin. VMB. \sin. BMN$ . Donc &c. Lorsque le plan est en mouvement, on prend pour l'angle  $VMB$  l'angle d'incidence apparent (\*).

(\*) Si  $VM = u$  représente la vitesse absolue du fluide au commencement du mouvement du plan & la vitesse apparente, lorsque le plan est en mouvement, & que l'impulsion perpendiculaire sur le plan  $AB$  soit  $\equiv a$ , l'on aura le carré 1 du sinus total :  $\sin. VMB. \sin. BMN :: a : b$ , impulsion effective oblique.

26. PROBLÈME. CM (fig. 17) exprimant la vitesse & la direction du vent, le vaisseau AB faisant suivant la direction Cg, le chemin Cg, tandis qu'une particule d'air fait le chemin CM, déterminer tous les points g, i, &c. auxquels le navire donné qu'on suppose n'avoir qu'une voile, parviendra dans le même tems. Par le point g tirez gP parallèlement à la voile Nn du navire, jusqu'à la rencontre de la direction du vent, tracez un cercle qui passe par les trois points C, g, P, ce cercle sera le lieu de tous les points g, i, &c. auxquels le navire arrivera dans le même-tems : car si on construit le parallélogramme fMgC, on verra aisément que gM est la vitesse & la direction apparente du vent ; & c'est avec cette vitesse respective que le vent frappe la voile. Ainsi l'impulsion est comme le produit du quarré de cette vitesse par le quarré du sinus de l'angle uCn =

MgP, ou est comme  $\overline{Mg}^2 \sin^2 \angle CgP$ . Mais le triangle gPM donne Mg : PM :: sin. gPM = sin. gPC : sin. MgP ; donc faisant le produit des extrêmes égal à celui des moyens & quarrant,

$\overline{Mg}^2 \sin^2 \angle CgP = \overline{PM}^2 \sin^2 \angle VPg$ . Mais dans les différentes routes Cg, Ci, la voile restant orientée de la même manière par rapport à la quille, la dérive est censée la même ; ainsi l'impulsion de l'eau sur la proue est comme le quarré de la vitesse du navire, & cette impulsion est égale à l'impulsion du navire suivant Cg, lorsque le mouvement du navire est uniforme ; donc si l'on fait = x le sinus de l'angle VCn = VPg, y la vitesse du sillage,

on aura  $y^2 = x x . P M$ , ou  $y = x . P (*)$  (en faisant  $P M = P$ ), c'est à-dire, la vitesse du fillage est toujours comme le produit de  $P M$  par le sinus de l'angle  $V P g = V P n$  de la voile avec le vent. Les vitesses  $C g$ , ou  $C i$ , &c. ont de même un rapport constant avec les produits  $x . C P$  : car ces produits sont égaux à celui de  $C g$  par le sinus de l'angle  $C g P$ , à cause du triangle  $C P g$ , & tous les angles  $C g P$  sont ici constans à cause qu'ils sont égaux à celui de la voile & de la route, que nous regardons comme constant ; donc le rapport  $C g : x . P . M$  étant constant & celui de  $C g : x . C P$  étant aussi constant, il y a un rapport constant entre  $P M$  &  $C P$  ; donc le point  $P$  divise toujours  $C M$  en parties qui ont le même rapport ; donc la voile étant la même, le point  $P$  est invariable ; donc les points  $g$ ,  $i$ , &c. sont situés sur la circonférence d'un cercle : car autrement les angles  $C g P$ , ou  $C i P$  qui sont formés par la route & par la voile, & qui sont appuyés sur la même corde  $C P$  ne seroient pas égaux.

COROLLAIRE. De l'équation  $y = x . P$ , il suit que sous la même voile orientée de la même manière, on aura  $y$  proportionnel à  $x$ , c'est-à-dire, que les vitesses du fillage seront proportionnelles aux sinus des angles du vent avec la voile, car alors  $P$  est constant : donc la vitesse fera un *maximum*, lorsque le vent sera perpendiculaire à la voile.

27. PROBLÈME. Déterminer l'angle de la route avec une ligne, par exemple, une côte  $C m$ , don-

(\*) Ces équations, ainsi que plusieurs autres qu'on verra dans la suite, ne désignent qu'un rapport constant, & non une égalité parfaite entre les deux membres.

née de position (fig. 17), pour que le vaisseau puisse s'en éloigner le plus qu'il est possible dans un tems donné. Faites en sorte que la route  $Cg$  fasse avec cette ligne un angle égal à celui que forme la direction absolue du vent avec la voile, & le problème sera résolu. Car par la solution du problème précédent la circonférence  $CgP$  est le lieu de tous les points auxquels le navire peut parvenir en tems égaux. Or il est évident que le milieu  $g$  de l'arc  $Cm$  est le point de cette arc le plus éloigné de la corde  $Cm$ ; donc c'est au point  $g$  que doit se rendre le navire dans le cas du présent problème. Mais alors les angles  $mCg$ ,  $CPg$  sont appuyés sur des arcs égaux  $Cg$ ,  $mg$ ; donc ils sont égaux. Or  $CPg = VCn$ ; donc  $mCg$  doit être  $= VCn$ ; donc &c.

28. PROBLEME. Soit  $MN$  (fig. 18) la moitié de la largeur d'une surface frappée qui ne peut se mouvoir que dans la direction  $Mh$ , soit  $VM$  la vitesse & la direction apparente d'un fluide parfait, on demande l'angle  $VMN$  que fait la direction apparente du fluide avec la surface  $MN$ , lorsque la vitesse de cette surface est un maximum. L'effort effectif du fluide est proportionnel au carré du sinus d'incidence  $VMN$  multiplié par le sinus  $HN$  de l'angle  $NMh$  (\*); donc il faut que  $\sin. VMN. \sin. NMH$  soit un plus grand. Mais une quantité devient *maximum* en augmentant jusqu'à un certain point pour diminuer en-

(\*) Cela suit évidemment du Lemme précédent; car alors la surface frappée est frappée comme si elle étoit en repos, & que la direction réelle du fluide fût  $VM$ .



fuite (il s'agit ici comme on le voit des *maxima*  
 ordinaires). Donc il y a nécessairement en-deçà  
 & en-delà du point N deux points infiniment  
 proches *m* & *n*, qui sont tels que menant les  
 perpendiculaires *mg*, *mi*, *nC*, *nh* sur les lignes

*MV* & *Mh*, on a  $\sin. VMm \times mg = \sin. VMn \times nh$ , *mg* est le sinus de *hMm* & *nh* celui de *nMh*.  
 Ayant abaissé les perpendiculaires *mu*, *nf* sur les  
 droites *nC*, *mg*, on aura  $nC = mi + nu$ , &  
 $nh = mg - fm$ . Mais  $\sin. VMn = nC$ ; donc

on a  $\frac{mi}{mg} = \frac{nC}{nh} = \frac{mi + nu}{mg - fm}$ ,

ou  $\frac{mi}{mg} = \frac{mi}{mg} + \frac{2mi \cdot nu \cdot mg + nu \cdot x}{mg - fm - 2mi \cdot nu \cdot fm}$ ,

—  $\frac{nu \cdot fm}{mg - fm}$ . Si

l'on néglige les termes  $\frac{nu \cdot mg}{mg - fm}$ , —  $\frac{2mi \cdot nu \cdot fm}{mg - fm}$ ,

—  $\frac{nu \cdot fm}{mg - fm}$ , infiniment petits par rapport aux au-  
 tres termes qui restent dans l'équation; après avoir

effacé dans les deux membres le terme  $\frac{mi \cdot mg}{mg - fm}$ ,

on aura  $\frac{2mi \cdot nu \cdot mg - mi \cdot fm}{mg - fm} = 0$ , ou  $\frac{2nu \cdot mg}{mg - fm} = \frac{mi \cdot fm}{mg - fm}$ ; d'où l'on tire  $nu : mf :: mi : 2 \cdot m \cdot g$ .

Maintenant les triangles *Mmi*, *nmv* ayant leurs  
 côtés perpendiculaires, sont semblables; il en est de

même des triangles *mnf*, *mMg*; de sorte qu'on a  
 les deux proportions  $nu : nm :: Mi : mM$

$$nm : mf :: Mm : Mg$$

lesquelles étant multipliées par ordre, donnent

$nu : mf :: Mi : Mg$ ; donc  $mi : 2 \cdot m \cdot g :: Mi :$

$Mg$ , ou (en mettant à la place des lignes *mi*, *mg*,  
*Mm*, *Mg* les lignes *NB*, *NH*, *MB*, *MH*, qui en

différent infiniment peu)  $NB : 2 \cdot NH :: MB :$

$MH$ ; donc  $NB : MB :: 2NH : MH$ ; donc

$\frac{NB}{MB} = \frac{2.NH}{MH}$ ; mais en supposant le rayon =

1,  $\frac{NB}{MB} = \text{tang. VMN}$ , &  $\frac{NH}{MH} = \text{tang. NMH}$ ;

ainsi dans le cas du *maximum* la tangente de l'angle de la surface avec la direction VM du fluide doit être double de la tangente de l'angle de la surface avec la route Mh.

29. PROBLEME. *Supposant que MN représente la moitié de la voile d'un vaisseau qui suit la direction Mh, déterminer l'angle de la voile avec la direction apparente du vent, pour qu'il en résulte la plus grande vitesse possible (fig. 18).* Partagez l'angle VMH que fait la route avec la direction apparente du vent en deux parties, telles que la tangente de l'angle de la voile & du vent soit double de la tangente de la route avec la voile, & le problème sera résolu. Cela suit de la solution du problème précédent.

REMARQUE Dans le problème que nous avons résolu ci-dessus (27), nous n'avons pas fait attention à la règle que nous fournit le dernier problème: lorsqu'on pourra observer les deux règles ensemble, les choses n'iront que mieux; mais si on ne peut les observer toutes les deux, il faut observer celle du problème ci-dessus (27). Au reste, nous pourrions reprendre cette matière si nous donnons un jour la manœuvre des vaisseaux.

30. LEMME. *Si on suppose que le sinus de l'angle V Cn = CP g de la direction réelle du vent avec la voile N n est = z, que celui de l'angle n CA que fait la voile avec la quille ou celui de l'angle C g P*

qui lui est égal, en supposant, comme nous le faisons ici, que le vaisseau est exempt de dérive, est  $= p$ , que la vitesse réelle du vent est  $= a$ , que dans la route directe la vitesse du vaisseau est  $= \frac{a}{m}$ , tandis que dans la route oblique

Cg cette vitesse est  $= u$ , je dis que l'impulsion relative du vent selon la longueur du vaisseau sera  $= \left( a - \frac{\zeta u}{a} \right)^2 \cdot \frac{p^2 \zeta}{r}$ ,  $r$  étant le sinus total; mais

la vitesse  $u$  du vaisseau sera  $= \frac{ap \sqrt{\zeta}}{(m-1)r^{\frac{1}{2}} + \zeta^{\frac{1}{2}}}$

(fig. 19). Le triangle CgP donne  $\sin. CPg = \zeta : Cg = u :: \sin. CgP = p : CP = \frac{up}{\zeta}$ ; donc

$PM = a - \frac{up}{\zeta}$ . L'impulsion du vent, qui (26)

est proportionnelle à  $\sin. VPg$ .  $\overline{PM}^2$  pourra être représenté par  $\left( a - \frac{up}{\zeta} \right)^2 \cdot \zeta^2$ . Mais en menant

Cf perpendiculairement à Nn & fq perpendiculaire à Cg, & faisant attention qu'il n'y a qu'une partie de l'impulsion qu'on vient de trouver qui s'exerce selon la route Cg, on fera le sinus total ou  $r$  est à l'impulsion absolue qui s'exerce selon Cf, comme le sinus  $p$  de l'angle  $f$  (\*) est à  $\left( a - \frac{pu}{\zeta} \right)^2 \cdot \frac{\zeta^2 p}{r}$ . Si l'on suppose que la ré-

(\*) Dans le triangle Cfq, l'angle  $f$  est égal à l'angle  $gCn$ : car ces deux angles sont compléments du même angle  $fCg$ .

sistance de l'eau contre la proue est exprimée par  $i u u$  lorsque le mouvement du navire est uniforme, on aura  $\left(a - \frac{p u}{\zeta}\right)^2 \cdot \frac{\zeta^2 p}{r} = i u u$ ; donc en prenant les racines, transposant & divisant par  $\sqrt{i}$ ;  $u = \frac{a \zeta \sqrt{p}}{\sqrt{(r \cdot i) + p^{\frac{1}{2}}}}$  (D). Mainte-

nant dans la route directe la voile est perpendiculaire à la quille & à la route; donc alors  $\zeta = p = r$ ; mais la vitesse de la route directe est  $\frac{a}{m}$ ; donc dans le cas de la route directe notre équation devient  $\frac{a}{m} = \frac{a r}{\sqrt{i + r}}$ ; d'où l'on tire  $\sqrt{i} = \frac{a}{m} - r$ . Substituant cette valeur de  $\sqrt{i}$  dans l'équation D, on trouve  $u = \frac{a \zeta \sqrt{p}}{(m - i) \cdot r^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{2}}}$ .

31. PROBLÈME. *Supposant toujours que le navire est exempt de dérive, déterminer parmi les routes obliques celle qu'il faut suivre pour marcher avec la plus grande des vitesses possibles.* Il est aisé de comprendre que dans la route directe les voiles se couvrant les unes les autres, il peut se faire que la vitesse soit moins grande que dans certaines routes obliques dans lesquelles on peut exposer plus de surfaces à l'action du vent. Cela supposé, si dans l'expression de la vitesse qu'on vient de trouver (30), on substitue  $r$  au lieu de  $\zeta$ , ce qui, comme il suit du Corollaire du Problème ci-dessus (26), remplir une des conditions

du *maximum*, on aura  $u = \frac{ar\sqrt{p}}{(m-1).r^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{2}}} \quad (H).$

Si l'on différencie cette dernière quantité en égalant le résultat à 0, divisant par  $dp$  & ôtant le diviseur commun de tous les termes, il viendra

$$(m-1).r^{\frac{1}{2}} - arp^{\frac{1}{2}} = 0; \text{ donc } p^{\frac{1}{2}} = \frac{(m-1).r^{\frac{1}{2}}}{2}, \text{ ou } p = \frac{(m-1).r}{4}.$$

Substituant cette valeur de  $p$  dans l'équation H, nous aurons pour le *maximum maximorum*,  $u = \frac{1}{2} a. \left(\frac{2}{m-1}\right)^{\frac{1}{2}};$

ainsi lorsque l'angle de la voile & du vent est tel que son sinus  $p = \left(\frac{m-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} r$ , l'angle de la

voile avec le vent étant droit, la vitesse  $u$  fera un *maximum maximorum*, & le problème est résolu. Car le sinus  $p$  nous fait connoître le cosinus de l'angle de la route avec la quille, & puisque la voile doit faire un angle droit avec la direction du vent, l'angle  $V\hat{C}n$  sera droit, & l'angle  $n\hat{C}g$ , dont le sinus  $= p$  sera complément de l'angle  $g\hat{C}M$  de la route cherchée avec la direction du vent CM.

En comparant les équations  $p = \left(\frac{m-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} r$  &  $u = \frac{1}{2} a. \left(\frac{2}{m-1}\right)^{\frac{1}{2}}$ , on reconnoît que plus le

sinus  $p$  est petit par rapport à  $r$ , plus la vitesse  $u$ , lorsqu'elle est parvenue au *maximum maximorum*, est grande par rapport au tiers  $\frac{1}{3} a$  de la

vitesse du vent : car  $p$  est égal au sinus total divisé par  $\left(\frac{2}{m-1}\right)^{\frac{1}{2}}$ , tandis que la plus grande vitesse  $u$  est égale au produit de  $\frac{1}{3} a$  par la même quantité  $\left(\frac{2}{m-1}\right)^{\frac{1}{2}}$ . En supposant que le navire prit la moitié de la vitesse du vent dans la route directe, on auroit  $m = 2$ , &  $p = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot r = \frac{1}{\sqrt{2}} r$ . Donc en retranchant le  $\frac{1}{3}$  du logarithme

de 4 de celui du sinus total, on auroit le sinus  $p$  de l'angle  $nCA$  qu'on trouveroit d'environ  $39^{\circ}. 3'$ . Ainsi l'angle de la route avec le vent seroit de  $50^{\circ}. 57'$ , alors la vitesse du navire seroit environ  $\frac{63}{100} a$ , tandis qu'elle étoit seulement  $\frac{50}{100} a$  dans la route directe; donc alors la vitesse seroit plus grande que dans la route directe dans le rapport de 63 : 50.

REMARQUE. Si  $\frac{1}{3} \left(\frac{2}{m-1}\right)^{\frac{1}{2}} > 1$ , ou si  $\frac{1}{\sqrt{27}} \times \frac{2}{m-1} > 1$ , ou si  $m < \frac{2}{\sqrt{27}} + 1$ , ou en prenant la valeur approchée de  $\sqrt{27}$  par le moyen des décimales, si  $m$  est moindre que 1.385, il y aura une route oblique dans laquelle le navire aura plus de vitesse que le vent lui-même, pourvu que dans la route directe le navire prenne une vitesse plus grande que 1000, en supposant celle du vent = 1385. Supposons que  $m = \frac{1}{4}$ , la vitesse dans la route directe sera  $= \frac{4a}{3} = 320$ ,

en supposant que la vitesse du vent est  $= 400$ , ce qui ne renferme aucune impossibilité, puisque le vent pourra encore agir sur le vaisseau avec une vitesse respectivé  $= 80$ . Mais alors  $p = \frac{1}{4}r$ , & l'angle de la voile avec la quille sera de  $14^{\circ}. 29'$ ; l'angle du vent & de la route sera donc de  $75^{\circ}. 31'$ , la vitesse  $u$  sera  $= 53\frac{1}{3} = \frac{4}{3}a$ .

Si dans la route directe  $m$  surpasse  $1.385$ , la vitesse du vent étant  $= a$ , la propriété, dont nous parlons, n'aura pas lieu, c'est-à-dire, que dans la route oblique qu'on vient de déterminer, le navire ne pourra pas prendre plus de vitesse que le vent, & supposant même que  $m > 3$ , il ne prendra pas autant de vitesse que dans la route directe. Lorsque  $m > 3$ , on trouve que  $p$  est plus grand que le sinus total, ce, qui est impossible; donc alors il n'y a aucune route oblique qui porte au *maximum* la vitesse du sillage; de sorte donc que si dans la route directe la vitesse est plus grande que la  $1.385^{\text{me}}$  partie de celle du vent, le navire aura plus de vitesse que le vent dans certaines routes obliques. Si la vitesse du navire dans la route droite est moindre, mais plus grande que  $\frac{a}{3}$ , le navire n'ira plus si vite dans la route oblique qui lui procure la plus grande vitesse, mais sa vitesse sera néanmoins plus grande que dans la route directe. Enfin si la vitesse du navire dans la route directe est  $< \frac{a}{3}$ , il n'y aura point de route oblique qui rende la vitesse un *maximum*.

On peut encore remarquer qu'en supposant que la surface des voiles est infinie, la vitesse du

vaisseau dans la route oblique seroit tout au plus égale à celle du vent : car l'angle du vent avec la voile étant droit, dans ce cas le vaisseau obéiroit au vent en suivant la direction du vent, puisque l'action du vent sur le vaisseau seroit infinie. Et de-là on peut conclure qu'il y a un *maximum* de vitesse qui dépend de la surface des voiles au-delà, & en-deçà, du quel il y a à perdre, soit qu'on augmente ou qu'on diminue la surface des voiles, & qu'en rendant cette surface infinie, on fait changer de route au vaisseau. Il n'est donc pas surprenant qu'alors la vitesse du sillage diminue.

32. PROBLÈME. Soit une piece de bois  $CH$  (fig. 20) d'une grosseur uniforme qui tourne autour du point  $C$ , & qui est attachée par l'extrémité  $H$  à une corde  $HMm$  qui passe sur la poulie  $M$  & soutient un globe  $m$  par le moyen d'une courbe, de maniere que le poids  $m$  & la piece  $HC$  sont toujours en équilibre ; on demande la nature de la courbe  $Kum$  que décrit le centre de gravité du poids  $m$ . Soit  $CB$  la position horisontale de la piece  $CH$ ,  $A$  le point du milieu de cette piece,  $K$  le point où se trouve le centre  $m$  du globe dans ce cas,  $f$  le point où le globe  $rm$  touche alors la courbe  $fxg$  sur laquelle ce corps glisse tandis que son centre décrit la courbe  $Km$ . Cela posé, le produit du poids  $CH$ , que je fais  $= a$ , par la distance  $CA$ , doit être égal au produit du poids  $m$  par la perpendiculaire  $Ch$  à la direction  $MB$ , autrement il n'y auroit point d'équilibre. Donc on aura  $a. CA = m. Ch$ .

Supposons maintenant que la piece de bois est dans la situation  $CH$ , en tirant par le point  $n$  milieu



de la piece CH, & du centre du globe  $m$  les lignes  $n\zeta$ ,  $mP$  perpendiculaires sur  $CM$  &  $DM$ , le produit du poids  $m$  par sa descente verticale  $KP$  est égal au produit du poids  $CH$  par sa montée verticale  $= C\zeta$  (\*), donc  $KP.m = a.C\zeta$ , multipliant cette équation par la précédente, on aura  $a.CA.KP.m = mCh.a.C\zeta$ , d'où l'on tire  $CA.KP = Ch.C\zeta$ . Maintenant pour construire la courbe  $Kum$  prenez toujours  $Kp = KP$  quatrième proportionnel aux lignes  $CA$ ,  $Ch$ ,  $C\zeta$ , tirez ensuite la perpendiculaire indéfinie  $pPm$  à  $DM$  & supposant la longueur de la corde  $HM$   $m = C$ , du sommet de la poulie  $M$  avec un rayon égal à la différence entre la longueur  $C$  & la longueur  $HM$ , décrivez un arc de cercle qui coupe la ligne  $pPm$  du côté de  $DN$ , le point d'interdiction sera à la courbe cherchée. Cela étant fait par chaque point  $u$  de cette courbe on tirera des perpendiculaires à la même courbe & en-dessous, prenant chaque perpendiculaire  $ux$  égale au rayon  $rm$  du poids  $m$ , la courbe  $fxg$  qui passera par le sommet de ces perpendiculaires sera la courbe sur laquelle doit glisser le corps  $m$  qu'on peut faire cylindrique si l'on veut. En supposant que  $CH$  représente un pont levis, on pourra abaisser ou élever facilement ce pont par une machine semblable à celle que représente notre figure.

(\*) Par les loix de la Mécanique, un corps qui descend librement par un plan incliné, ou par un plan courbe, acquiert la même vitesse que s'il descendoit le long d'un plan vertical de même hauteur. De plus le poids de la piece  $CH$  est censé réuni au milieu  $A$ , ou  $n$  de cette piece; & par la nature du problème, si on donne une impulsion au corps  $m$  & une impulsion égale, mais en sens contraire à la piece  $CH$ , il y aura équilibre.

Tome V.

X

Nous négligeons ici le frottement & la résistance de l'air.

*Théorie du centre de Percussion.*

33. *LE centre de Percussion* est un point par lequel, si un corps venoit à rencontrer un obstacle, il le frapperoit avec plus de force que par tout autre point. Lorsque le corps se meut parallèlement à lui-même, le centre de percussion est le même que celui de gravité; car toutes les parties du corps ayant des vitesses égales, leurs forces sont en équilibre autour de leur centre de gravité, il suffira donc ici de rechercher le centre de percussion des corps qui se meuvent autour d'un point fixe, ou autour d'une ligne qu'on appelle *axe de balancement*.

34. PROBLÈME. *Trouver le centre de percussion d'un corps AC qui se meut autour d'un axe fixe F (fig. 21).* Multipliez tous les points solides de ce corps, que j'appellerai les élémens de ce corps par les quarrés de leurs distances à l'axe de balancement, & divisez le résultat par les élémens multipliés par leurs distances, le problème sera résolu. Car si on suppose que le corps AC soit parvenu en tournant autour de l'axe F, dans la situation AB, chaque élément de ce corps aura décrit un arc semblable à l'arc BC. La force de chaque élément sera donc comme le produit de cet élément, multiplié par l'arc qu'il a décrit, ou ce qui revient au même, sera égal au produit de cet élément par sa vitesse; donc la somme des forces sera égale au produit des élémens multipliés par leur vitesses. Considérant ces forces comme des poids, la distance du centre de gravité de ces poids par rapport au point F sera égal au produit de ces poids par leur distance à

F, en divisant par la somme des poids, ou sera  
 $\equiv$  au produit des élémens multipliés par les  
 distances & par les arcs qu'ils décrivent, en  
 divisant par les élémens multipliés par ces mêmes  
 arcs : or ces arcs sont comme les distances ; donc  
 la distance du centre de percussion par rapport  
 à l'axe F est égale au produit des élémens par le  
 quarré de leurs distances ( nous appellerons ces pro-  
 duits momens des forces, la somme de ces produits  
 somme des momens des forces, en nommant forces  
 la somme des produits des élémens par leurs dis-  
 tances à l'axe de balancement, & somme des for-  
 ces la somme de ces produits ), en divisant par  
 les élémens multipliés par leur distance, ou ce  
 qui revient au même par la somme des forces.  
 Il est évident que ces forces des molécules du  
 corps sont égales de part & d'autre du centre  
 de percussion, qu'elles sont en équilibre autour  
 de ce centre, & que si l'on oppose un obstacle  
 invincible au mouvement du centre de percus-  
 sion, tout le corps restera en repos.

Supposons que P est le centre cherché, en tirant  
 la ligne MP tangente de l'arc Pp que décrit le  
 centre de percussion, le point M de la surface  
 du corps AC sera celui par lequel, si ce corps  
 vient à choquer un obstacle, il le frappera avec  
 plus d'effort que par tout autre point de la sur-  
 face de ce même corps : parce que le centre de  
 percussion se trouve dans la ligne Mm.

REMARQUE I. Le centre de percussion est aussi  
 appelé *centre d'oscillation*, parce que la distance  
 FP détermine la longueur d'un pendule simple  
 qui feroit ses oscillations dans le même-tems que  
 le corps AC fait les siennes : il y a deux mé-

rhodes pour trouver le centre de percussion des solides, nous parlerons de l'une & de l'autre.

REMARQUE II. Il est visible que la force d'un point de matiere qui balance autour d'un axe doit s'estimer par le produit du quarré de la distance à cet axe multiplié par sa masse, c'est-à-dire, que la force giratoire d'un corps est comme la somme des produits de chacun de ses élémens par les quarrés de leurs distances respectives à l'axe de balancement : c'est ce que M. Euler appelle *moment d'inertie*.

35. PROBLEME. *Trouver le centre de percussion d'une ligne droite AB qui oscille autour d'un point A (fig. 22.).* Soit  $AB = a$ ,  $AP = x$ ,  $Pp = dx$ ;  $x dx$  pourra représenter la force de l'élément  $dx$ . Multipliant cette force par  $x$ , on aura  $xx dx$  pour l'expression du moment de cet élément; donc la somme des momens des forces sera  $= S. x^2 dx = \frac{x^3}{3}$ . Divisant cette somme par la somme des

forces  $S. x dx = \frac{x^2}{2}$ , le quotient  $\frac{2}{3} x$  fera la distance du centre de percussion de la partie AP par rapport au point A. Si l'on fait  $x = a$ , & qu'on prenne  $AC = \frac{2}{3} a$ , l'on aura la distance du centre de percussion de la ligne donnée au point A.

36. PROBLEME. *Trouver le centre de percussion d'un rectangle AB qui fait ses oscillations autour de la ligne TAT (fig. 23.).* Ayant tiré les lignes MN, mn parallèles à la base du rectangle, soit  $AP = x$ ,  $Pp = dx$ ,  $MN = b$ ,  $b dx$  sera l'élément MNmn du rectangle,  $bxx dx$  le moment de cet élément,  $b x dx$ , la force du même élément;

donc  $\frac{S. b x x d x}{S. b x d x} = \frac{2}{3} x$  fera la distance du centre

de percussion de la partie AP ; & si l'on fait  $x = AB = a$ ,  $\frac{2}{3} a$  fera la distance AC du centre de percussion du rectangle par rapport au point A.

37. PROBLEME. Trouver le centre de percussion d'un triangle BAR qui fait ses oscillations autour d'une ligne CAT parallèle à sa base, & qui passe par son sommet A (fig. 24). Il est facile de voir que le centre de percussion se trouve dans la ligne Ag qui divise la base, & chaque élément du triangle en deux également. Soit AD perpendiculaire à la base BR & faisons AD = a, BR = b, Am = x, MF = y, l'on aura l'élément MFfN = y dx ; mais à cause des triangles semblables ABR, AMF, on a b : y :: a : x (parce que dans les triangles semblables les bases sont proportionnelles aux hauteurs) ; donc  $y = \frac{b x}{a}$ , &

$y dx = \frac{b x dx}{a}$  ; donc l'élément des forces du triangle

AMF est  $\frac{b x x dx}{a}$ , l'élément des momens des

forces étant  $\frac{b x^3 dx}{a}$  ; donc en divisant S.  $\frac{b x^3 dx}{a}$

=  $\frac{b x^4}{4 a}$  par S.  $\frac{b x^2 dx}{a} = \frac{b x^3}{3 a}$ , le quotient  $\frac{3}{4} x$

fera la distance du centre de percussion du triangle AMF à l'axe CT, & si l'on fait  $x = a$ , la distance du triangle entier ABR par rapport au même axe sera =  $\frac{3}{4} a$ . Donc si on suppose que An =  $\frac{3}{4} a$  & qu'on mène la parallèle Nnf à l'axe CT, le point P sera le centre cherché.

X 3

COROLLAIRE. Si le triangle dont il s'agit de trouver le centre de gravité étoit isocèle, comme le triangle  $gAB$  (fig. 25), le centre de percussion se trouveroit en menant la perpendiculaire  $AD$  sur la base  $gB$  & faisant  $An = \frac{1}{2} AD$ .

38. PROBLEME. Trouver le centre de percussion d'un triangle isocèle  $gAR$  qui tourne autour de la base  $gR$  (fig. 24). Soit  $AD = a$ ,  $gR = b$ ,  $Am = x$ ,  $qF = y$ , on aura l'élément  $qPff = y dx = \frac{bx dx}{a}$ . Multipliant cet élément par sa distance à l'axe d'oscillation  $gR$ , on aura  $\frac{bx dx}{a} \times a - x = bx dx - \frac{bx x dx}{a}$  qui sera l'élément des forces. Multipliant ce dernier élément par  $a - x$ , on aura l'élément des momens des forces  $= abx dx - 2bx x dx + \frac{bx^3 dx}{a}$ . En divisant la somme des momens des forces par la somme des forces, on aura  $\frac{6a^2 - 8ax + 3x^2}{6a - 4x}$  qui sera la distance du centre de percussion du triangle  $AqF$  par rapport à la base  $gR$ . Si l'on fait  $x = a$  on aura  $\frac{a}{2}$  pour l'expression de la distance du centre de percussion du triangle proposé par rapport à la ligne  $gR$ . Donc si on fait  $Dm = \frac{1}{2} a$  le point  $m$  sera le centre cherché.

39. PROBLEME.  $m$  &  $n$  étant deux nombres entiers impairs & positifs, trouver la distance du centre de percussion d'une courbe du genre parabolique désignée par l'équation  $y^{m+n} = x^n g^m =$

$x^n$ , en faisant le paramètre  $= 1$ , qui balance autour de la tangente CAD (fig. 26). Soit  $AB = a$ ,  $PM = y$ ,  $Mm = zy$ ,  $AP = x$ ,  $2y dx$  sera l'élément  $MmN$ ;  $2yx dx$  l'élément des forces, &  $2yx x dx$  l'élément des momens des forces.

Mais  $y = x \frac{n}{m+n}$ ; donc en substituant cette valeur dans l'élément des momens des forces & dans celui des forces, & divisant l'intégrale des momens des forces par la somme des forces, on

aura  $\left( \frac{2mm + 5mn + 3nn}{3mm + 7mn + 4nn} \right) x$  pour la distance

du centre de percussion du segment  $MAm$  à la ligne CD. Si dans cette expression on suppose  $x = a = AB$ , on aura la distance du centre de percussion de la parabole  $FAf$  au point A. Si  $m = n = 1$  comme dans la parabole ordinaire, cette distance sera  $= \frac{10}{14} a = \frac{5}{7} a$ . Si  $m = 3$  &  $n = 1$ , cette distance sera  $= \frac{16}{13} a = \frac{2}{13} a$ , & ainsi des autres.

40. PROBLÈME. Soit  $fAF$  une parabole ordinaire qui fait ses oscillations autour de la base  $Ff$ , on demande la distance de son centre de percussion à la ligne  $Ff$  (fig. 26). Soit l'équation de la parabole  $y^2 = gx = x$ , en faisant  $g = 1$ ; nommant les mêmes grandeurs des mêmes noms que dans le problème précédent, l'élément  $MmN$  sera  $= 2y dx = 2x^{\frac{1}{2}} dx$ . Multipliant cet élément par  $a - x$ , on aura l'élément des forces, & multipliant encore par  $a - x$ , on aura l'élément des momens des forces, divisant la somme des momens par celle des forces, il vient

$$\frac{35aa - 42ax + 15x^2}{35a - 21x} = \frac{8a}{14} = \frac{4}{7}a, \text{ lorsque } x =$$

$a$  ; donc si on fait  $BP = \frac{4}{3}a$ , le point P sera le centre de percussion cherché.

REMARQUE. Nous allons résoudre huit problèmes sur le centre de percussion des solides par une méthode aisée, mais erronée, dont se servent plusieurs Auteurs : nous ne la rapportons que pour faire comprendre à nos Lecteurs qu'il ne faut pas toujours en croire les Géomètres sur leur parole. Mais nous donnerons ensuite une autre méthode plus exacte & plus rigoureuse.

41. PROBLEME. Trouver le centre de percussion d'un cylindre qui tourne autour d'un axe qui passe par le point  $g$  pris sur le prolongement  $Ag$  de son axe  $AB$  (fig. 27) & perpendiculaire à cet axe. Soit  $AB = a$ ,  $Ag = b$ ,  $AP = x$ ,  $Pp = dx$ ,  $gP = b + x$ ,  $MP = r$ ,  $c$  la circonférence de ce rayon ; donc  $\frac{rc}{2}$  sera le cercle de la base du cylindre, &  $\frac{rcdx}{2}$  sera l'élément  $MmnN$  du cylindre. Multipliant cet élément par  $b + x$ , on aura l'élément des forces  $= \frac{brcdx}{2} + \frac{rcxdx}{2}$ . Multipliant cet élément par  $b + x$ , on a la différence des momens des forces  $= \frac{bbrcdx}{2} + brcxdx + \frac{rcxxdx}{2}$ , dont l'intégrale  $\frac{bbrcx}{2} + \frac{brcxx}{2} + \frac{rcx^3}{6}$  étant divisée par la somme des forces  $\frac{brcx}{2} + \frac{rcxx}{4}$ , donne  $\frac{6bb + 6bx + 2xx}{6b + 3x}$  pour la distance du centre de percussion de la partie



AP au point  $g$ . Si on fait  $x = a$ , on trouvera  $\frac{6bb + 6ba + 2aa}{6b + 3a}$  pour la distance cherchée du centre de percussion du cylindre entier par rapport au point  $g$ .

Si on suppose que le cylindre balance autour du point A, on aura  $b = 0$  & la distance du centre de percussion du cylindre par rapport au point A sera  $= \frac{1}{3} a$ .

42. PROBLEME. Trouver le centre de percussion d'un cône droit qui fait ses oscillations autour d'un axe A qui passe par son sommet parallèlement à la base (fig. 28). Soit l'axe  $AD = a$ ,  $AP = x$ ,

$MP = y$ ,  $c$  la circonférence du rayon  $r$ ,  $\frac{yc}{r}$

sera la circonférence du rayon  $y$ ,  $\frac{yy^c}{2r}$  la surface

du cercle de ce rayon, &  $\frac{cyy^dx}{2r}$  l'élément du

cône. Soit maintenant  $BC = 2r$ ,  $BD = r$ ; les triangles semblables ABD, AMP donneront  $a :$

$r :: x : PM = y = \frac{rx}{a}$ ; donc notre élément sera

$= \frac{rcxx^2dx}{2aa}$ . Cela posé,  $\frac{rcxx^2dx}{2a^2}$  sera l'élément

des forces, &  $\frac{rcx^4dx}{2aa}$  celui des momens des forces.

Divisant la somme des momens des forces

$\frac{rcx^5}{10aa}$  par la somme des forces  $\frac{rcx^4}{8a^2}$ , le quotient

$\frac{8}{10}x = \frac{4}{5}x$  sera la distance du centre de percussion du cône indéterminé AM  $m$  au point A, & si l'on

fait  $x=a$ ,  $\frac{4}{3}a$  sera la distance du centre de percussion du cône entier au point A. Ainsi en supposant  $Ap = \frac{4}{3}a$ , le point  $p$  sera le centre cherché.

43. PROBLEME. *Supposons maintenant que le cône BAC fasse ses oscillations autour du diamètre BC de la base, on demande le centre de percussion.* Dans cette

hypothèse, en multipliant l'élément  $\frac{rcx \, dx}{2a^2}$  par

$a-x$ , on aura l'élément des forces. Si l'on multiplie le même élément par le carré de  $a-x$ , on aura l'élément des momens des forces. En divisant la somme des momens des forces par celle des forces, on aura (après les opérations

ordinaires)  $\frac{20aa - 30ax + 12xx}{20a - 15x}$  (A), valeur de

la distance du centre de percussion du cône  $AMm$  à la ligne BC; donc en faisant  $x=a$ , on aura  $\frac{2}{3}a$ , & supposant  $Dp = \frac{2}{3}a$ , le point  $p$  sera le centre de percussion du cône entier.

REMARQUE. Selon quelques Auteurs l'expression A, que nous venons de trouver, désigne la distance du centre de percussion du cône tronqué  $BMmC$  à la droite BC. Mais il est aisé de voir qu'ils se trompent; car en supposant  $x$

$=\frac{1}{2}a$  cette expression devient  $=\frac{16a}{25}$ ; donc le

centre de percussion d'un cône tronqué dont la hauteur seroit  $=\frac{a}{2}$  seroit éloigné de la base de

$\frac{16a}{25}$ ; donc il seroit situé hors de ce cône, ce qui est absurde.

44. PROBLÈME. *Trouver le centre de percussion d'un conoïde elliptique qui fait ses oscillations autour d'un axe TAD perpendiculaire au premier axe AB (fig. 29).* Il est évident que le centre de percussion cherché est situé dans l'axe AB. Soit l'axe  $AB = a$ , le paramètre  $= p$ , le rapport du rayon à la circonférence  $r : c$ , le demi petit axe  $Cf = r$ ,  $AP = x$ ,  $MP = y$ . La circonférence du rayon  $y$  sera  $= \frac{cy}{r}$ , le cercle de ce même rayon sera  $\frac{cyy}{2r}$ , & l'élément  $MmnN = \frac{cyydx}{2r}$ . Mais par la nature de l'ellipse,  $yy = px - \frac{px^2}{a}$ ; donc notre élément est  $= \frac{cpxdx}{2r} - \frac{cp x^2 dx}{2a.r}$ . Multipliant cet élément par  $x$  & intégrant, on aura  $\frac{cp x^3}{6r} - \frac{cp x^4}{8ar}$  pour la somme des forces. Multipliant le même élément par  $xx$  & intégrant, on aura la somme des momens des forces  $= \frac{cp x^4}{8r} - \frac{cp x^5}{10.ar}$ . Divisant cette quantité par la somme des forces, on trouve après les opérations ordinaires  $\frac{15ax - 12x^2}{20.a - 15.x}$ , quantité que j'appelle B, & qui désigne la distance du centre de percussion du segment  $MAm$  au point A. Si on fait  $x = a$ , on aura  $\frac{3.a}{5}$  pour la distance du centre de percussion du conoïde entier au sommet A. Si au

lieu de faire  $AB = a$ , on fait  $AB = 2a$ , cette distance sera  $= \frac{6.a}{5}$ .

45. PROBLÈME. *Trouver le centre de percussion d'une sphère ABA, dont le diamètre  $= 2a$  (fig. 30).* En substituant  $2a$  au lieu de  $a$ , dans l'expression B qu'on vient de trouver (44), on aura  $\frac{30ax - 12xx}{40.a - 15.x}$  pour la distance du centre de percussion du segment  $AM_m$ , & si l'on fait  $x = 2a$ , on trouve  $\frac{12aa}{10a} = \frac{6a}{5}$  pour la distance du centre de percussion de la sphère entière à la ligne TAD; or en supposant le diamètre du cercle  $= a$ , l'on a  $p = a$ , & l'équation du cercle est  $yy = px - \frac{pxx}{a}$ ; donc &c.

COROLLAIRE. Il suit de-là & de ce qu'on a dit dans le problème précédent, que si une sphère & une ellipsoïde ont le même axe  $2a$ , & que ces solides fassent leurs oscillations autour d'une même tangente TAD perpendiculaire à l'axe AB, ces solides auront le même centre de percussion  $n$  qu'on trouvera en faisant  $An = \frac{6.a}{5}$ .

46. PROBLÈME. *Supposant que FAF (fig. 26) représente un conoïde parabolique ordinaire dont l'axe  $AB = a$ , déterminer le centre de percussion de ce solide.* Soit l'ordonnée PM perpendiculaire à l'axe  $= y$  l'abscisse AP  $= x$ ,  $r : c$  le rapport du rayon à la circonférence;  $\frac{cyydx}{2r}$  sera l'élément  $MmnN$  du conoïde. Soit l'équation de la

courbe génératrice,  $yy = px$ ; cet élément deviendra  $\frac{cpx^2}{2r}$ . Multipliant cet élément par  $x$

& intégrant, on aura  $\frac{cp x^3}{6r}$  pour la somme des forces. Multipliant le même élément par  $x^2$  & intégrant, l'on a la somme des momens des forces  $= \frac{cp x^4}{8r}$ . En divisant cette quantité par la somme

des forces, le quotient  $\frac{6x}{8} = \frac{3}{4}x$  sera la distance du centre de percussion du segment  $MAm$  à la tangente  $CAD$ ; donc si on fait  $x = a$ , & qu'on suppose  $Ap = \frac{3}{4}a$ , le point  $p$  sera le centre de percussion du conoïde  $FAf$ .

Nous avons promis dans la remarque du n°. (40) de donner une méthode plus exacte que celle que nous venons d'employer dans les huit derniers problèmes. Avec un peu d'attention il est aisé de voir que cette méthode, dont se sert l'Abbé Deidier, suppose que tous les points des élémens d'un solide sont également distans de l'axe de balancement, ou ce qui revient au même que chaque élément du solide est concentré dans un point qui se trouve dans l'axe du solide, ce qui n'est pas; ainsi cette méthode n'est pas fort exacte; mais elle est fort simple & fort aisée. Dans la méthode que nous allons employer on estime les forces de la même manière que ci-dessus, mais le moment des forces s'estime différemment.

*Autre méthode pour trouver le centre de percussion des solides qui font leurs oscillations autour d'un axe.*

47. IL faut considérer l'élément d'un solide comme composé d'autres élémens dont chacun soit parallèle à l'axe de balancement. Avant d'en faire l'application, nous allons établir le Lemme suivant.

48. LEMME. La somme des produits de tous les quarrés  $AP$  (fig. 31), chacun multiplié par l'élément  $PMmp$  de l'espace  $CPMD$  qui fait partie d'un quart de cercle  $BDC$  dont le rayon est  $= a$ , la ligne  $CA$  étant  $= b$ , sera  $= bbf + \frac{1}{4} a af$ , en supposant que  $f$  soit égal à l'espace  $BDC$ . Soit l'élément  $pmMP = dz$ ,  $PC = y$ , on aura  $d\tau = dy \sqrt{(aa - yy)} = Pp \cdot PM$ ,  $AP \cdot d\tau = bb dz + yy dz$ ; dont l'intégrale  $= bb\tau + S. yy dz$ . Pour intégrer  $yy dz$  je substitue la valeur de  $d\tau$ , pour avoir  $yy dz = yy dy (aa - yy)^{\frac{1}{2}}$ . J'ajoute & je retranche  $\frac{1}{4} aa (aa - yy)^{\frac{1}{2}}$ , & je donne à notre différentielle la forme  $\frac{1}{4} aa (aa - yy)^{\frac{1}{2}} dy - \frac{1}{4} (aa - yy)^{\frac{1}{2}} dy (aa - yy) + \frac{1}{4} yy dy (aa - yy)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} aa (aa - yy)^{\frac{1}{2}} dy - \frac{1}{4} dy (aa - yy)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} yy dy (aa - yy)^{\frac{1}{2}}$ , dont l'intégrale  $\frac{1}{4} aa \cdot S. dy (aa - yy)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} y (aa - yy)^{\frac{1}{2}}$  est  $= \frac{1}{4} aaf$ , lorsque  $CP$  est  $= CB = a$ ; donc &c.

49. PROBLÈME. Soit  $DmBM$  une sphere qui balance autour d'une ligne  $TAT$  perpendiculaire au prolongement  $DA$  de l'axe de la sphere ; on demande le centre de percussion de cette sphere (fig. 32). Soit  $DB = 2a$ ,  $PM = y$ ,  $DP = x$ ,  $c$  la circon-

férence du rayon  $a$ ,  $\frac{c}{2a}yy$  sera le cercle du rayon  $y$ .

Mais  $yy = 2ax - x^2$  ; donc ce cercle sera  $= \frac{2acx - cx^2}{2a}$ . Soit maintenant  $DA = b$ , on aura

$AP = b + x$  ; donc en supposant  $f = \frac{2acx - xx}{2a}$ ,

écrivant  $y$  la place de  $a$ , &  $b + x$ , au lieu de  $b$ , on aura  $(b + x^2 + \frac{1}{4}yy) \times \frac{2acx - cx^2}{2a}$  pour le produit de tous les élémens

du cercle  $Mm$ , chacun multiplié par le carré de sa distance à l'axe de balancement ; cela suit du Lemme précédent. Substituant la valeur de  $yy$ , & multipliant par  $dx$ , on aura  $(bb +$

$2bx + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{4}xx) \left( \frac{2acx dx - cx^2 dx}{2a} \right)$  pour

la différence du moment des forces, dont l'in-

tégrale  $\frac{1}{2}cbbxx + \frac{2}{3}cbx^2 + \frac{1}{8}cx^4 - \frac{cbbx^3}{6a}$

$- \frac{cbx^4}{4a} - \frac{3cx^5}{40a}$  (A) exprime la somme des

momens des forces. Si dans la formule A on fait  $x = 2a$ , & qu'on divise le résultat par la somme des forces, qui dans ce cas est égale au produit de la sphere  $\frac{2}{3}aac$  par la distance  $a + b$  au point

de suspension, on aura  $\frac{5bb + 10ab + 7aa}{5a + 3b}$ , expression de la distance du centre de percussion de la sphere entiere au point de suspension. Si dans cette expression on suppose  $b = 0$ , cette distance sera  $\frac{7a}{5}$ , & le centre de gravité de la sphere sera éloigné du centre de percussion de la quantité  $\frac{2}{5}a$ .

50. PROBLEME. Soit AB un cylindre droit qui balance autour de la ligne CD perpendiculaire au prolongement de son axe, on demande le centre de percussion du cylindre (fig. 27). Soit le rayon  $PM = r$ ,  $c$  la circonférence de ce rayon,  $AP = x$ ,  $AB = a$ ,  $Ag = b$ ; la différence des forces sera  $= \frac{cr dx}{2} \cdot (b + x)$ , & celle des momens

des forces sera  $= (b + x + \frac{1}{4}rr) \frac{cr dx}{2}$ ; donc

en divisant la somme des momens des forces par la somme des forces & supposant  $x = a$ , l'on aura  $\frac{12bb + 12ab + 4aa + 3rr}{12b + 6a}$  pour la distance

du centre de percussion du cylindre au point g.

Si on suppose  $b = 0$ , la distance du centre de percussion du cylindre par rapport au point A

sera  $= \frac{4aa + 3rr}{6a} = \frac{2}{3}a + \frac{1}{2}\frac{rr}{a}$ .

REMARQUE. Il est aisé de voir que les résultats que donne la seconde méthode ne sont pas les mêmes que ceux de la premiere. Pour que  
les



les commençans puissent se décider plus aisément entre ces deux méthodes, nous allons résoudre le problème suivant.

51. PROBLEME. Soit AET (fig. 33) un corps de figure quelconque qui oscille librement autour d'un axe T, on demande la distance du centre d'oscillation de ce corps par rapport à l'axe T. Ayant mené la verticale TN, & la droite TC au centre de gravité C du corps, je suppose que l'action de la gravité sur ce corps soit représentée par CD parallèle à TN. Comme ce corps ne peut pas suivre la direction CD, je décompose cette action en deux autres, l'une représentée par CB détruite par la résistance de l'axe T, l'autre CF perpendiculaire sur TCB & qui produit le mouvement d'oscillation du corps autour de l'axe. Soit le sinus total  $\equiv 1$  &  $CD = P$ ; dans le triangle CDF l'on a  $1 : P :: \sin. CDF : CF = P \times \sin. CDF = P. \sin. CTN$ ; puisque l'angle CDF  $= DCB$  (son alterne interne); or  $DCB = CTN$  son correspondant, à cause des parallèles TN, CD. Donc en multipliant par CT, on aura le moment de la force de la gravité par rapport à l'axe T, on aura, dis-je, ce moment  $= P.CT. \sin. CTN$ . Soit  $mn$  l'arc décrit dans un tems infiniment petit par une particule quelconque  $m$  du corps proposée, QR un arc semblable décrit avec un rayon constant TQ. Le moment de la quantité de mouvement imprimé à la particule  $m$  est  $= m. mn. Tm = m. \overline{Tm}^2 \frac{QR}{TQ}$ ; parce que l'on a  $mn : QR :: Tm : TQ$ , ou  $mn$

Tome V. Y

$= \frac{Tm.QR}{TQ}$  ; donc puisque la fraction  $\frac{QR}{TQ}$  est la même pour toutes les molécules  $m$ , si on prend les produits de chaque molécule par le carré de sa distance à l'axe  $T$  & qu'on nomme  $M$  leur somme, le moment du mouvement de la masse entière sera  $= M. \frac{QR}{TQ}$ . Egalant ce moment à celui de la force  $CF$  qui le produit, on aura  $P.CT \times \sin.CTN = M \frac{QR}{QT}$ , &  $\frac{QR}{QT} = \frac{P.CT. \sin.CTN}{M}$ .

Supposons maintenant un corps  $p$  qui oscille autour de l'axe  $t$ , & désignant par  $p$ ,  $ct$ ,  $ctn$ ,  $M'$ ,  $qr$ ,  $qt$  les quantités analogues à  $P$ ,  $CT$ , &c. on aura  $\frac{qr}{qt} = \frac{p.ct.\sin.ctn}{M'}$  ; donc si l'on a

$$ctn = CTN, \quad tq = TQ, \quad \frac{P.CT}{M} = \frac{p.ct}{M'}, \quad \text{on}$$

aura  $qr = QR$ , ce qui fait voir que les deux points  $q$  &  $Q$  décriront des espaces égaux en tems égaux, & le centre de gravité de deux corps arrivera en même-tems à la verticale. Si le corps  $p$  est assez petit pour qu'on puisse regarder sa masse comme concentrée dans son centre de gravité, on aura un pen-

dule simple ordinaire, & dans ce cas  $M' = p.ct$  ; car ici  $M'$  représente ce que nous avons appelé ci-devant la somme des momens des forces ; ainsi par la première méthode (qui réussit dans ce cas) on a  $M' = p.ct$ , & alors l'on a l'équation  $\frac{P.CT}{M} = \frac{p.ct}{p.ct}$ ,

qui donne  $tc = \frac{M}{P.CT}$ . Mais  $P.CT$  est le produit

de la masse, ou poids  $P$  par la distance de son centre de gravité à l'axe  $T$ , & ce produit est toujours égal à ce qu'on a appelé *la somme des forces*, comme il est aisé de le voir (voyez ce que nous avons dit dans la seconde Section touchant le centre de gravité en faisant attention qu'on a désigné par somme des momens, ce qu'on désigne ici par somme des forces), tandis que  $M$ . désigne la somme des momens des forces.

Si l'on prend donc sur la ligne  $TCB$  une longueur égale à  $ct$ , on aura le centre d'oscillation du corps donné &  $ct$  fera le pendule simple qui fera ses oscillations de même amplitude dans le même-tems que le corps donné fera les siennes.

Si l'arc  $ca$  est fort petit, de sorte qu'il soit censé se confondre avec l'ordonnée  $cn$ , on a le sinus total, ou  $1 : ct : \sin. ct n : cn = ca$ , ou  $\sin. ct n = \frac{ca}{ct}$ , on a de plus  $\frac{qr}{tq} = \frac{cb}{ct}$ ; mais

dans le pendule simple,  $M' = p \cdot ct$ ; donc en substituant ces valeurs dans l'équation  $\frac{qr}{tq} = \frac{p \cdot ct \cdot \sin. ct n}{M'}$ , on aura  $\frac{cb}{ct} = \frac{p \cdot ca}{p \cdot ct}$ ; donc  $p \cdot cb =$

$\frac{p \cdot ca}{ct}$ . De même si on suppose que le pendule parte du point  $b$  toujours fort proche de la verticale  $tn$  & qu'il décrive dans un tems infiniment petit l'arc  $bf$ , on aura  $p \cdot bf = \frac{p \cdot ba}{ct}$ ; donc  $\frac{p \cdot ca}{ct} : \frac{p \cdot ba}{ct} :: p \cdot cb : p \cdot bf :: cb : bf$ ; or  $\frac{p \cdot ca}{ct}$  &

$\frac{p \cdot ba}{ct}$  désignent les forces qui font parcourir au corps  $p$ , les espaces  $cb$ ,  $bf$ , & ces forces sont évidemment proportionnelles à ces espaces; donc ces espaces sont parcourus en tems égaux. Il en est de même pour tous les autres élémens correspondans des arcs totaux  $ca$ ,  $ba$ ; donc les oscillations d'un même pendule qui décrit des arcs  $ca$ ,  $ba$  fort petits, quoique inégaux, se font en tems égaux.

REMARQUE I. Le centre d'oscillation étant le même que celui de percussion, il est visible que la seconde méthode qu'on a employée pour trouver le centre de percussion est la seule exacte.

§ 2. REMARQUE II. Nous venons de dire que le centre d'oscillation étoit le même que celui de percussion, afin que les commençans ne soient pas obligés d'en aller chercher ailleurs la démonstration; soient supposés deux corps A & B (fig. 34) assez petits pour qu'on puisse les considérer comme des points placés dans le plan BMA qui fait ses oscillations autour d'un axe  $t$  qui lui est perpendiculaire. Soit supposée une ligne  $tCm$  qui passe par le centre de percussion cherché C, je tire les lignes  $Ag$ ,  $Bm$  respectivement perpendiculaires aux lignes  $tA$  &  $tB$ , les lignes  $Ap$  &  $Bx$  perpendiculaires sur  $t m$ , & du point C les lignes  $Cg$ ,  $CM$  respectivement perpendiculaires sur  $Ag$ ,  $Bm$ . Cela posé,  $Ag$  étant la direction du mouvement du corps A,  $mB$  celle du mouvement du corps B, il est visible que si les forces des corps, c'est-à-dire, les produits de leurs masses par leurs distances à l'axe  $t$ , sont en raison inverse des distances  $Cg$ ,  $CM$  du point C à leurs direc-

rions , les forces par rapport au point C seront  
 égales , & on pourra les considérer comme réunis  
 dans ce point qui sera le centre de percussion.  
 Soit  $tA = a$  ,  $tp = b$  ,  $tB = c$  ,  $tx = D$  ,  
 $tC = n$ . Les triangles  $tAp$  &  $tAf$  ,  $Cgf$  &  $tBx$  ,  
 $tBm$  &  $CMm$  donneront 1°.  $tp : tA :: tA : tf$   
 $= \frac{a^2}{b}$ . 2°.  $tx : tB :: tB : tm = \frac{cc}{D}$  ; donc  $fC$   
 $= n - \frac{aa}{b}$  , &  $mC = \frac{cc}{D} - n$ . 3°.  $tA : tp :: Cf$   
 $: Cg = \frac{b \cdot n - aa}{a}$ . 4°.  $tB : tx :: Cm : CM =$   
 $\frac{cc - D \cdot n}{c}$  ; donc si  $p$  &  $q$  représentent les masses des  
 corps A & B , on aura  $tA \cdot p = a \cdot p$  &  $tB \cdot q = c \cdot q$  ,  
 & parce que les forces de ces corps , par rapport  
 au point C , doivent être en raison inverse des  
 lignes  $Cg$  ,  $CM$  , on a la proportion  $a \cdot p : c \cdot q ::$   
 $CM = \frac{cc - D \cdot n}{c} : Cg = \frac{b \cdot n - aa}{a}$  ; donc  $p \cdot n b$   
 $- aap = q \cdot cc - Dnq$  , ou  $p \cdot b \cdot n + D \cdot q \cdot n$   
 $= aap + q \cdot cc$  ; donc  $n = \frac{aap + cc \cdot q}{b \cdot p + D \cdot q}$  , c'est-  
 à-dire , que la distance  $tc$  du centre de percus-  
 sion à l'axe de balancement  $t$  se trouve en di-  
 visant la somme des produits de la masse de  
 chaque corps multipliée par le carré de sa  
 distance par rapport à l'axe de balancement ,  
 par la somme des forces , ou par la somme  
 des produits des masses multipliées par la distance  
 comprise entre l'axe de balancement & la per-  
 pendiculaire menée du centre de chaque corps.

cule A & B à la ligne  $\tau C$  qui dans les corps réguliers passe par le milieu de tous les élémens.

On voit donc que le centre de percussion est le même que celui d'oscillation. Si les points A & B n'étoient pas supposés dans le même plan, on supposeroit que la ligne  $\tau m$  représente un plan qui passe par le point C de percussion, que les lignes Ap, Bx représentent les distances des points A & B par rapport à ce plan, & l'on auroit évidemment la même formule; mais les lignes désignées par b & D seroient dans le plan dont on vient de parler. Si on conçoit maintenant que le point C représente la projection d'une ligne perpendiculaire à la ligne  $\tau m$  perpendiculaire à l'axe  $\tau$  de balancement, & qui passe par le point C, & que de plus cette ligne soit située dans le plan dont on vient de parler, il est visible que les momens des forces des corps A & B seront égaux par rapport à cette ligne, & qu'il seront les mêmes que si la position de cette ligne restant la même, tous ces corps étoient transportés sur le plan dont on vient de parler, chacun dans le point déterminé par une perpendiculaire tirée de chaque corps ou point (car on considère ici ces corps comme des points) à ce plan: or alors le centre de percussion se trouveroit évidemment sur une ligne  $\tau m$  qui passeroit par le centre de gravité de ces corps; donc il s'y trouvera de même que les corps oscillans soient réguliers ou irréguliers; donc dans la recherche des centres de percussion ou d'oscillation on doit employer la seconde méthode & non la première.

53. LEMME. Si un corps A (fig. 35) reçoit à la fois deux impulsions représentées par les droites AB & AD,

*il parcourra la diagonale AC du parallelogramme ABCD, dans le même tems qu'il auroit parcouru l'un des deux côtés AB, AD, s'il n'avoit reçu qu'une des deux impulsions dont on vient de parler.* En effet par l'impulsion AB, si elle agissoit seule, le mobile A parcourroit en s'éloignant de AD selon une direction parallèle à DC une ligne  $= DC$ ; mais par la seule impulsion AD il s'éloigneroit de AB dans le même-tems, en parcourant dans une direction parallèle à BC une ligne égale à BC; donc par l'action combinée des deux impulsions, il doit parvenir en C: car de cette maniere il aura satisfait aux deux impulsions en même-tems autant que cela se peut. Mais aussi-tôt que le mobile A a reçu les deux impulsions simultanées dont on vient de parler, il doit se mouvoir dans une ligne droite; donc il doit décrire la diagonale AC dans le tems qu'il auroit parcouru l'un des côtés AD ou AB, s'il eût reçu une seule impulsion. Cette proposition est d'ailleurs une vérité d'expérience connue depuis long tems.

**COROLLAIRE.** Donc la force composée qui résulte des deux forces composantes AB, AD, peut être exprimée par la diagonale d'un parallelogramme, dont AB & AD sont deux côtés contigus; & réciproquement la force composée AC peut se décomposer en AB & AD; de maniere que si le corps A, après avoir reçu la force AC, vient à rencontrer aussi-tôt un obstacle selon la direction AB qui lui ôte la force AB, il se mouvera dans la direction & avec la force AD.

**54. PROBLEME.** Dans quel cas doit-il y avoir équilibre dans le levier? Soient deux lignes ou rayons inflexibles d'égale longueur CB, CF (fig. 36) mobiles autour du centre C, & poussées par des forces égales BE, FH dans des directions perpendiculaires à ces rayons, afin qu'il y ait équilibre entre ces forces. Qu'on mène la ligne DFK perpendiculaire sur BC prolongée, & qu'on acheve le parallelogramme FOHK; la force FH pourra se décomposer en deux autres FO, FK, dont la première agissant dans la direction FC, ne sauroit contribuer au mouvement du rayon autour du point C. Mais les triangles rectangles

semblables FKH, DFC donnent  $DC : FC :: FH : FK = \frac{FC.FH}{DC} = \frac{BC.BE}{DC}$ . Ainsi les forces parallèles BE, FK seront en équilibre si l'on a  $BE : FK :: DC : BC$ .

COROLLAIRE I. Si l'on prolonge la ligne KFD de manière qu'elle aille rencontrer en A un rayon CA, il est évident que la même force FK agira avec le même avantage pour faire tourner le plan FACB autour du point fixe C dans quelque point de la droite FA qu'elle soit appliquée. Si donc on imprime aux rayons inflexibles inégaux CB, CA qu'on suppose joints ensemble & mobiles autour du centre C, des forces BE, AL en raison inverse des distances DC, BC au centre C de mouvement ; ces forces seront en équilibre.

COROLLAIRE II. Ainsi toute l'action que la force AL exerce pour faire tourner autour du centre C, la verge inflexible ACB sera exprimée par  $AL.DC$ , & BE.BC sera l'effort de la force BE ; & si A & B sont des corpuscules (dont les pesanteurs soient proportionnelles aux masses), les actions dont on vient de parler seront exprimées par  $A.DC$  &  $B.BC$ . Ainsi ces actions seront en général en raison composée des masses & des distances à l'axe du mouvement qui est une ligne passant par le centre C & perpendiculaire au plan FAB.

COROLLAIRE III. Si la puissance BE est à la puissance AL dans un plus grand rapport que  $DC : BC$ , le point B commencera à se mouvoir dans la direction de la puissance BE, & le point A sera mu dans un sens opposé. Ceci sert à expliquer l'artifice du levier & de l'axe dans le tour : car dans ces machines la puissance motrice est appliquée à une distance de l'axe du mouvement d'autant plus grande que la résistance qu'il faut vaincre est plus grande. La théorie du coin peut aussi se déduire de ce qu'on vient de dire : car la force que le marteau exerce selon la longueur du coin AC (fig. 37-) est à la force perpendiculaire à la surface



CB qu'on veut diviser comme  $AC : AD$ , ou comme  $BC : AB$ , c'est-à-dire, comme le côté du coin est à la base. La *vis* n'étant autre chose qu'une espece de coin mis en mouvement par un levier, ses effets s'expliquent par les mêmes principes; mais les poulies peuvent se rapporter à l'axe dans le tour.

COROLLAIRE IV. Toute la force effective qui agit pour faire tourner la verge inflexible ACB (fig. 36) autour du centre C, sera évidemment exprimée par BE. BC — AL. DC; & si cette verge commence à se mouvoir, le mouvement angulaire de chacun de ses points sera le même, & leur vitesse sera proportionnelle à leur distance au point C, c'est-à-dire, que le point A aura d'autant moins de vitesse que la distance DC sera plus petite, ou (ce qui revient au même) que la force AL sera plus grande. Ainsi dans toutes les machines on perd du côté du tems ce qu'on gagne du côté des forces & réciproquement; de sorte que plus la force est petite, plus long-tems elle doit agir pour produire un certain effet par le moyen d'une machine.

*Du mouvement de rotation & de projection.*

55. SI un corps est divisé par un plan BTZ (fig. 38) en parties égales, semblables & semblablement situées de chaque côté, & qu'on imprime à ce corps une force dont la direction soit dans ce plan, sans cependant passer par son centre de gravité G; ce corps recevra deux mouvemens, l'un de projection & l'autre de rotation, autour d'un axe perpendiculaire au plan, & passant par le point G. Il est en effet évident que si l'on imprime au corps dont il s'agit une force qui passe par le point H toutes les particules du corps, choqué ne pourront pas acquérir des mouvemens parallèles à la ligne selon laquelle s'est faite l'impulsion. Car le mouvement produit par le choc peut évidemment être détruit par une force égale & contraire qui agiroit sur le point H. Mais si tous les élémens du corps avoient des mouvemens parallèles, & que par une force imprimée au point H ce point restât en repos, à cause des forces inégales qui agiroient du côté de HT & de

HB, le mouvement de toutes les particules ne sauroit être anéanti, & de-là on tire le théorème suivant.

**THÉOREME.** *Si la direction d'une force imprimée à un corps ou à un système de corps ne passe pas par son centre de gravité; tous les élémens qui composent le corps ou le système des corps ne pourront pas recevoir des mouvemens parallèles.*

Maintenant si l'impulsion se fait selon la direction du plan BTZ, il est visible que ce plan & toutes les lignes BGT situées dans ce plan seront toujours dans un même plan immobile; & parce que la ligne BGT ne reçoit pas un mouvement parallèle, elle doit converger vers un point C situé dans ce plan immobile, ou ce qui revient au même, le corps doit commencer à tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan immobile & passant par le point C. Qu'on divise donc ce corps en élémens prismatiques parallèles à cet axe de rotation, il est évident que les particules de chacun de ces élémens auront une vitesse commune proportionnelle à leur distance à l'axe de mouvement, de manière que la vitesse du centre de gravité G étant supposée  $= u$ , la vitesse d'un autre point quel-

conque P sera  $= \frac{CP \cdot u}{CG}$ , & sa direction PF sera perpendiculaire à CP.

Décomposons maintenant cette vitesse en deux autres, dont l'une  $\frac{CP \cdot u}{CG} \cdot \frac{HF}{PF} = \frac{PH \cdot u}{CG}$  ait une direction parallèle à l'axe TB qui passe par le centre de gravité & l'axe de rotation, la seconde  $\frac{CH \cdot u}{CG} = u + \frac{GH \cdot u}{CG}$  dans la direction PH perpendiculaire au même axe. Si l'on mène PK perpendiculaire à PG, les deux vitesses  $\frac{PH \cdot u}{CG}$ , &  $\frac{GH \cdot u}{CG}$ , ou  $\frac{GP \cdot u}{CG} \cdot \frac{HK}{PK}$ , &  $\frac{GP \cdot u}{CG} \cdot \frac{PH}{PK}$  donne-

ront une vitesse composée  $\frac{GP \cdot u}{CG}$  dans la direction

PK. C'est pourquoi lorsque les parties du corps commenceront à tourner autour de l'axe de rotation dont nous venons de parler, elles recevront un mouvement

doublé  $u + \frac{GP \cdot u}{CG}$ , l'un commun au centre de gravité, & l'autre proportionnel à la distance de chaque particule P a ce même centre de gravité. Ce second mouvement qui tend à faire tourner autour du point G les parties également distantes de ce centre avec des vitesses égales, ne sauroit affecter le mouvement commun, & c'est pourquoi tout le corps avancera en ligne droite avec le mouvement commun, tandis qu'il tournera en même-tems autour d'un axe perpendiculaire au plan BTZ, & passant par le centre de gravité G. De sorte que le point C dont la vitesse circulaire est la même que la vitesse progressive du centre de gravité G, décrira la cycloïde vulgaire à chaque révolution du corps autour du centre G, & l'espace parcouru par G à chaque révolution sera égal à la circonférence du rayon CG.

COROLLAIRE I. Le point O auquel il faut appliquer la force impulsive nécessaire pour commencer à faire tourner le mobile autour du point C est évidemment le centre de percussion du corps considéré comme suspendu en C: car si l'on imprimoit en O une force égale & opposée, le mobile resteroit en repos; ainsi selon ce que nous avons dit ci-dessus (52) le point O sera aussi le centre d'oscillation. Dans un corps sphérique dont le rayon est  $= a$  suspendu à la distance  $a + b$  de son centre de gravité, le centre

de percussion est (49)  $= \frac{7aa + 10ab + 3bb}{5a + 3b} = a + b$

+  $\frac{1}{5} \cdot \frac{aa}{CG}$ , en faisant  $a + b = CG$ ; donc  $OG = \frac{1}{5} \cdot \frac{aa}{CG}$ .

COROLLAIRE II. Si nous désignons le rapport du rayon à la circonférence par  $1 : p$ , le tems périodique de la révolution d'une planète par T, le tems d'une révolution sur son axe par  $\epsilon$ , & que R &  $\epsilon$  représen-

tent les rayons de l'orbite & de la planète, le centre de gravité de la planète que je suppose sphérique & homogène, parcourra pendant une révolution diurne

l'espace  $\frac{p \tau R}{T}$ ; car l'on a  $1 : p :: R : \text{à la circonférence de l'orbite} = p R$ . Mais  $T : p R :: \tau : \frac{p R \tau}{T}$ ,

espace parcouru pendant une révolution diurne. De plus CG est le rayon d'un cercle dont la circonférence est égale à l'espace que le centre de gravité G parcourt tandis que le mobile fait une révolution autour du

point G; donc on aura  $1 : p :: CG : \text{à l'espace} \frac{p \tau R}{T}$ ;

ainsi  $CG = \frac{\tau R}{T}$ ; & enfin  $OG = \frac{1}{T} \cdot \frac{r r}{CG} = \frac{2 T r r}{5 \tau R}$ .

COROLLAIRE III. Puisque par rapport à la Terre l'on a à très-peu près  $\tau : T :: 1 : 365 \frac{1}{4}$ ; si on suppose la parallaxe moyenne du Soleil de  $9''$ , ce qui donne le rayon  $r$  de la Terre est à la distance moyenne  $R$  de la Terre au Soleil comme le sinus de  $9''$  est au sinus total, ou  $r : R :: \sin. 9'' : 1 :: 1 : 22918$ , on aura  $CG = \frac{22918 \cdot r}{365 \frac{1}{4}}$ , c'est-à-dire, environ  $62 \frac{3}{4}$  demi-diamètres

terrestres. Donc  $OG = \frac{r \cdot r}{157}$ ; ainsi en appliquant

l'impulsion primitive à cette distance du centre de la Terre, il en auroit résulté le rapport actuel du mouvement diurne & annuel. A l'égard de la Lune son mouvement diurne autour de son axe s'achevant dans le même tems que son mouvement périodique autour

de la Terre, l'on aura  $CG = \frac{\tau R}{T} = R$  (\*); mais le

---

(\*) Environ 60 demi-diamètres terrestres.

rayon  $r$  de la Lune est à celui de la Terre comme 100 :

365 ; donc  $CG = 219. r$ , &  $OG = \frac{2. r}{1095}$ . De même

si les rayons de Jupiter & de la Terre sont entr'eux comme 10 : 1, les distances au Soleil comme 52 : 10, les tems périodiques autour du Soleil comme 12 : 1, le tems des révolutions autour des axes comme 10 : 24, & qu'on fasse le rayon de Jupiter  $= r$ , on aura  $CG$

$= \frac{9. r}{8}$  à peu-près, &  $OG = \frac{16}{41. r}$ . Et parce que les

rayons de la Terre & de Mars sont dans le rapport de 5 : 3, leurs distances au Soleil comme 2 : 3, les tems des révolutions périodiques comme 1 : 2, & les tems des révolutions autour de leurs axes à peu-près égaux, si on fait le rayon de Mars  $= r$ , on aura  $CG =$

78.  $r$ , &  $OG = \frac{r}{195}$ .

56. PROBLÈME. Si on imprime à un corps quelconque une force qui commence à le faire tourner autour d'un point donné, trouver la somme des momens de toutes les particules de ce corps, ayant égard à leur masse, leur vitesse, & leur distance à l'axe de rotation. Concevons qu'un corps  $M$  avec la vitesse  $U$  & la quantité de mouvement  $MU$  agisse contre un autre corps  $O$  (fig. 39), de manière que le corps choqué commence à tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan  $PCO$ , & passant par le point  $C$  ; il est visible que si on imprimoit au point  $O$  une force contraire &  $\Rightarrow MU$ , tout le mouvement de rotation seroit détruit. Mais supposons que le mouvement de rotation est déjà commencé, & appelions  $P$  un élément prismatique situé en  $P$  & parallèle à l'axe de rotation ; si nous faisons  $= u$  la vitesse d'un élément situé à la distance 1 de l'axe de rotation,  $PC. u$  sera la vitesse de rotation &  $P. PC. u$  sera le mouvement de l'élément  $P$  dans la direction  $PK$  perpendiculaire à  $PC$ . Supposons que du centre  $C$  on ait décrit avec le rayon  $CO$  un arc circulaire  $OF$  qui coupe  $PK$  en  $F$ , la force  $P. PC. u$  pourra être supposée appliquée en  $F$ , & décomposée en deux autres,

dont l'une agira dans la direction du rayon FC, la direction de l'autre étant perpendiculaire au même rayon. Cela posé, la force totale sera à la force perpendiculaire au rayon comme  $FK : FH :: FC : PC$ , ou ce qui revient au même, la force perpendiculaire sera =

$$\frac{P \cdot \overline{PC}^2 \cdot u}{OC}.$$

Or selon ce qu'on a dit ci-dessus, cette

force agira de la même manière pour faire tourner le mobile, soit qu'on l'applique en F ou en O à la même distance du centre C dans des directions perpendiculaires aux rayons FC, OC. Ainsi le mouvement de rotation ne pourra être détruit qu'en appliquant au point O une force contraire & égale à la somme de tous

$$\text{les } \frac{P \cdot \overline{PC}^2 \cdot u}{OC}; \text{ or cette somme est } = \frac{S \cdot P \cdot \overline{PC}^2 \cdot u}{OC}; \text{ ainsi}$$

$$MU \text{ doit être } = \frac{S \cdot P \cdot \overline{PC}^2 \cdot u}{OC}. \text{ Donc } M \cdot OC \cdot U =$$

$S \cdot P \cdot \overline{PC}^2 \cdot u$ ; & le moment de toute la force imprimée doit être égal à la somme des produits de chaque élément par la distance PC & la vitesse PC.u.

**COROLLAIRE.** Les points O & P ne changeant pas, si l'on conçoit que le point C s'éloigne continuellement, la raison de PC : OC approchera de celle de 1 : 1 plus près qu'aucune quantité donnée, & lorsqu'à la fin on supposera  $PC = OC$ , les mouvements des points O & P auront des directions parallèles, & le mouvement de rotation se changera en mouvement de progression. Si l'on suppose  $CP = 1$ , la vitesse du point P sera  $= u$ , & l'on aura  $M \cdot U = S \cdot P \cdot u$ ; de sorte que comme dans les corps qui se choquent sans obstacle, il y a la même quantité de mouvement avant & après le choc, de même dans les corps qui ont un mouvement de rotation il y a toujours la même quantité des momens dans le sens que l'on prend ici ce terme.

**57. PROBLEME.** Déterminer le mouvement de projection & celui de rotation lorsqu'un corps est mis en mouvement par une force F qui agit sur le point O (fig. 38). Soit

$u$  la vitesse avec laquelle le centre de gravité  $G$  commence à tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan  $BTZ$  & passant par le point  $C$  ;  $\frac{CP \cdot u}{CG}$  fera la vitesse de rotation d'un élément prismatique situé en  $P$ ,

& son moment sera  $\frac{P \cdot \overline{CP}^2 \cdot u}{CG}$ , & par le problème pré-

cédent,  $F \cdot OC$  sera  $= \frac{S \cdot P \cdot \overline{PC}^2 \cdot u}{CG}$ . Mais parce que selon

ce qu'on a dit ci-dessus (55), le point  $O$  est le centre de percussion du corps supposé suspendu en  $C$ , on

aura  $OC = \frac{S \cdot P \cdot \overline{CP}^2}{CG \cdot M}$ ,  $M$  désignant la masse du

mobile. Donc  $\frac{F}{M} = u$ , &  $F = M \cdot u$ . Mais  $u$  étant la

vitesse avec laquelle le centre de gravité commence à tourner autour du point  $C$ , est évidemment la vitesse avec laquelle ce centre & toutes les particules du mobile se meuvent en droite ligne; donc la vitesse avec laquelle le centre de gravité d'un corps frappé dans un point  $O$  se meut dans la direction de la force impulsive sera la même que si toute la force  $F$  avoit été appliquée en  $G$  dans une direction parallèle à celle qui agit en  $O$ .

Maintenant si l'on appliquoit en même-tems aux points  $O$  &  $G$  deux forces égales  $F$  &  $-F$  avec des directions contraires, mais parallèles; par la première force toutes les particules du mobile acquerroient la vitesse commune  $u$  de projection, & de plus la vitesse  $\frac{GP \cdot u}{CG}$  de rotation autour d'un axe perpendiculaire au

plan  $BTZ$  & passant par le centre  $G$  de gravité (55): mais la force  $-F$  produiroit la vitesse commune  $-u$  qui détruiroit la vitesse de projection. Ainsi le centre de gravité demeureroit fixe, & il ne resteroit que la vitesse

de rotation  $\frac{GP.u}{CG}$  proportionnelle à la distance au centre de gravité, & tendant de part & d'autre en sens contraires. De manière que le mouvement de rotation sera le même que si le centre de gravité restant fixe, toute la force étoit employée à faire tourner le corps, & les forces centrifuges des élémens du corps seront proportionnelles à leurs distances à l'axe de rotation (\*).

58. PROBLEME. *Trouver la vitesse de rotation d'une sphère autour d'un diamètre perpendiculaire à un autre diamètre à l'extrémité duquel ou imprimerait une force (fig. 40). Si le plan d'un cercle perpendiculaire à l'axe & passant*

(\*) Quoique nous ayons parlé assez au long des forces centripètes & centrifuges dans la seconde édition de nos institutions, je crois devoir expliquer ici ce que c'est que la force centrifuge dans un cercle. Si un mobile A (fig. 41) parcourt un arc infiniment petit AM d'un cercle AMF, il est visible que la force tangentielle, c'est-à-dire, qui tend à lui faire parcourir la tangente AB fait effort pour l'éloigner du centre C de la quantité  $BM = Bt$ . Car à cause de BM que je suppose parallèle à AC & de l'arc AM infiniment petit, les angles ACB, & B M sont égaux & infiniment petits; ainsi les angles B t M, B M t ne diffèrent que d'une quantité inassignable sont égaux, aussi-bien que les côtés B t & BM qui leur sont opposés. Mais B t est la quantité dont la force tangentielle tend à éloigner le mobile du centre C du cercle; donc pendant que le mobile parcourt l'arc AM, il fait pour s'éloigner du centre C un effort exprimé par BM: c'est cet effort que j'appelle *force centrifuge*. La force centripète au contraire est un effort qui ramène le mobile vers la circonférence, & qui l'empêche de suivre la tangente AB. Cela posé, il est visible que si deux mobiles A & a parcourent deux cercles différens, & deux arcs semblables dans le même-tems, les forces centrifuges BM, b m, ou AP & ap seront dans les rapports des rayons AC & a C, puisqu'elles sont représentées par les sinus versés des arcs infiniment petits & semblables AM. & a m.

par



par le centre, est supposé tourner de maniere qu'à la distance 1 du centre la vitesse soit  $= u$ , le point  $b$  situé à une distance  $x$ , aura une vitesse de rotation désignée par  $x$ . Si  $p$  exprime la circonférence du rayon 1,  $p x$  sera la circonférence du rayon  $x$ , multipliant cette circonférence par le quarré  $x x$  de la vitesse du point  $b$ ,  $p x^3$  sera le moment de cette circonférence,  $dx. p. x^3$  la différence des momens de l'aire du cercle dont le rayon est  $x$ , &  $\frac{p x^4}{4}$  le moment de cette aire. Si donc

on conçoit que le demi-cercle TCB (fig. 40) engendre en tournant autour de TB, une sphère au point L de laquelle on imprime la force  $F$ , & qu'on fasse le rayon de cette sphère  $= r$ , GP  $= z$ , PP  $= az$ , le moment de l'élément correspondant à PP sera  $=$

$$\frac{1}{4} p. PM. PP = \frac{p}{4} \cdot dz (r^4 - 2r^2 zz + z^4), \text{ \& le}$$

moment de l'hémisphère  $= \frac{1}{11} p. r^5$ . Ainsi le moment de la sphère entière sera  $= \frac{2}{11} p. r^5$ . Si l'on fait  $= u$  la vitesse de rotation du point L situé sur l'équateur, afin que la vitesse d'un point situé à la distance 1 du centre soit  $= \frac{u}{r}$ , & qu'on substitue cette quantité à

la place de l'unité de vitesse, le moment de la sphère deviendra  $\frac{4 p r^4 u}{15}$ , quantité à laquelle on doit égaler

le moment  $F. r$  de la force imprimée, pour avoir  $u =$   
 $\frac{15. F}{4. p. r^3} = \frac{5. F}{2. m}$ , en écrivant  $m$  au lieu de  $\frac{2}{11} p. r^3$   
 qui désigne la solidité de la sphère.

COROLLAIRE I. Si un sphéroïde aplati vers les pôles T & B, dont le demi-diamètre de l'équateur soit  $= a$ , tourne autour de l'axe TB, les momens des cercles parallèles qu'on peut décrire dans la sphère & dans le sphéroïde avec les rayons PM, PN seront entr'eux comme  $PM^4 : PN^4 :: GL^4 : GQ^4 :: r^4 : a^4$ .

Tome V.

Z

Ce rapport étant le même pour toutes les sections correspondantes perpendiculaires à l'axe, le moment du sphéroïde sera  $= \frac{4}{15} p. a^4. u$ ; & si le point Q de l'équateur a une vitesse  $= v$ , en écrivant  $\frac{r. v}{a}$  au lieu de  $u$ , le moment du sphéroïde deviendra  $\frac{4}{15} p. a^3. r. v$ .

COROLLAIRE II. Si nous concevons que la force F est imprimée au point Q de l'équateur du sphéroïde au lieu d'être appliquée au point L de l'équateur de la sphère, on aura de même  $F. a = \frac{4}{15} p. a^3. r. v$ , &

$v = \frac{15. F}{4 p. a^2. r}$ : ainsi les vitesses angulaires que la même force peut produire dans le sphéroïde aplati & dans la sphère, en la supposant appliquée successivement à l'équateur de ces solides, seront entr'elles comme  $\frac{15. F}{4. p. r^3} : \frac{15. F}{4. p. a^2. r} :: a^2 : r^2$ ; c'est-à-dire, en raison doublée du grand axe du sphéroïde au petit.

#### *Du moment d'Inertie.*

LE moment d'inertie n'est autre chose que la somme des élémens d'un corps multipliés chacun par le quarré de sa distance à un axe. Comme la recherche de ces momens peut être très-utile dans les Sciences Physico-Mathématiques, nous croyons devoir en dire quelque chose.

59. PROBLÈME. Si une ligne droite inflexible qui peut tourner autour d'un point C (fig. 42) porte un corps B qui a de l'inertie, mais que nous supposons sans gravité, & que cette droite par l'action d'une puissance que nous appellerons M appliquée en A, tourne autour du point C, on demande la force accélératrice que reçoit le corps B en décrivant l'arc Bb. Si la force M étoit appliquée au corps B, sa force accélératrice seroit  $= \frac{M}{B}$ ; mais parce

que la force  $M$  est appliquée en  $A$ , on trouvera la force motrice du corps  $B$  en faisant  $BC : AC :: M : \frac{CA \cdot M}{BC}$ . C'est pourquoi la force accélératrice du corps

$B$  sera  $= \frac{CA \cdot M}{BC \cdot B}$ . Mais  $CA \cdot M$  est le moment de la puissance ; ainsi la force accélératrice avec laquelle le corps  $B$  tourne autour du point  $C$  est comme le moment de la force motrice divisée par le produit de la masse  $B$  & de sa distance au centre  $C$  du mouvement.

60. PROBLEME. Trouver une masse  $A$  qui substituée à la place de la masse  $B$  à la distance  $AC$  fait décrire à la ligne  $AC$  le même angle  $Aa$  que lui peut faire décrire le corps  $B$ . Si la force motrice à la distance  $AC$  est supposée  $= M$ , la force accélératrice du corps  $A$  sera  $= \frac{M}{A}$ , celle du corps  $B$  étant  $= \frac{CA \cdot M}{B \cdot CB}$ .

Mais afin que le corps  $A$  décrive le même angle que le corps  $B$ , leurs forces accélératrices doivent être entre elles comme les arcs  $Aa$ ,  $Bb$ . L'on aura donc

$$\frac{M}{A} : \frac{CA \cdot M}{B \cdot CB} :: Aa : Bb :: AC : BC ; \text{ donc } A \cdot \overline{AC}^2 = B \cdot \overline{BC}^2, \text{ \& } A = \frac{B \cdot \overline{BC}^2}{\overline{AC}^2}, \text{ c'est-à-dire, que cela arri-}$$

vera lorsque les masses des deux corps  $A$ ,  $B$  multipliées par le carré de leur distance au point  $C$  donneront des produits égaux.

Lorsque à la distance  $AC$  on substituera la masse  $A = \frac{B \cdot \overline{BC}^2}{\overline{AC}^2}$ , cette masse sera accélérée par la force

motrice  $M$ , de la même manière que la masse  $B$  à la distance  $CB$ .

LEMME. La force qui fait décrire un arc  $Aa$  à un

$Z$

corps A dans un tems donné, est comme la puissance motrice divisée par la masse A multipliée par la distance CA. Si nous supposons que le corps A sollicité par la puissance  $p$  décrit un arc infiniment petit Aa dans le tems

$dt$ , l'on aura  $Aa = \frac{p}{A} dt$ . Mais la force giratoire lui fait décrire l'angle ACA ou plutôt l'arc Aa qui mesure cet angle, & cet angle mesuré par un arc de cercle dont le rayon soit supposé = 1, est =  $\frac{Aa}{CA}$ . Mais  $\frac{Aa}{CA} = \frac{p}{A \cdot CA} dt$ ; ainsi pendant

le tems  $dt$  la force giratoire est comme la puissance motrice divisée par le moment de la masse.

61. PROBLÈME. Déterminer le moment d'inertie d'un corps respectivement à un axe qui passe par son centre de gravité. Supposons que la ligne AB = M (fig. 43) inflexible tourne autour de l'axe bD situé au milieu de

la ligne AB. Soit  $AC = \frac{a}{2} = CB$ ,  $CP = x$ ; chaque

particule de cette ligne ou  $dM$  peut être désignée par  $Pp = dx$ , dont le moment d'inertie est =  $x^2 dx$ . Donc le moment d'inertie de la ligne PC est =  $Sx^2 dx$ ; & le moment d'inertie de la ligne PP sera

=  $2Sx^2 dx = \frac{2x^3}{3}$ . Donc le moment d'inertie de

la ligne AB est =  $\frac{a^3}{12}$ , à cause de  $x = \frac{a}{2}$ . Mais la

masse M de la ligne ou du fil inflexible AB est =  $a$ ; donc le moment d'inertie de la ligne AB sera représentée par

$\frac{Ma^2}{12}$ .

Supposons que la figure ou la lame MARB tourne autour de l'axe AB, qui passant par le centre de gravité G, divise cette lame en deux parties égales. Soit  $AP = x$ ,  $PM = y$ ,  $Pp = dx$ ,  $n'm = dy$ ,  $PQ = z$ ,  $Qq = dz$ , &  $Qqnn = dx dz$ , le moment d'inertie de l'élément QQNN sera =  $2Sz^2 dz dx$ .

En supposant  $dx$  constant, parce que AP ne change pas par rapport à l'élément  $QNN$ , l'on a  $2 \int \zeta^2 d\zeta dx = \frac{2 \int \zeta^3 d\zeta}{3}$ ; dont l'intégrale prise de manière que l'on ait  $PQ = PM$ , ou  $\zeta = y$ , donnera le moment d'inertie de toute la partie  $MAR = \frac{2 \int y^3 dy}{3}$ . On trouvera de même que le moment d'inertie de la partie  $TBZ$  est  $= \frac{2 \int \overline{TI}^3 Ii}{3}$ , en faisant  $Ii = d.GI$ .

Si l'axe de balancement  $DC$  est perpendiculaire au premier & passe par le centre de gravité  $G$  de la lame, cet axe ne divisera pas la lame de la même manière & en parties égales & semblables, du moins dans tous les cas; c'est pourquoi il n'est pas permis de supposer  $LS = LS$ , parce que la partie  $CAD$  peut n'être pas égale & semblable à la partie  $CB\bar{D}$ . Soit  $AG = a$ , on aura  $GP = a - x$ . Mais le moment d'inertie de l'élément  $qQN$  respectivement à l'axe  $CD$  sera  $= (a - x)^2 \cdot d\zeta dx$ . C'est pourquoi le moment d'inertie de l'élément  $MmR$  sera  $= (a - x)^2 \zeta dx$ , en regardant  $\zeta$  seul comme variable. Donc ayant fait  $\zeta = MP = PR = y$ , le moment d'inertie de la partie  $CAD$  sera  $= 2 \int (a - x)^2 y dy = 2 \int \overline{GP}^2 \cdot MP \cdot d.GP$ . On trouvera de même que le moment d'inertie de la partie  $CB\bar{D}$  est  $2 \int \overline{GI}^2 IT \cdot d.GI$ , & de-là le moment d'inertie de toute la lame  $CADB$  sera  $= 2 (\int \overline{GP}^2 \cdot MP \cdot d.GP + \int \overline{GI}^2 IT \cdot d.GI)$ .

Soit enfin l'axe de balancement  $gG$  perpendiculaire au plan de la lame, le moment d'inertie de la particule  $qQN$  par rapport à cet axe sera  $= \overline{GQ} \cdot qQN = (\overline{GP}^2 + \overline{QP}^2) \cdot qN = [(x - a)^2 + \zeta^2] d\zeta dx$ . Donc en supposant  $\zeta$  seul variable, le moment de l'élément

$Z$

QNNQ est  $= 2 \left( \frac{z^3}{3} + \overline{x - a. z}^2 \right) dx$ , & suppo-

sant  $z = MP$ , le moment d'inertie de l'élément  $MmrR$

sera  $= 2 \left( \frac{y^3}{3} + \overline{x - a. y}^2 \right) dx = \left( \frac{\overline{MP}^3}{3} + \overline{GP. MP}^2 \right) dx$ .

Donc le inoment d'inertie de la partie de la lamé CAD

est  $= 2 S \left( \frac{\overline{MP}^3}{3} + \overline{GP. MP}^2 \right) dx$ .

Sil s'agit de la partie CBD, son moment d'inertie

sera  $= 2 S \left( \frac{\overline{TI}^3}{3} + \overline{TI. GI}^2 \right) d. GI$ . C'est pourquoi

le moment d'inertie de toute la lame est  $= 2 S \left( \frac{\overline{MP}^3}{3} + \overline{GP. MP}^2 \right) dx + 2 S \left( \frac{\overline{TI}^3}{3} + \overline{GI. TI}^2 \right) d. GI$ .

Il est donc aisé de voir que les momens d'inertie par

rapport aux axes AB & CD, favoir  $2 S. \frac{\overline{PM}^3}{3} dx +$

$2 S. \overline{GP. PM} dx + 2 S. \frac{\overline{TI}^3}{3} d. IG + 2 S. \overline{IG. TI}^2 d. IG$

sont égaux au moment d'inertie de la lame par rapport

à l'axe perpendiculaire à son plan.

Si on demandoit le moment d'inertie d'un fo-

lide engendré par la révolution de la figure ACB

aurour de l'axe AGB, on remarqueroit que pendant

la révolution du plan ACB, la particule QqNN

décrir une espèce d'anneau dont la solidité est  $= 2 c z. dz dx$ , en faisant 1 : c le rapport du rayon à la

semi-circonférence. Multipliant cette quantité par  $z^2 =$

$\overline{PQ}^2$ , S.  $2 c z^3 dz. dx = \frac{c z^4 dx}{2}$  (en supposant  $dx$  con-

stant) seroit le moment de tous les anneaux décrits par l'élément  $PM$  par rapport à l'axe  $AB$ , & le moment d'inertie du solide seroit  $= S. \frac{c \tau^4 d x}{2}$  (en suppo-

sant  $\tau = PM = y) = S. \frac{c \overline{PM}^4}{2} d. AP.$

62. PROBLÈME. Trouver le moment d'inertie d'un rectangle  $A E F$  (fig. 45) dont le centre de gravité  $G$  est au milieu de la figure. Soit l'axe  $AB = a$ , l'axe  $CD$

$= EN = b$ ; donc  $AG = \frac{a}{2}$ ,  $EB = \frac{b}{2} = MP = y.$

Le moment d'inertie par rapport à l'axe  $AB$  sera  $= 2S. \frac{y^3 d x}{3} = 2S. \frac{b^3 d x}{24} = \frac{b^3 x}{12} = \frac{b^3 a}{12}$ , en faisant

$x = a$ . Le moment d'inertie, par rapport à l'axe  $CD$ ,

sera (par le problème précédent)  $= 2S. \overline{GP}^2. PM. d. PG$

$+ 2S. \overline{GT}^2. IT. d. IG = 4S. \overline{GP}^2. PM. d. PG$ , parce que la partie de la gauche est égale & semblable à celle de la droite. Soit  $GP = x$ , le moment cherché sera

$= 4S. \frac{b x^2 d x}{2} = \frac{2 b x^3}{3} = \frac{b a^3}{12}$ , en supposant  $x =$

$\frac{a}{2}$ . Mais le moment d'inertie par rapport à l'axe  $a G g$

perpendiculaire au plan du rectangle doit être égal (voyez le problème précédent) à la somme des moments dont nous venons de parler, c'est-à-dire, doit être  $=$

$\frac{b^3 a + b a^3}{12}$ . D'ailleurs la masse  $M$  du rectangle est  $= ab$ ;

ainsi ce moment sera  $= \frac{M}{12} (b^3 + a^3).$

63. PROBLÈME. Déterminer le moment d'inertie d'une lame  $ACBR$  supposée circulaire (fig. 44). Puisque les axes  $AB$ ,  $CD$  sont alors des diamètres égaux, & que la lame est

circulaire, les momens d'inertie par rapport à ces diamètres seront égaux. Soit  $GP=x$ ,  $GD=a$ ,  $PM=y=\sqrt{(aa-xx)}$ . Le moment d'inertie par rapport au diamètre  $AB$ , sera  $= 4 S. GP^2 PM. d. GP$  (parce que le diamètre  $CD$  divise le cercle en parties égales)

$$= 4 S. xx dx \sqrt{(aa-xx)} = 4 S. \frac{a^2 xx dx}{\sqrt{(aa-xx)}} - \frac{4 S. x^4 dx}{\sqrt{(aa-xx)}} = 2 a^4 dA \sin. \frac{x}{a} - 2 a^2 x \sqrt{(aa-xx)} - \frac{1}{2} a^4 A \sin. \frac{x}{a} + \frac{1}{2} a^2 x \sqrt{(aa-xx)}. \text{ Si } x=a,$$

l'arc  $A$  dont le sinus est  $\frac{x}{a}$  deviendra l'arc dont le sinus est  $1 =$  rayon, & le moment d'inertie par rapport à l'axe  $AB$  sera  $= \frac{ca^4}{4}$ ,  $c$  étant la demi-circconférence d'un cercle dont le rayon est  $= 1$ . Mais les momens d'inertie par rapport à l'axe  $CD$  & à l'axe  $AB$  doivent être égaux; donc leur somme  $\frac{ca^4}{2}$  sera le moment d'inertie par rapport à l'axe  $GG$  perpendiculaire au plan de la lame. Mais  $a^2 \cdot c$  est  $= M$ , masse de la lame; donc  $\frac{Maa}{2}$  exprime le moment d'une lame cir-

culaire d'une épaisseur  $= 1$ , par rapport à un axe perpendiculaire à son plan, & qui passe par son centre de gravité.

Parce qu'un cylindre est composé de pareilles lames posées les unes à côté des autres, le moment d'inertie d'un cylindre droit par rapport à son axe est  $= \frac{Maa}{2}$ ,  $a$  étant le rayon &  $M$  la masse de ce cylindre.

64. PROBLÈME. Trouver le moment d'inertie d'un globe engendré par la révolution d'un demi-cercle autour de son axe qui se sup-



pose être AB. La formule  $S. \frac{c.PM^4}{2} \cdot d. AP = \frac{c}{2} S. y^4 dx$

donne  $\frac{c}{2} S. (4axx dx - 4ax^3 dx + x^4 dx)$ , à cause

de  $PM = 2ax - xx$  & de  $AB = 2a$ , ou  $c \left( \frac{2ax^3}{3} \right.$

$\left. - \frac{ax^4}{2} + \frac{x^5}{10} \right) = \frac{8ca^5}{15}$ , en supposant  $x = 2a$ .

Mais la masse M de la sphère est  $= \frac{4}{3} ca^3$ . Donc le moment de la sphère respectivement à l'axe AB est  $= \frac{2Ma^2}{5}$ .

Il est maintenant facile d'avoir le moment d'inertie d'un globe creux HMFDBN (fig. 46). Soit  $GH = a$ ,  $GB = b$ , le moment d'inertie du globe supposé plein sera  $= \frac{8ca^5}{15}$ , celui du globe dont le rayon est

$= b$ , étant  $= \frac{8cb^5}{15}$ . Ainsi le moment d'inertie du globe

creux est  $= \frac{8ca^5 - 8cb^5}{15}$ .

On ne doit pas confondre la gravité avec l'inertie ; car le moment d'inertie d'un cylindre droit dont le rayon est  $= a$ , la masse  $= M$  ; & qui tourne autour de son axe est  $= \frac{Ma^2}{2}$ . Si donc on appliquoit à l'extrémité de

son rayon GD (fig. 45) (\*) une masse N capable de vaincre l'inertie par rapport à l'axe AB, cette masse devroit être  $= \frac{Ma^2}{2} = \frac{M}{2}$ . L'inertie n'est donc

(\*) Cette figure représente la coupe du cylindre faite par un plan qui passe par son axe & par conséquent par son centre de gravité.

pas égale à la masse du corps ( qu'on peut néanmoins estimer par son poids ), quoiqu'elle soit toujours dans un rapport constant avec le poids des corps. De plus les directions de la gravité des particules des corps terrestres sont toujours supposées parallèles ; mais s'il s'agit d'un grand corps comme la Lune, par exemple, les directions de la gravité de ses parties formeront différens angles au centre de la Terre.

*De l'Attraction.*

65. PROBLÈME. Supposant l'existence d'une loi universelle d'attraction en raison inverse des carrés des distances & en raison des masses, trouver la quantité d'attraction qu'une ligne homogène AB considérée comme matérielle, exerce sur un corpuscule F placé sur son prolongement (fig. 47). Prenant la ligne FB pour asymptote, je décris l'hyperbole NC du troisième ordre désignée par l'équation  $yx^2 = a^3 = 1$  ( en faisant  $a = 1$  ),

d'où l'on tire  $y = \frac{1}{x^2}$ . Cela posé, soit  $FM = x$ ,

$Mm = dx$ ,  $NM = y = \frac{1}{x^2}$ . L'attraction de l'élément  $nNMm$  sera  $= y \cdot dx = \frac{dx}{x^2}$ , dont l'intégrale est  $-\frac{1}{x} = -\frac{a^3}{x}$ , en remettant la valeur de

1, ou l'aire  $fNMFD$  désigne l'attraction de la ligne MF. Et si  $x = FA$ , cette attraction sera  $= faAFD$ .

Si  $x = FB$  la quantité d'attraction sera  $= fCBFD$ ; donc l'attraction de la droite AB sera

$= fCBFD - faAFD = CBA = \frac{-a^3}{FB} + \frac{a^3}{FA} = \frac{-1}{FB} + \frac{1}{FA}$ , en faisant  $a = 1$ .

en faisant  $a = 1$ .

66. PROBLÈME. Supposant la même loi d'attraction, trouver la force avec laquelle une sphère  $MAB$  (fig. 48) attire un corpuscule  $b$  placé sur le prolongement de son axe. Tirez les lignes qu'on voit dans la figure, & supposons que  $C$  est le centre de la section  $AaBM$  de la sphère. Soit  $bC = a$ ,  $bP = x$ ,  $PM = y$ ,  $MC = r$ , on aura  $Pp = dx = Mn$ ,  $bM = \sqrt{x^2 + y^2}$ . L'attraction de l'arc infiniment petit  $Mm$  sera égale au produit de cet arc par  $\frac{1}{bM}$ , ou par  $\frac{1}{xx + yy}$ , & la quantité d'attraction sur le corpuscule  $b$  étant de plus en raison de sa masse sera  $= \frac{b.Mm}{xx + yy}$ . Nous dirons

en passant que cette expression désigne aussi la force attractive du corpuscule  $b$  par rapport au petit arc  $Mm$ . Maintenant le corpuscule  $b$  étant également attiré par l'arc correspondant  $NQ$ , il est visible que la force avec laquelle l'arc  $Mm$  attire le corpuscule  $b$  doit être décomposée en deux, l'une selon  $PM$ , qui est détruite par une force semblable selon  $PN$  de l'arc  $NQ$ , & l'autre  $Pb$  qui est la seule efficace. Donc en désignant la force totale de l'arc  $Mm$  par la ligne  $Mb$ , on aura  $Mb$ :

$$Pb :: \frac{b.Mm}{xx + yy} : \frac{Pb.Mm.b}{Mb(x^2 + y^2)} = \frac{x.b.Mm}{(xx + yy)^{\frac{3}{2}}}$$

Maintenant tandis que le cercle  $AMBN$  en tournant autour de l'axe  $AB$  engendre la sphère, l'arc  $Mm$  engendre une petite zone, qui (par les élémens de Géométrie) est égale au produit de cet arc par la circonférence décrite avec le

rayon  $it$  qui passe par le milieu de cet arc: or on peut supposer  $it = PM = y$ . Et par ce que les circonférences des cercles sont comme les rayons, en substituant  $Mm \propto y$  au lieu de  $Mm$ , on aura  $\frac{x \cdot b \cdot y \cdot mM}{(xx + yy)^{\frac{1}{2}}}$ , quantité proportionnelle à

l'attraction de la zone  $MmNQ$  sur le corpuscule  $b$ . Mais les triangles  $MCP$ ,  $Mnm$  ayant leurs côtés perpendiculaires sont semblables & donnent  $y : r :: dx = Mn : Mm = \frac{r \cdot dx}{y}$ ; donc l'expres-

sion précédente devient  $= \frac{r \cdot b \cdot x \cdot dx}{(xx + yy)^{\frac{1}{2}}}$ . De plus

$AP = bP + AC - bC = x + r - a$ , &  $BP = bB - bP = a + r - x$ , & par la nature du cercle  $y^2 = AP \cdot BP = r^2 + 2ax - xx - aa$ ; donc l'attraction de la zone élémentaire  $MmNQ$  sera

comme  $\frac{b \cdot r x dx}{(r^2 + 2ax - aa)^{\frac{1}{2}}}$ . Supposons  $r^2 + 2ax - aa = u^2$ , pour avoir  $x = \frac{uu + aa - rr}{2a}$ , &  $dx$

$= \frac{u du}{a}$ . Substituant ces valeurs de  $x$  & de  $dx$  dans l'expression précédente, on trouvera (en faisant

attention que  $(u^2)^{\frac{1}{2}} = u$ ) que  $\frac{x dx}{(rr + 2ax - aa)^{\frac{1}{2}}} =$

$= \frac{du}{2aa} + \frac{aadu}{2aaau} - \frac{r2du}{2aaau}$ , dont l'intégrale est

$$= \frac{u}{2aa} - \frac{aa}{2aa.u} + \frac{rr}{2aa.u} + C$$
, qui en substituant la valeur de  $u$  devient après les opérations ordinaires,  $\frac{r^2 + ax - aa}{aa \sqrt{(rr + ax - aa)}} + C$ . Donc

$$S. \left( \frac{b.r.x dx}{(rr + ax - aa)^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{b.r.(r^2 + ax - aa)}{aa \sqrt{(rr + ax - aa)}} + C.$$

Pour déterminer la constante  $C$  je remarque que l'attraction de la calotte sphérique  $MAN$  est  $= 0$  lorsque  $AP = 0$ , ou lorsque  $r + x - a = 0$ , ou lorsque  $x = a - r$ . Substituant cette valeur dans l'intégrale qu'on vient de trouver on doit avoir

$$\frac{b.r(r^2 - ar)}{aa \sqrt{(rr - 2ar + aa)}} + C = 0; \text{ donc } C = - \frac{br}{aa} \cdot \frac{(rr - ar)}{a - r} = \frac{b.r(ar - rr)}{aa(a - r)} = \frac{br^2}{aa};$$

donc l'intégrale complete sera  $= \frac{b.r^2}{aa} + \frac{b.r.(rr + ax - aa)}{aa \sqrt{(rr + ax - aa)}}$ . Et si l'on fait  $bP = bB$ , ou si l'on fait  $x = a + r$  l'attraction de la surface entiere sera proportionnelle a  $\frac{2br^2}{aa}$ . Si l'on

conçoit que la sphère soit composée d'une infinité de surfaces concentriques dont l'épaisseur soit infiniment petite & qu'on fasse le rayon d'une

de ces surfaces  $= z$ ,  $\frac{2.b.z^2}{aa}$  pourra exprimer l'attraction de cette surface; & multipliant cette valeur par  $d z$  épaisseur de cette surface,  $\frac{2.b.z^2.dz}{aa}$  pourra

exprimer l'attraction que l'élément de la sphère exerce sur le corpuscule  $b$ , & l'intégrale  $\frac{2bz^3}{3aa}$  sera proportionnelle à la force attractive que la sphère du rayon  $z$  exerce sur le corpuscule  $b$ . Et parce que  $\frac{2}{3}b$  &  $r^3$  sont ici des quantités constantes, on peut dire que l'attraction d'une sphère dont le rayon est  $r$  sur un corpuscule  $b$  placé hors de cette sphère, est comme  $\frac{2br^3}{3aa}$ , ou comme  $\frac{r}{aa}$ , ou en raison inverse du carré de la distance du corpuscule au centre  $C$  de la sphère; de sorte qu'une sphère attire un corpuscule situé hors de cette sphère, comme si toute la matière étoit réunie dans son centre.

COROLLAIRE. donc si on suppose  $a=r$  l'attraction de la sphère sera comme  $\frac{r}{r}$ . Mais la masse de la sphère est comme  $r^3$ , donc l'attraction d'un corpuscule placé à la surface d'une sphère est comme  $\frac{r^3}{r^2}=r$  ou comme le rayon de la sphère; donc le poids de deux corpuscules de même masse, situés sur la surface de deux sphères homogènes & de même densité, sont comme les rayons de ces sphères.

67. PROBLÈME. *Trouver l'attraction qu'un corpuscule  $b$  placé hors d'une sphère exerce sur cette sphère, en supposant la même loi d'attraction que dans le Problème précédent.* L'action du corpuscule  $b$  sur l'élément  $Mm$  est évidemment exprimé par  $\frac{b.Mm}{xx+yy}$ , & parce que le corpuscule  $b$  attire également & obliquement l'arc correspon-

dant  $NQ$ , la force du corpuscule  $b$ , que nous désignerons par la ligne  $bM$ , doit se décomposer en deux forces  $bP$ ,  $MP$ , celle-ci est détruite par la force opposée  $NP$  qui vient de l'action que le corpuscule  $b$  exerce sur l'arc  $NQ$ ; donc  $bP$  est la seule force effective avec laquelle le corpuscule  $b$  agit sur l'arc  $Mm$ . en cherchant la valeur de  $\frac{b.M\pi}{xx+yy}$  comme dans le problème précédent, on trouvera que l'action du corpuscule  $b$  sur un élément de la sphère est comme  $\frac{2b\gamma^2 d\gamma}{a^2}$ ; d'où on conclura que par rapport à la sphère entiere on doit avoir  $\frac{2br^3}{3a^2}$ . Donc le corpuscule  $b$  attire la sphère, comme si toute la matiere de celle-ci étoit rassemblée à son centre, & réciproquement. On voit de plus que la sphère & le corpuscule s'attirent de maniere que la vitesse de la sphère pour s'approcher du corpuscule est à la vitesse avec laquelle le corpuscule tend vers la sphère, comme le corpuscule est à la sphère, ce qui s'accorde avec ce principe que la réaction est contraire & égale à l'action.

COROLLAIRE. Donc les vitesses avec lesquelles la sphère & le corpuscule tendent l'un vers l'autre sont en raison inverse des masses; dont ils parcourront des espaces qui sont dans le même rapport; donc ils se joindront à leur commun centre de gravité.

68. PROBLEME. Déterminer la quantité d'attraction que deux sphères  $AaBM$ ,  $fg$  exercent l'une sur l'autre. Soit  $b$  le centre de la sphère  $fg$ ; cette sphère attire toutes les parties de l'autre,

de la même manière que si toute la matière étoit pénétrée à son centre  $b$  (66) ; & réciproquement la sphère  $ABM$  attire chaque partie de la sphère  $fg$ , comme si toute la matière de la première étoit rassemblée au centre  $C$  ; donc ces sphères s'attirent comme si elles étoient des corpuscules placés en  $b$  & en  $C$  ; c'est-à-dire, en raison directe des masses & en raison inverse des quarrés des distances au centre de ces sphères.

REMARQUE. Un corpuscule  $P$  (fig. 49) placé dans l'intérieur d'une sphère creuse demeureroit en repos & n'auroit aucune pesanteur : car ayant tiré les lignes que représente la figure, les triangles  $aPA$ ,  $BPM$  ont les angles en  $P$  opposés au sommet, & les angles  $a$  &  $M$  appuyés sur le même arc  $AB$  ; donc ces triangles sont semblables, & donnent la proportion  $Aa : BM :: aP : PM$ . Maintenant si nous supposons les arcs  $Aa$ ,  $BM$  infiniment petits, ils se confondront avec leurs cordes ; & si l'on regarde ces arcs comme les diagonales de deux figures semblables infiniment petites qui forment une des portions infiniment petites de la surface intérieure de la sphère, ces figures seront en raison doublée de ces arcs, &  $\frac{(Aa)^2}{(aP)^2} \cdot \frac{(BM)^2}{(PM)^2}$  exprimeront l'attraction

que ces figures exercent sur le point  $P$ . Mais parce que  $Aa : BM :: aP : PM$ ,  $\frac{Aa}{aP} = \frac{BM}{PM}$  ; donc ces figures exercent des attractions égales & opposées sur les corpuscules  $P$  ; donc la surface annulaire  $AaBM$  attirera également & de toute part  
le



le corpuscule P : il en fera de même de toute la surface creuse A D M m a A ; donc le corpuscule restera en repos.

Mais si le corpuscule P est placé dans une sphère pleine (fig. 50), il ne sera nullement attiré par les parties qui sont aussi éloignées ou plus éloignées du centre que le corpuscule ; il ne sera donc attiré que comme si la sphère avoit un rayon  $= CP$  ; c'est-à-dire que l'attraction sera proportionnelle au rayon PC.

69. PROBLEME. Déterminer le mouvement d'un corpuscule A attiré vers C par une force qui suit la raison de la puissance  $m$  des distances CA (fig. 51). Soit  $AC = a$ ,  $AP = x$ , la vitesse au point P  $= v$ . Supposons que  $CE = b$  soit la distance à laquelle la force centripète est égale à la force de la gravité qui dans une seconde peut communiquer aux corps exposés à son action une vitesse  $2g$ . En faisant  $b^m : CP^m :: 2g$  (vitesse que l'action de la gravité peut communiquer dans une seconde) :  $\frac{CP^m}{b^m} \cdot 2g = \frac{(a-x)^m \cdot 2g}{b^m}$ , on aura la force accélératrice au point P. Mais (1) par la formule  $v dv = p dx$ , on a  $v dv = \frac{(a-x)^m}{b^m} \cdot 2g \cdot dx$ . D'où l'on tire  $v^2 = - \frac{4g \cdot (a-x)^{m+1}}{(m+1)b^m} + C$ . Lorsque  $AP = x$  devient  $= 0$ , on a  $\dot{v} = 0$  ; donc  $C = \frac{4g \cdot a^{m+1}}{(m+1)b^m}$ . Donc  $v^2 = \frac{4g \cdot [a^{m+1} - (a-x)^{m+1}]}{(m+1)b^m}$ .

Si l'on veut trouver le tems employé à parcourir AP, on se servira de l'équation  $dt = \frac{dx}{v} =$

$$\frac{dx \cdot \sqrt{[(m+1)b^m]}}{2\sqrt{g} \cdot \sqrt{[a^{m+1} - (a-x)^{m+1}]}}. \text{ Donc } t =$$

S.  $\frac{dx \cdot \sqrt{[(m+1)b^m]}}{2\sqrt{g} \cdot \sqrt{[a^{m+1} - (a-x)^{m+1}]}}$ . Si la force centripète suit la raison renversée des quarrés des distances, c'est-à-dire, si elle est comme  $\frac{1}{CP^2}$ ,

$$\text{on aura } m = -2, v = \sqrt{4g} \cdot \sqrt{\left(\frac{a^{-1} - (a-x)^{-1}}{-b^{-2}}\right)},$$

& le tems  $t$  fera  $= S. dx \cdot \frac{\sqrt{[a(a-x)]}}{2b\sqrt{gx}}$ . Soit  $a -$

$x = z$ , ou  $z + x = a$ , l'on aura  $dz = -dx$ .

$$(*) \text{, ou } dz = dx; \& t = \frac{\sqrt{a}}{2b\sqrt{g}} \cdot S. \frac{dz \sqrt{z}}{\sqrt{(a-z)}} =$$

$$\frac{\sqrt{a}}{2b\sqrt{g}} \cdot S. \frac{z dz}{\sqrt{(az - zz)}} = \frac{\sqrt{a}}{2b\sqrt{g}} \cdot [A \sin. \text{vers. } z$$

$- \sqrt{(az - zz)}] (**)$ . Sur la ligne AC prise pour diamètre, décrivons le demi-cercle AMC, pour avoir  $PM = \sqrt{(az - zz)}$ , & l'arc CM

(\*) On met  $-dx$  & non pas plus  $dx$ , parce que  $z$  croissant,  $x$  diminue.

(\*\*) Car A étant un arc de cercle dont le sinus versé  $= x$  & le rayon  $= \frac{1}{2}a$ , on aura la différentielle de cet

$$\text{arc} = \frac{\frac{1}{2}a dx}{\sqrt{(ax - xx)}}. (\text{voyez Section précédente n}^\circ 30),$$

Si de cette différentielle on retranche celle de  $\sqrt{(ax -$

$$xx), \text{ il viendra } \frac{-x dx}{\sqrt{(ax - xx)}}. \text{ Donc \&c.}$$

$= A \sin. \text{verf. } \gamma$ . Le tems le long de PC fera  $\frac{\sqrt{a}}{2b\sqrt{g}} \cdot (CM - PM)$ ; & parce qu'au point A, PM est  $= 0$ , le tems long de AC sera  $= \frac{\sqrt{a}}{2b\sqrt{g}} \cdot CMA$ . Mais le tems le long de AP étant égal au tems le long de AC moins le tems le long de PC, fera  $= \frac{\sqrt{a}}{2b\sqrt{g}} (AM + PM)$ .

Soit CE le rayon de la Terre  $= 19625732$  pieds, CA la distance de la Lune à la Terre  $= 60. CE$ . Puisque les corps célestes s'attirent en raison renversée des carrés des distances, il sera aisé de trouver le tems qu'un corps situé à la distance de la Lune emploiera à arriver au centre de la Terre, en supposant que la force centrale suive toujours la raison renversée des carrés des distances. Car  $b = CE$ , le demi-cercle décrit sur CA  $= 1848769000$  pieds, &  $g = 15$ . Donc le tems de la descente le long de CA seroit

$$\frac{CMA \cdot \sqrt{a}}{2b\sqrt{g}} = \frac{AMC \cdot \sqrt{60b}}{2b\sqrt{15}} = \frac{AMC}{\sqrt{b}} = \frac{1848769000''}{4430} = 208664'' = 4 \text{ jours } 19 \text{ heures à peu-près } (*).$$

(\*) Cela auroit lieu en supposant que la force centrale suivit la raison renversée des carrés des distances & la raison directe des masses attirantes; mais dans l'intérieur de la terre cette force suit la raison des distances au centre, comme il suit de ce qu'on a dit ci-dessus. Ainsi la solu-

Il est aisé de voir comment il faudroit s'y prendre pour trouver le tems qu'un corps situé à une distance donnée de la Terre mettroit à tomber sur sa surface.

70. PROBLÈME. Supposant que l'on connoît exactement la distance de la Lune à la Terre, les masses de ces Planètes ; que l'attraction suit la raison renversée des quarrés des distances & la raison des masses attirantes ; on demande un point situé entre la Lune & la Terre dans lequel un corps seroit également attiré par ces Planètes. Soit  $a$  la distance du centre de la Terre à celui de la Lune,  $m$  la masse de la Terre,  $p$  celle de la Lune,  $x$  la distance du centre de la Terre au point cherché, &  $a - x$  la distance du centre de la Lune au même point. Puisque l'attraction suit la raison renversée des quarrés des distances & la raison directe des masses attirantes, l'on aura par hy-

$$\text{pothèse } \frac{m}{x^2} = \frac{p}{(a-x)^2}, \text{ \& } m(a-x)^2 = px^2,$$

$$\text{ou } m \cdot a^2 - 2amx + mx^2 = px^2, \text{ ou } (m-p)x^2 - 2amx = -ma^2, \text{ ou en faisant } m-p = n, \text{ divisant ensuite par } n, \text{ completant, prenant les racines \& transposant, } x = \frac{am \pm a(\sqrt{mm - mn})}{n}.$$

des deux valeurs de  $x$ , celle dont le radical a le signe — résout le problème, dans le sens qu'il est proposé ; la seconde indique un point pris au-delà de la Lune sur le prolongement de

tion qu'on vient de donner ne peut être exacte qu'autant que la masse de notre globe seroit conçue comme concentrée à son centre.

la ligne tirée du centre de la Terre à celui de la Lune , dans lequel l'attraction des deux Planètes est la même.

Si  $m$  représentoit la masse du Soleil ,  $p$  celle de Saturne &  $a$  la distance du centre du Soleil à celui de Saturne , les deux valeurs de  $x$  indiqueroient deux points situés, l'un sur la ligne  $a$  qu'on suppose tirée du centre du Soleil à celui de Saturne & l'autre sur le prolongement de cette même ligne & situé au-delà de Saturne , dans lesquels les forces attirantes de ces astres seroient égales.

Si on supposoit que deux luminaires  $m$  &  $p$  éclairent un corps situé sur la ligne qui passe par leurs centres ; comme la force de la lumière suit la raison renversée des quarrés des distances & la raison directe des forces des luminaires , si l'on suppose qu'à la même distance la force pour éclairer dans le luminaire  $m$  est à celle du luminaire  $p$  comme  $m : p$  , les points cherchés se trouveront par la même formule que ci-dessus , & l'une des valeurs de  $x$  indiquera un point situé entre  $m$  &  $p$  , tandis que l'autre désignera un point situé au-delà du luminaire  $p$  que je suppose le plus foible.

*De la courbure des cordes.*

71. PROBLÈME. BAC étant une corde parfaitement flexible & sans extension , dont les bouts sont attachés à la ligne horizontale BC , trouver la courbe que la pesanteur fait prendre à cette corde (fig. 52). Il est visible que A étant le point le plus bas de la courbe , les parties BA , CA seront égales & que chacune sera égale à la moitié de la longueur de la corde , il n'est pas

moins évident qu'en supposant que l'extrémité A de la partie BA est attachée en A la courbure de l'arc BA restera la même en supposant qu'on détruit la partie AC. Cela posé, soit  $AP = x$ ,  $PD = dx$ ,  $Pb = y$ ,  $Bc = dy = nb$ ; tirant de plus la verticale Bg & la tangente bM, nous pourrions supposer que Mg est la force qui éloigne la corde AB de la verticale Bg, & br ou Bg la force qui tire un point quelconque b selon cette verticale, laquelle force est égale au poids de l'arc Ab que nous supposerons  $= u$ . La composition de ces deux forces fait que l'élément Bb prend la situation Bb. Soit la force  $Mg = a$  (\*), les triangles semblables Bbn, BgM donnent  $nB = dx$ ;  $bn = dy :: gB$  ou  $rb$ , (ou le poids  $u$ ) :  $Mg = a$ . Donc  $adx = udy$ , ou  $dy = \frac{adx}{u}$  (A). Mais la corde étant supposée homogène dans toutes ses parties, sa pesanteur est comme sa longueur, donc alors  $u$  pourra exprimer la longueur de l'arc Ab, & l'on aura  $du = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dx}{u} \times \sqrt{uu + aa}$ , en substituant la valeur de  $dy$  prise de l'équation A. Donc  $udu = dx \sqrt{uu + aa}$ ,  $dx = \frac{udu}{\sqrt{uu + aa}}$ ,  $x = \sqrt{uu + aa}$ , ou  $xx = uu + aa$ ,  $u =$

(\*) En attachant l'extrémité A de la corde BA à un fil qui passeroit sur une poulie de renvoi, & qui porteroit un bassin de balance à son autre extrémité, on pourra connoître le poids qui peut retenir la corde AB dans la situation AB.

$\sqrt{(xx - aa)}$ . Substituant cette valeur de  $u$  dans l'équation A, on aura  $dy = \frac{adx}{\sqrt{(xx - aa)}}$  équation de la courbe cherchée.

Si dans l'équation  $u = \sqrt{(xx - aa)}$ , on suppose l'arc indéterminé  $af = u = 0$ , on aura  $x = a$ ; donc l'origine des abscisses est située au point N auquel on a  $AN = a$ . pour construire l'équation qu'on vient de trouver, je la multiplie par la quantité  $a$  afin d'avoir  $ady =$

$\frac{aadx}{\sqrt{(xx - aa)}}$ . Mais selon ce qu'on dit ci-dessus

(Section 11, n°. 21)  $\frac{aadx}{2\sqrt{(xx - aa)}}$  désigne un

secteur d'une hyperbole équilatère dont la moitié du premier axe  $= a$ . C'est pourquoi je décris sur AN prise pour demi-premier axe l'hyperbole équilatère FA tirant la droite NF, j'ai le double du secteur NAF égal  $S.ady = ay$ . Menant l'indéfinie Nm parallèle à Ag & faisant le rectangle AgmN égal au double du secteur NAF, Ag = Nm sera  $= y$  & le rectangle sera  $= ay$ . Prolongeant chaque ordonnée i P de l'hyperbole jusqu'à ce qu'elle rencontre en b chaque ordonnée correspondante R r du rectangle, le point b sera à la courbe cherchée. En effet, en partageant le secteur & le rectangle en un même nombre d'éléments, on aura chaque élément mg R r; ou  $gm.mR = gm.nb = gm.dy = a dy$  toujours double de l'élément correspondant N i F du secteur hyperbolique dans l'élément duquel on fait  $PD = dx$  &  $NA = a$ . Donc on aura toujours

$$a dy = \frac{2 a a dx}{2 \sqrt{(xx - aa)}} = \frac{a a dx}{\sqrt{(xx - aa)}}, \text{ \& } dy = \frac{a dx}{\sqrt{(xx - aa)}}, \text{ équation qu'on vouloit construire (*).}$$

REMARQUE. De l'équation  $xx = uu + aa$ , on tire  $uu = xx - aa$ ; donc en supposant que BA moitié de la corde donnée soit  $= c$ , on aura  $cc = xx - aa$ , ce qui fera connoître la valeur DN de l'abscisse correspondante, & par conséquent l'origine N des abscisses.

*De quelques mouvemens dans les lignes courbes  
& de la figure de la Terre.*

72. PROBLEME. Trouver le tems de la descente d'un corps mis en mouvement par l'action de la gravité le long d'un arc quelconque h A de cycloïde (fig. 53). Ayant tiré la ligne h D perpendicu-

(\*) Si l'on fait  $dx = 0$ , on aura le point le plus bas de la courbe, & alors  $xx - aa = 0$  &  $x = a$ .

Si l'on fait attention que  $xx - aa$  est le produit des abscisses comptées du centre d'une hyperbole dont l'axe des  $x = 2a$ , on pourra substituer  $xx + 2ax$  à la place de  $xx - aa$ , puisque c'est la même chose que si on prenoit

l'origine des  $x$  au sommet, & alors  $dy = \frac{a dx}{\sqrt{(xx + 2ax)}}$

&  $y = \pm a L. \left( \frac{a + x + \sqrt{(xx + 2ax)}}{a} \right)$ . C'est pour-

quoi dans ce cas l'axe des  $x$  coupe les doubles ordonnées en par-

ties égales; & alors  $S. \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = S. \frac{(a + x) dx}{\sqrt{(2ax + xx)}}$

$= \sqrt{(2ax + xx)}$ ; ainsi la chaînette ou la caténaire est rectifiable. Avec un peu d'attention il est aisé de voir que la chaînette est la même que la ligne des cosinus hyperboliques.



laire au diamètre  $BA$  du cercle générateur, on décrira sur  $DA$  prise pour diamètre la demi-circonférence  $AND$ , & ayant mené les lignes qu'on voit dans la figure, je fais le diamètre  $AB = 2a$ ,  $DA = 2r$ ,  $DP = x$  & par conséquent  $AP = 2r - x$ ,  $Pp = fm = dx$ , le tems que le mobile employe à parcourir l'arc indéfini  $MA = t$ , le tems employé à parcourir l'arc  $Mm = dt$ . De plus la vitesse acquise en parcourant l'arc  $hM$  sera comme la racine de la hauteur  $DP$ , ou sera  $= \sqrt{x}$ . Or la tangente  $MT$  de la cycloïde est parallèle à la corde  $AF$  (section premiere, n°. 13); donc les triangles  $Mfm$ ,  $PFA$  sont semblables & donnent  $Mm : mf :: FA : PA$ . Mais par la nature du cercle  $AB : AF :: AF : AP$ ; donc  $AB : FA$  ou  $FA : AP :: \sqrt{AB} : \sqrt{AP}$ ; donc  $Mm : mf :: \sqrt{2a} : \sqrt{(2r - x)}$ ; donc  $Mm =$

$\frac{dx \sqrt{2a}}{\sqrt{(2r - x)}}$ , en substituant la valeur de  $mf$ .

Mais le tems le long de  $Mm$  étant exprimé par  $dt$  & la vitesse par  $\sqrt{x}$ , on aura  $Mm = dt \cdot \sqrt{x}$ ,

ou  $dt = \frac{Mm}{\sqrt{x}}$ ; donc en substituant la valeur de

$Mm$ ,  $dt = \frac{dx \sqrt{2a}}{\sqrt{(2rx - xx)}} = \frac{2r \cdot dx \sqrt{2a}}{2r \cdot \sqrt{(2rx - xx)}}$ .

Mais la différentielle  $Nn$  de l'arc  $DN$  est  $=$

$\frac{r dx}{\sqrt{(2rx - xx)}}$ ; donc  $dt = \frac{d \cdot DN \cdot 2 \sqrt{2a}}{2r}$ , & en

intégrant,  $t = \frac{DN \cdot 2 \sqrt{2a}}{2r}$ . Expression du tems

cherché le long de l'arc  $hM$ .

Si  $t$  désigne le tems de la descente le long de

de l'arc  $hA$ , l'arc  $DN$  deviendra la demi-circonférence  $DNA$ , & l'on aura alors  $t = \frac{DNA \cdot 2 \cdot \sqrt{2a}}{2r}$ . Donc puisque  $2 \cdot \sqrt{2a}$  est une quantité constante le tems  $t$  sera proportionnel à  $\frac{DNA}{2r} = \frac{DNA}{DA}$ ; de même le tems le long de la demi-cycloïde  $CA$  sera comme  $\frac{BFA}{BA}$ . Ainsi les tems le long de différens arcs cycloïdaux sont toujours comme le rapport de la demi-circonférence d'un cercle à son diamètre; donc ces tems sont égaux, c'est-à-dire qu'un corps quelconque qui se meut le long d'une cycloïde par l'action de la gravité dans un milieu sans résistance parvient au point le plus bas  $A$  dans le même tems, soit qu'il parte de  $C$  ou de  $M$ .

COROLLAIRE. Puisque le tems de la descente le long de l'arc  $hA$  est  $t = \frac{DNA \cdot 2 \cdot \sqrt{2a}}{2r}$ , on aura  $2r : DNA :: 2 \cdot \sqrt{2a} : t$ ; mais  $2 \cdot \sqrt{2a} = \frac{2a}{\frac{1}{2} \sqrt{2a}}$ ; donc  $2r : DNA :: \frac{2a}{\frac{1}{2} \sqrt{2a}} : t$ . De plus  $\frac{1}{2} \sqrt{2a}$  représente la moitié de la vitesse qu'un corps acquerreroit en tombant le long du diamètre  $BA$ ; donc en supposant ce tems  $= T$ , on aura  $2a = T \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2a}$ , ou  $T = \frac{2a}{\frac{1}{2} \sqrt{2a}}$ ; donc en substituant, la dernière proportion devient  $2r : DNA :: T : t$ . C'est pourquoi le tems le long d'un arc quelconque de cycloïde est au tems de la chute

libre d'un corps le long du diamètre du cercle générateur comme la demi-circonférence d'un cercle est à son diamètre ; ainsi ces deux tems sont en raison constante, ce qui nous apprendroit si nous ne le sçavions déjà, que tous les arcs d'un cycloïde comptés depuis le point A sont parcourus en tems égaux.

On appelle *courbes tautochrones* celles dont les arcs grands ou petits sont parcourus dans le même tems ; ainsi la cycloïde est une courbe tautochrone, en supposant que le milieu est sans résistance.

REMARQUE. Si A C (fig. 54) est supposée une demi-cycloïde égale à la demi-cycloïde A V = V B = C B ; qu'on suspende au point C un pendule P avec un fil dont la longueur soit = A T C, le poids P séparera peu-à-peu le fil P T C de la cycloïde A C, étant parvenu dans la situation C V, il lui fera envelopper la demi-cycloïde C B, & le poids P oscillera de cette maniere dans la cycloïde A V B, par le moyen de deux lames cycloïdales C A & C B, qui doivent être fort polies & sans ressort, afin de ne point troubler l'isochronisme des vibrations du pendule par le frottement ou par l'élasticité. Ayant tiré les lignes qu'on voit dans la figure ; par la propriété de la cycloïde, la demi-cycloïde A C est = 2. A E = C V, & l'arc A T est égal à la longueur T P du fil qui enveloppoit cet arc lorsque le corps P étoit en A ; or A T est égal au double de la corde A f ; ( Section seconde, n°. 32 ) ; donc P T = 2. A f = 2. h T ; car h T est parallèle à A f ( Section premiere, n°. 13 ) & la figure f T h A est un parallelogramme. Donc h P =

*h* T. De plus l'arc circulaire *Af* est égal à l'ordonnée  $fT = Ah$ , & à cause de  $AD = AfE$ , on doit avoir  $Dh = Ef = MV$  : car les arcs *AF*, *DM* appartenans à des cercles égaux & étant compris entre les parallèles *Tf* & *Ah*, *AD* & *PM* également éloignées, sont nécessairement égaux ; donc  $fE = MV$ . Mais les angles  $fAh$ ,  $MDh$  ont pour mesure, le premier la moitié de l'arc *Af*, & le second la moitié de l'arc *MD* ; donc ces angles sont égaux & les lignes *fA*, *DM* sont parallèles ; ainsi la figure *hDMP* est un parallélogramme, & l'on a  $PM = hD = MV$ , c'est-à-dire que l'ordonnée *PM* est égale à l'arc circulaire *VM* correspondant. Donc la courbe *APV* est une demi-cycloïde produite par le développement de la demi-cycloïde  $= CA$  ; donc la développée d'une cycloïde est encore une cycloïde, ce que nous avons démontré d'une autre manière (Section première, n°. 106). Donc 2°. un pendule qui oscille entre deux lames cycloïdales *AC*, *CB*, dont chacune est égale à la longueur du fil de ce pendule fait ses oscillations dans une cycloïde ; donc 3°. les vibrations d'un tel pendule sont d'égale durée.

COROLLAIRE. Puisque la demi-cycloïde *AV* est produite par le développement de la demi-cycloïde *AC*, & que par la même raison la demi-cycloïde *VB*, est produite par le développement de la demi-cycloïde *BC*, il est évident que *CV* est le rayon de la développée au point *V* de la cycloïde *AVB*. ; donc si du point *C* comme centre avec un rayon *CV*, on décrit un petit arc circulaire *VN*, il se confondra avec l'arc correspondant de la cycloïde, & puisque les arcs

cycloïdaux sont parcourus en tems égaux, un pendule qui décrira des petits arcs circulaires les décrira en tems égaux, ce que nous avons démontré ci-dessus d'une autre maniere. De plus nous avons dit que le tems de la descente le long d'un arc de cycloïde étoit au tems de la descente le long du diamètre du cercle générateur comme la demi-circonférence d'un cercle est à son diamètre; donc puisque le diamètre DV est la moitié du rayon CV, que le tems le long de DV est la moitié de celui qu'il faut pour parcourir 2. CV ou le diamètre du cercle dont le rayon est CV, & que le tems le long d'une corde VN d'un arc VN supposé circulaire est égal au tems le long du diamètre du cercle auquel appartient cet arc, il s'en suit 1°. que le tems d'une vibration entiere dans un arc de cercle fort petit est au tems de la chute le long du demi-rayon de ce cercle, comme la circonférence est au diamètre, & le tems de la chute le long d'un petit arc circulaire NV est au tems de la chute oblique le long de la petite corde VN, comme la demi-circonférence est au double du diamètre.

REMARQUE. Par le mécanique élémentaire on fait que le tems de la chute le long des plans inclinés de même hauteur, sont en raison des longueurs de ces plans; cela posé, supposons que l'arc VN est un arc circulaire infiniment petit, les tangentes Vg & gN pourront être considérées comme égales à la corde NV. De plus ces tangentes sont égales; donc on aura  $VN = 2. N g$ , & parce que Vg est horisontale, en considérant NV & Ng comme des plans de même hauteur, le tems le long de NV fera double du tems le

long de  $Ng$ . Maintenant le corps étant supposé parvenu en  $g$ , il décrira la ligne horisontale  $gV = gN$  avec un mouvement uniforme & dans un tems sous-double de celui qu'il a employé à parcourir  $gN$ . Si donc on fait ce dernier tems  $= T$ , le tems employé à parcourir  $Ng$  sera  $= 2T$ ; donc le tems employé à parcourir  $Ng + gV$  sera  $= 3T$ . Mais le tems le long de  $NV$  doit être double de celui que le corps employe à parcourir  $Ng$ ; donc ce tems  $= 4T$ , ainsi le tems employé à parcourir les deux tangentes est au tems employé à parcourir la corde  $NV$ , comme  $3:4$ ; ce n'est donc pas la même chose de supposer qu'un corps parcourt la corde, ou l'arc, ou les tangentes; lorsque l'arc est infiniment petit, ce qui fait voir l'erreur de ceux qui concluent qu'un arc circulaire fort petit, est décrit dans le même tems que la corde, à cause qu'il se confond avec la corde (\*).

Nous avons vu que le tems  $t$  de la descente d'un corps le long d'un arc cycloïdal est au tems de la chute libre le long du diamètre du cercle générateur, comme la demi-circonférence est à son diamètre. Si donc on suppose  $= c$  la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon  $= 1$ ,  $b$  le diamètre du cercle générateur,  $\tau$  le tems le long de ce diamètre, on aura  $2 : c :: \tau : t =$

---

(\*) On fait par la mécanique élémentaire que toutes les cordes d'un cercle qui aboutissent aux extrémités du diamètre vertical sont parcourues dans le même-tems que le diamètre, & par conséquent en tems égaux. Keil, Parent & d'autres ont conclu que les petits arcs d'un cercle devoient être parcourus dans des tems égaux, parce que la corde devient à la fin égale à l'arc; mais quelque petit que soit l'arc, sa position n'est jamais la même que celle de la corde: car l'arc s'écarte toujours de la corde vers son milieu.

$\frac{c^2 z}{2}$ . Mais si  $g$  représente l'espace que la gravité peut faire parcourir dans une seconde dans un certain lieu de la terre ; comme les espaces que cette cause fait parcourir sont comme les quarrés des tems , on aura  $g : 1''$  (quarré d'une 1'' que nous regarderons comme l'unité de tems) ::  $z^2$  (quarré du tems employé à parcourir le diamètre  $b$ ) :  $b$ . Ainsi  $z^2 1'' = z^2$  (à cause de 1'' supposé = 1) est =  $\frac{b}{g}$ , &  $z = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{g}}$ . Mais

$b$  est la moitié de la longueur d'un pendule circulaire qui feroit de petites oscillations isochrones ou de même durée que celles du pendule cycloïdal ; donc en appelant  $a$  la longueur d'un tel pendule , on aura  $b =$

$\frac{a}{2}$ , &  $z = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2.g}}$  ; d'où lon tire  $t = \frac{c}{2} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2.g}}$ . Tel est

le tems de la demi-vibration d'un pendule dont la longueur est =  $a$ . Si donc  $z$  représente le tems d'une vibration entière d'un pareil pendule , on aura  $t =$

$c \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2.g}}$ .

COROLLAIRE. De-là il suit que les tems des petites vibrations des pendules sont en raison directe des racines des longueurs , & en raison inverse des racines des forces accélératrices qui les font mouvoir. Si donc on suppose cette force constante , les tems des vibrations seront comme les racines des longueurs des pendules.

Si dans un certain lieu de la terre les corps descendent dans une seconde de la hauteur de 15.1 pieds dans une seconde , car la force de la gravité n'est pas la même par-tout , comme tout le monde le fait , on aura  $g = 15.1$ . Mais en supposant le rayon = 1 , l'on a  $c = 3.141$ . Cela posé , il sera facile de trouver la longueur d'un pendule qui feroit ses vibrations dans une seconde :

car l'équation  $t = c \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2.g}}$ , deviendra  $1 = c \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2.g}}$  ; d'où

l'on tire  $a = \frac{2.g}{c^2} = 3.061$ .

Réciproquement si l'on connoît la longueur d'un pendule qui fait ses vibrations dans une seconde, on trouvera facilement l'espace  $g$  que la gravité fait parcourir aux corps dans le même tems ; car  $g = \frac{a c^2}{2}$ .

De ce que  $t = c \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2g}}$ , il suit que plus la force  $g$  est petite plus le tems est long, de manière que le tems est en raison inverse soudoublée de la force accélératrice, lorsque  $a$  est constant. Soit  $t$  le tems d'une vibration du pendule dont la longueur  $= a$ ,  $T$  celui du pendule dont la longueur  $= b$ ,  $N$  le nombre de vibrations du premier pendule dans un tems donné dans une heure, par exemple,  $n$  le nombre des vibrations du second pendule dans le même tems, il est clair que plus le nombre des vibrations d'un pendule sera grand dans un tems donné, plus le tems de chacune sera court. Donc les nombres  $N$  &  $n$  seront en raison inverse de  $t$  &  $T$  ; mais en supposant  $g$  constant (comme on le fait ici)  $t : T :: \sqrt{a} : \sqrt{b}$ . Donc on

aura  $N : n :: \frac{1}{t} : \frac{1}{T} :: \frac{1}{\sqrt{a}} : \frac{1}{\sqrt{b}} : \sqrt{b} : \sqrt{a}$ . D'où

l'on tire  $N^2 : n^2 :: b : a$ , &  $b = \frac{N^2 a}{n^2}$ . Donc si on connoît la longueur  $a$  d'un pendule qui fait un certain nombre  $N$  de vibrations dans un tems donné, on aura par cette équation la longueur du pendule  $b$  qui doit faire le nombre  $n$  de vibrations dans le même tems.

Si  $T = t$ , l'on aura  $N : n :: \sqrt{b} : \sqrt{a}$  ; c'est-à-dire, que le nombre des vibrations de deux pendules sont en raison inverse soudoublée de leurs longueurs, ou sont en raison inverse des racines de leurs longueurs.

Nous avons dit ci-devant que la gravité n'étoit pas la même par-tout. Un Physicien qui demeure dans les montagnes du Valais a trouvé qu'une excellente pendule à secondes placée à 514 toises de hauteur s'est accélérée en 90 jours de 20' 22", que la même pendule à 210 toises de hauteur



teur s'est accélérée de 15' 4" en 175 jours ; & qu'enfin à 847 toises elle s'est accélérée en 61 jours de 21' 5" (voyez le Journal des Beaux-Arts, Décembre 1771). Il suivroit de-là que la pesanteur est augmentée à peu près en raison de l'élévation, tandis que selon la théorie ordinaire elle doit être en raison inverse du quarré de la distance au centre. Mais ne peut-on pas soupçonner que la densité de ces montagnes est plus grande que celle des couches placées à la surface de la terre, & que c'est cet excès qui a produit l'accélération dont on vient de parler ?

Si nous en croyons M. Bouguer le pendule à secondes doit être pour la latitude de Paris de 440.67 lignes, & sous l'équateur au niveau de la mer de 439.21. Mais à Quito, ville située au dessus du niveau de la mer d'environ 1466 toises, ce pendule doit avoir 438.88, tandis que sur le mont Pichincha élevé de 2434 toises au-dessus du niveau de l'Océan, cette longueur n'est que de 439.69 lignes. A Rome, selon les déterminations des Peres Leseur & Jacquier la longueur du même pendule a 440.3888 lignes.

La pesanteur n'est donc pas la même dans tous les lieux de notre globe : ce qui vient principalement de ce que la terre en tournant sur son axe comunique aux corps placés sur sa surface une force centrifuge qui diminue leur tendance vers son centre, & cette force va en décroissant de l'équateur aux poles où elle est nulle.

73. LA rotation de la terre sur son axe doit non-seulement diminuer la gravité des corps situés sur sa surface entre les poles & l'équateur, elle doit encore (en supposant notre globe fluide) lui donner la figure d'un ellipsoïde : car si un amas de matiere homogène & fluide est animé d'une force d'attraction qui pousse les parties les unes vers les autres, les particules les plus proches du centre s'approcheront les unes des autres, en s'arrangeant selon une forme sphérique, puisque les attractions de ces parties sont égales entr'elles. Les autres parties les plus proches doivent aussi évidemment s'arranger autour des premières en formant une couche sphérique & ainsi de suite ; de sorte qu'il en résultera une sphère. Mais si cette sphère vient

à tourner autour de l'axe  $Aa$  (fig. 55) avec une certaine vitesse, je dis qu'elle s'allongera vers l'équateur, & formera un ellipsoïde ; car ayant tiré  $NP$  perpendiculaire à l'axe  $Aa$ , & décomposant la force  $CM$  qui pousse la particule  $M$  vers le centre  $C$ , en  $MP$  &  $MP'$ , l'une perpendiculaire à l'axe  $Aa$ , & l'autre parallèle au même axe, la force  $PM$  (du point  $M$ ) selon  $MP$  sera à la force centrifuge du point  $D$  comme  $PM : CD$  (voyez ce que nous avons dit sur les forces centrales dans nos Institutions Mathématiques, seconde édition). Ainsi l'allongement de  $PM$  sera à l'allongement de  $CD$  comme  $PM : CD$ , & l'on aura  $PM : CD :: PM + MN = PN : CD + DB = CB$ . Mais si sur un même axe on décrit un cercle & une ellipse, les ordonnées du cercle sont proportionnelles à celles de l'ellipse (Sections coniques) ; donc la courbe  $ABa$  est elliptique & le solide qu'elle engendre est un ellipsoïde.

Si l'on conçoit que lorsque la sphère fluide commence à tourner, on lui ajoute de la nouvelle matière  $MN$ ,  $BD$ , &c. de manière que la matière ajoutée puisse par son poids respectif compenser la force centrifuge des particules  $M$ ,  $D$ , &c. Il est visible que la sphère se changera de même en un ellipsoïde dont toutes les parties seront en équilibre les unes par rapport aux autres, & dans ce cas on n'aura pas besoin de supposer que les colonnes  $PM$ ,  $CD$  &c. s'allongent par l'action de la force centrifuge.

Dans un sphéroïde fluide & elliptique la direction de la gravité doit nécessairement être par-tout perpendiculaire à sa surface ; car sans cela les parties fluides ne sauroient être en équilibre, & un corps situé sur la surface ne sauroit rester en repos, mais il descendroit vers les parties les plus basses. On doit donc conclure que la direction de la gravité sur les surfaces des planètes est perpendiculaire à leur surface ; & que si la terre a été originairement fluide, elle a dû prendre en tournant sur elle-même la figure d'un sphéroïde renflé vers l'équateur & applati vers les poles.

En supposant que la terre est un sphéroïde elliptique qui diffère très-peu d'une sphère, les degrés du méridien

dien, en allant de l'équateur vers les pôles, feroient en raison triplée des perpendiculaires QR (fig. 56); en effet les arcs semblables, c'est-à-dire, d'un même nombre de degrés sont proportionnels à leurs rayons. On peut donc supposer que des arcs d'un seul degré dans un sphéroïde très-peu différent d'une véritable sphère sont proportionnels à leurs rayons osculateurs: or selon ce que nous avons dit (Sections Coniques n°. 57) dans l'ellipse & l'hyperbole les rayons osculateurs

sont entr'eux comme les  $\frac{M^3 a^2}{b^4}$ , M étant la normale, a le premier & b le second demi-axe; donc puisque a & b sont des constantes, il est visible que les rayons

osculateurs sont comme les  $M^3$ . Mais  $\overline{VC}^2$  ou  $xx = \frac{aa}{bb} (bb - yy)$ , la sous-normale RV étant =

$$\frac{bbx}{aa}; \text{ donc } RV^2 = \frac{b^4 x^2}{a^4} = \frac{b^4}{a^2} - \frac{bb}{aa} yy, \text{ \& } RQ^2$$

$$= RV^2 + VQ^2 = \frac{b^4}{aa} - \frac{bb}{aa} yy + y^2. \text{ Mais au}$$

sommet A du grand axe l'on a  $y = 0$ , tandis qu'au sommet D du petit axe y est = b; donc au sommet du

grand axe,  $QR^2 = \frac{b^4}{aa}$ ; mais au sommet du petit

QR est = bb; donc au sommet du grand axe le rayon

osculateur sera représenté par  $\frac{bb}{a}$ , & au sommet du

petit par  $\frac{aa}{b}$ . Or  $\frac{bb}{a} : a :: b : \frac{aa}{b}$ ; c'est-à-dire, que

dans un tel sphéroïde le rayon osculateur au sommet du grand axe, le demi-grand axe, le demi-petit axe, & le rayon de courbure au sommet du petit axe sont en proportion géométrique. Il est visible encore que les longueurs de l'arc d'un degré du méridien à l'équateur, & de l'arc d'un degré au pôle sont entr'elles

comme  $\frac{bb}{a} : \frac{aa}{b} :: b^3 : a^3$ , c'est-à-dire, comme les cubes du petit demi-petit axe au cube du demi-grand axe. De même la longueur de l'arc d'un degré du méridien sous l'équateur sera à la longueur d'un arc semblable de l'équateur comme  $\frac{bb}{a} : a :: bb : aa$ , c'est-à-dire, comme le carré du petit demi-axe à celui du demi-grand axe du sphéroïde.

Cela posé, par des mesures assez exactes le degré du méridien sous l'équateur est d'environ 56753 toises, & si l'on suppose que le degré de l'équateur est d'environ 57247 toises, & qu'on fasse le demi-axe de 230, dont le carré est 52900, pour avoir la proportion 56753 : 57287 :: 52900 : x, on trouvera x égal au carré de 231. Ainsi dans cette supposition l'axe de la terre est à celui de l'équateur, comme 230 : 231. Voici une table qui fera connoître le fonds que l'on peut faire sur cette théorie.

Degrés du méridien.	Latitude.	Degrés calculés.	Degrés mesurés	Différences.
Au Pérou,	0	56753	56753	
En Afrique,	33° 18'	56976	57037	— 61.
En Italie,	43° 1'	57097	56979	+ 118.
En France,	43° 31'	57104	57048	+ 56.
En Italie,	44° 44'	57120	57069	+ 51.
En Allemagne,	47° 40'	57157	57091	+ 66.
En France,	49° 23'	57179	57074½	+ 104½.
En Angleterre,	53° 0'	57225	57300	— 75.
En Laponie,	66° 20'	57374	57400	— 26.

En supposant cette table exacte, on en conclura facilement que la différence du degré du méridien au pôle & à l'équateur est de 740 toises, le demi-diamètre ou le rayon de l'équateur de 3280108 toises, le demi-axe de la terre de 3265909 toises ; la différence de hauteur de la terre au pôle & à l'équateur étant de 14199 toises.

Si l'on suppose que le demi-grand axe diffère du demi-petit axe de la petite quantité  $p$ , on aura  $a = b + p$ ,  $a^2 = b^2 + 2bp$ , en négligeant  $p^2$  qui est une quantité très petite par rapport à  $b$ . Donc la va-

leur de  $\overline{QR}$  trouvée ci-dessus deviendra  $\overline{QR} = \frac{b^4 - b^2 y y}{b^2 + 2bp} + y^2 = b^2 - 2bp + \frac{2p y^2}{b}$ . Mais dans

un sphéroïde très-approchant d'un globe on peut supposer que la normale  $QR$  passe par le centre ; donc en faisant le sinus de l'angle  $QRA = t$ , & le sinus total  $= 1$ , on aura  $1 : QR :: t : QV = y$  ; &  $y^2 =$

$t^2 QR^2$ . Donc  $QR^2 = \frac{2p}{b} \cdot \overline{QR} t^2 = b^2 - 2bp$ ,

ou  $\overline{QR} = \frac{bb - 2bp}{1 - 2pb^{-1}t^2} = b^2 - 2bp + 2bpt^2$  ; &

en prenant la racine, on aura  $QR = b - p + p \cdot t^2$

à peu-près. Si l'on substitue cette valeur dans  $\frac{M^3 aa}{b^4}$ ,

en faisant  $aa = b^2 + 2bp$ , & qu'on néglige tous les termes dans lesquels  $p$  a un exposant plus grand que l'unité, on trouvera le rayon osculateur  $QK = b - p + 3pt^2$ . Ainsi les différences  $3pt^2$  des rayons osculateurs, & par conséquent celles des longueurs des degrés du méridien seront proportionnelles aux quarrés des sinus des angles  $ARQ$ , ou au quarrés des sinus des latitudes.

Mais la différence entre les degrés calculés & les degrés mesurés ne permet gueres d'admettre cette hypothèse dans toute la rigueur géométrique. Il est vrai que sans faire tort à ces mesures prises par de très-habiles gens, on peut supposer une erreur géographique d'environ 15 ou 18 toises. & une erreur d'environ 4" dans l'observation ; en effet on sait que le frottement du fil à plomb contre l'instrument peut le tenir écarté d'environ 3" ou 4" de la verticale, sans parler des imperfections des instrumens que toute l'industrie humaine ne sauroit éviter. Or une erreur d'une seconde dans l'observation doit en donner une d'environ 16 toises

dans la mesure. Car si l'on divise la longueur du degré sous l'équateur ou 56753 par 3600", on trouvera à peu-près 16 pour quotient. Ainsi il est très-facile qu'il se soit glissé une erreur d'environ 80 toises dans les mesures que nous avons rapportées. D'un autre côté l'attraction des montagnes voisines peut détourner le fil à plomb (des instrumens dont on se sert dans les observations) de la verticale en lui faisant faire un petit angle avec cette ligne : ainsi que cela est arrivé au Pérou par rapport à la montagne Chimboraco ; & peut-être l'attraction de l'Appenin en Italie, celle des Pyrénées en France ont produit un effet semblable. On ne doit donc pas regarder les mesures rapportées dans notre table comme très-exactes. J'ajouterai encore qu'il peut très-bien se faire qu'il y ait de l'irrégularité dans les densités des couches de la terre ; de manière que la direction de la gravité ne soit pas par tout exactement perpendiculaire à sa surface, ce qui doit nécessairement influer sur la justesse des observations.

Si l'on vouloit trouver la différence du rayon de l'équateur avec le demi-axe de la terre par le moyen des longueurs supposées connues de deux degrés du méridien, on feroit attention que  $y^2 = QR^2 \cdot t^2$ , comme on l'a déjà dit ; de sorte que l'équation  $QR^2$

$$= \frac{b^4}{aa} - \frac{bb}{aa} \cdot yy + y^2 \text{ donneroit } QR^2 =$$

$\frac{b^4}{aa \cdot (1 - t^2) + b^2 t^2}$ . Ainsi le rayon osculateur au

point Q sera en raison inverse sesquiplée de  $aa(1 - t^2) + b^2 t^2$ , c'est-à-dire, comme le cube de la racine de cette quantité. Si on suppose donc deux degrés du méridien dont l'un soit = B, & l'autre = C ; & que les sinus de latitude correspondans soient désignés par  $t$  &  $\tau$ ,

nous aurons  $B : C :: [aa - (aa - bb)\tau\tau]^{\frac{1}{2}} : [aa - (aa - bb)t t]^{\frac{1}{2}}$ , ou  $B^{\frac{3}{2}} : C^{\frac{3}{2}} :: [aa - (aa - bb)\tau\tau] : [aa - (aa - bb)t t]$ . Si l'on égale le produit des extrêmes de cette proportion à celui des moyens, pour en tirer ensuite une autre analogie, on trouvera facilement que  $a$  est à  $b$  en raison sous-doublée de  $B^{\frac{1}{2}} t^2$

$$- C^{\frac{1}{2}} \cdot r^2 : C^{\frac{1}{2}} \cdot (1 - r^2) - B^{\frac{1}{2}} \cdot (1 - r^2).$$

Si on suppose de nouveau  $a = b + p$ , de maniere qu'on puisse négliger les puissances supérieures de  $p$ ,

on aura  $B : C :: a - 3p \cdot r^2 :: a - 3p \cdot r^2$ , &  $\frac{p}{a} =$

$$\frac{B - C}{3Br^2 - 3Cr^2}.$$

Comme M. de Maupertuis ne mesura en Laponie qu'un arc de  $57^{\circ} 28.67''$ , & qu'en mesurant tout l'arc il auroit pu commettre de plus une erreur de  $1\frac{1}{2}''$  dans l'observation, on peut être soupçonner une erreur d'environ 24 toises, & cet arc étant supposé de 57422 toises : si on le compare avec celui d'Afrique par le moyen de la formule précédente, la différence des demi-axes terrestres sera  $= \frac{1}{1241}$ . Mais en comparant de même le degré Africain avec le Péruvien, cette même différence sera d'un  $\frac{1}{100}$ . Le degré Romain étant comparé avec le degré Africain donneroit plutôt la terre allongée vers les Pôles. Il n'est donc pas étonnant que les Géomètres ne s'accordent pas sur le rapport des axes de la terre. M. Muller prétend que ces axes sont entr'eux comme 215 : 216. M. Bouguier dans sa figure de la terre donne le rapport entre l'axe & l'équateur comme 178 : 179. Il semble même rejeter la figure elliprique, puisqu'il assure que les accroissemens des degrés du méridien sont comme les quatriemes puissances des sinus de latitude. M. Newton prétend que ce rapport est le même que celui de 219 : 230. Ainsi l'on voit que les mesures prises à si grands frais, & avec tant d'éclat dans différentes parties du monde & par des Savans célèbres, n'ont pas abouti à grand'chose ; & que la vraie figure de la terre sera long-tems, & peut-être toujours inconnue. Mais peut-être aussi les méridiens de notre globe ne sont pas égaux entr'eux, la terre étant plus dense & plus basse d'un côté que d'un autre sous la même latitude.

74. PROBLEME. Trouver la courbe de la plus vite descente ou la brachystocrone AM, par le

Bb 4

moyen de laquelle un corps A parvienne de A en M dans le moindre tems possible en supposant le milieu sans résistance (fig. 57). Ayant mené les ordonnées infiniment proches PM,  $pm$ ,  $Nn$ , & les autres lignes que représente la figure, soit  $AP = x$ ,  $PM = y$ , on aura  $Pp = Mr = mf = nF = dx$ ,  $mr = dy$ ,  $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ . Soit  $rF = b$ , on aura  $mF = b - dy$ ,  $mn =$

$\sqrt{(b - dy)^2 + dx^2}$ . La vitesse le long de l'arc infiniment petit  $Mm$  pouvant être regardée, comme uniforme & comme égale à celle que le corps acquiert en tombant de la hauteur  $AP$ , supposons cette vitesse  $= c$  & faisons  $= C$  la vitesse acquise le long  $Ap$ , ou la vitesse avec laquelle l'arc  $mn$  est parcouru. Soit enfin  $t$  le tems employé à parcourir l'arc  $AM$ , le tems le long de  $Mm$  fera  $= dt$ ; & parce que dans le mouvement uniforme les espaces sont en raison composée des tems & des vitesses, on aura  $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = c dt$ , de même  $mn = \sqrt{[(b - dy)^2 + dx^2]} = C dt$ ; donc le tems employé à parcourir

l'arc  $Mn$  fera  $= 2 dt = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{c} + \frac{\sqrt{(bb - 2b dy + dy^2 + dx^2)}}{C}$ ; mais la courbe

$An$  doit être telle que si le corps descendoit de  $M$  en  $n$ , il devoit employer le moins de tems possible; donc le tems  $2 dt$  est un *minimum*;

donc  $2 ddt = \frac{dyddy}{c \sqrt{(dx^2 + dy^2)}} +$

$\frac{dyddy - bddy}{C \sqrt{(bb - 2b dy + dy^2 + dx^2)}} = 0$ , en suppo-



fant  $dx$  constant; donc en divisant par  $ddy$  &

$$\text{transposant, } \frac{dy}{c \sqrt{(dx^2 + dy^2)}} =$$

$$\frac{b - dy}{C \sqrt{(bb - 2b dy + dy^2 + dy^2)}}, \text{ c'est-à-dire,}$$

$$\frac{rm}{c.Mm} = \frac{mF}{C.mn}, \text{ ou } \frac{c.Mm}{rm} = \frac{C.mn}{mF} = \frac{C.mn}{fn};$$

donc parce que la vitesse  $c$  est comme  $\sqrt{AP}$ , & la vitesse  $C$  comme  $\sqrt{Ap}$ , le produit de la racine de l'abscisse par l'élément de l'arc correspondant étant divisé par la différentielle de l'ordonnée, donne toujours une quantité con-

stante que je ferai  $= \sqrt{a}$ , pour avoir  $\frac{\sqrt{AP.Mn}}{rm}$ ,

$$\text{ou } \frac{\sqrt{x.Mn}}{dy} = \sqrt{a}, \text{ ou } \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy} =$$

$$\sqrt{a}, \text{ ou } x \cdot (dx^2 + dy^2) = a dy^2, \text{ d'où}$$

$$\text{l'on tire } dy^2 = \frac{x dx^2}{a - x}, dy = \frac{\sqrt{x} \cdot dx}{\sqrt{(a - x)}} =$$

$$\frac{x dx}{\sqrt{(ax - xx)}} = \frac{a dx}{2 \sqrt{(ax - xx)}} - \left[ \frac{a dx - 2x dx}{2 \sqrt{(ax - xx)}} \right];$$

donc en intégrant & ajoutant une constante,  $y$

$$+ C = S. \frac{a dx}{2 \sqrt{(ax - xx)}} - \sqrt{(ax - xx)}. \text{ Sup-}$$

posant que  $AB = a$  soit le diamètre du demi-

$$\text{cercle } AQB, \text{ l'ordonnée } QP \text{ fera } = \sqrt{(ax - xx)}, \text{ \& } S. \frac{a dx}{2 \sqrt{(ax - xx)}} = S. \frac{\frac{1}{2} a dx}{\sqrt{(ax - xx)}} \text{ fera}$$

l'arc  $AQ$ ; donc  $y + C = AQ - QP$ . Mais lorsque  $y = 0$ , l'arc  $AQ$ , & l'ordonnée  $QP$  deviennent  $= 0$ ; donc  $C = 0$ , &  $y = AQ -$

QP ; c'est-à-dire, l'ordonnée de la courbe cherchée est égale à l'arc de cercle correspondant dont le diamètre est  $= a$ , moins le sinus de cet arc.

Maintenant dans la demi-cycloïde AV (fig. 54) l'ordonnée MP est égale à l'arc MV ; mais en comptant les ordonnées depuis le diamètre AV, l'ordonnée RP est égale à l'arc MV plus le sinus de cet arc, & l'on a  $FP + PM + MR = AD = VM + MD$ . Donc en retranchant d'un côté PM & de l'autre l'arc VM, on aura  $FP + MR = MAD$  ; donc FP est égale à l'arc MD moins le sinus de cet arc. C'est pourquoi si DV est supposé  $= a$ , que AF soit la ligne AP de la figure 57, le point M de notre figure sera représenté par le point P de la figure 54 ; donc la courbe cherchée est une cycloïde dont le diamètre du cercle générateur est  $= a$ .

Pour déterminer le diamètre  $a$  du cercle générateur, on remarquera que les cycloïdes étant produites par des cercles générateurs (qui sont des courbes semblables) par une loi constante, sont nécessairement des courbes semblables. Cela posé, soit A (fig. 58) le point d'où part le corps A, M celui où il doit arriver dans le moindre tems possible. Pour déterminer le diamètre  $BC = a$  du cercle générateur de la demi-cycloïde AMB, je tire la ligne AM & la ligne horisontale indéfinie AmC à laquelle je mène par le point M la perpendiculaire Mm. sur Am prise pour demi-base, je décris la demi-cycloïde Anb dans laquelle je connois la demi-circonférence Am du cercle générateur, & par conséquent je puis avoir, du moins à très-peu près le diamètre mb du cercle générateur. Par le point n je mene la ligne

$m n$ , & par le point  $M$  sa parallèle  $M C$ ,  $A C$  fera la demi-base de la cycloïde cherchée  $A M B$  : car les lignes  $A n$ ,  $A M$  également inclinés à la ligne  $A m C$  sont des lignes homologues par rapport aux demi-cycloïdes  $A b$ ,  $A B$  ; or à cause des triangles semblables  $A n m$ ,  $A M C$  on a  $A n : A M :: A m : A C$  ; donc  $A m$  &  $A C$  sont aussi des lignes homologues. Mais  $A m$  est la base de la demi-cycloïde  $A b$  ; donc  $A C$  est la base de la demi-cycloïde cherchée  $A M B$ , &  $C B$  le diamètre  $a$  du cercle dont la demi-circonférence  $\equiv A C$ .

75. PROBLEME. Déterminer la nature de la courbe  $BN$  le long de laquelle un corps  $B$  parcourera en s'approchant de l'horison  $FN$  des hauteurs égales en tems égaux, ou le long de laquelle le corps s'approchera également de l'horison en tems égaux (fig. 59). Soit  $BP = x$ ,  $Pp = dx$ ,  $PM = y$ , le tems le long de  $M m$  étant  $= dt$ , la vitesse au point  $M = \sqrt{x}$ , on aura  $\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{x}} = dt =$

$dx$ , parce que par la nature du problème les hauteurs verticales  $Pp$  sont comme les tems le long de  $M m$  ; donc ôtant la fraction, quarrant & transposant,  $dy^2 = x dx^2 - dx^2 = (x - 1) dx^2$ ,  $dy = dx \sqrt{x - 1}$ ,  $y + c = S. dx (x - 1)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} (x - 1)^{\frac{3}{2}}$ , en ajoutant une constante. En faisant  $x - 1 = z$ , on aura  $y + c = \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}$ , ou  $\frac{3}{2} (y + c)^2 = z^3$ , équation à une parabole cubique dont le paramètre  $= \frac{3}{4}$ , l'ordonnée  $= y + c$  & l'abscisse  $= z$ . Mais en supposant  $c = 0$ , comme cela est évidemment permis ici, ou ce qui revient au même en n'ajoutant point

de constante : car elle est inutile , l'on aura  $\frac{2}{4}.y^2 = z^3$  ; donc la courbe cherchée BMN est une parabole cubique dont l'abscisse AP =  $z$  , l'ordonnée PM =  $y$  , & le paramètre =  $\frac{2}{4}$ . Mais lorsque AP =  $z$  est = 0 , on a  $x = 1$  ; donc l'origine des  $x$  n'est pas en B , comme nous l'avons supposé d'abord , mais en A , en faisant AB = 1 , & le paramètre de la parabole sera  $\frac{2}{4}$ . AB =  $\frac{2}{4}.a$  , en faisant AB = 1 =  $a$  , & alors la vitesse en M sera =  $\sqrt{x} = \sqrt{AP} = \sqrt{(AB + BP)}$ . Donc au point B cette vitesse sera =  $\sqrt{AB} = \sqrt{a}$ . Ainsi pour que le mobile descende selon la loi qu'exige le problème , avant d'atteindre le sommet B de la courbe , il doit avoir acquis une vitesse égale à celle qu'un corps acquerreroit en tombant librement de la hauteur AB. Mais en faisant 1 =  $a$  , le paramètre est =  $\frac{2}{4}a$  ; donc la vitesse à l'origine B de la courbe doit être égale à celle qu'un corps acquerreroit en tombant librement d'une hauteur égale aux  $\frac{4}{9}$  du paramètre.

*Du mouvement des pilons dans les moulins à poudre.*

76. LEMME. 1°. Le cosinus d'un angle  $m$  est à son sinus , comme le rayon ( que je suppose = 1 ) est à sa tangente ; donc  $\cos. m. \text{ tang. } m. = \sin. m.$  2°. Le cosinus est au rayon comme le rayon à la sécante ; donc  $\sec. m =$

$\frac{1}{\cos. m}$ . Ce Lemme ne peut avoir aucune difficulté pour ceux qui ont lu notre Géométrie.

77. PROBLÈME. La ligne horizontale CA tangente de la courbe AKM (fig. 60) doit se mouvoir dans le plan vertical ZAC , & autour du point C , de manière qu'un des points de la courbe doit se trouver continuellement dans la verticale AZ , la tangente à ce point étant toujours horizontale , on demande la nature de la courbe AM. Supposons que la courbe AMK soit parvenue dans la

situation  $akm$ , le point  $k$  de cette courbe (qui est le même que le point  $K$ ) étant situé dans la verticale  $AZ$ ; par la nature du problème la tangente  $kt$  doit être horizontale, & l'angle  $Ckt$  sera  $= kCA = aCA - aCk = aCA - ACK = a - p$ , en faisant l'angle variable  $aCA = a$ , &  $ACK = p$ . Soit  $AC = r$ , la sécante de l'angle  $a - p$  prise dans le cercle dont le rayon  $= 1$ , est à la sécante du même angle lorsque le rayon est  $r$ , comme  $1 : r$ ; donc  $CK = Ck =$

$r. \sec. (a - p) = \frac{r}{\cos. (a - p)}$ , par le Lemme précédent. Ainsi en faisant  $CK = x$ , nous aurons  $x =$

$\frac{r}{\cos. (a - p)}$ . Du centre  $C$  avec le rayon  $x$  je décris

l'arc infiniment petit  $KN$ , & je tire la ligne  $CNM$ , pour avoir  $MN = dx$ , &  $KN = x dp$ ,  $dp$  étant un angle, ou un arc pris dans un cercle dont le rayon  $= 1$ . Maintenant  $dx : x.dp :: 1 : \tan.$   $NMT =$

$\tan. Ckt = \tan. (a - p)$ ; c'est pourquoi  $\frac{x.dp}{dx} =$

$\tan. (a - p)$ ,  $\frac{r.dp}{dx \cos. (a - p)} = \tan. (a - p)$ , ou

$\frac{r.dp}{dx} = \tan. (a - p) \cdot \cos. (a - p) = \sin. (a - p)$ ,

par le Lemme précédent.

Pour éliminer l'indéterminée  $a$ , on remarquera que

l'équation  $x = \frac{r}{\cos. (a - p)}$  donne  $\cos. (a - p) = \frac{r}{x}$ .

Mais en retranchant le quarré du cosinus de celui du rayon, il reste le quarré du sinus; donc  $\sin. (a - p)$

$= \frac{\sqrt{(xx - rr)}}{x} = \frac{r.dp}{dx}$ ; & partant  $r.dp =$

$dx \sqrt{(xx - rr)}$ .

Soit  $\sqrt{(xx - rr)} = y$ ; ou  $xx = yy + rr$ , l'on

aura  $x dx = y dy$ ,  $\frac{dx}{x} = \frac{y dy}{y^2 + rr}$ ,  $\frac{dx \sqrt{xx - rr}}{x}$   
 $= \frac{yy dy}{yy + rr} = dy - \frac{rr dy}{yy + rr}$ . Mais la tangente d'un  
 angle  $\zeta$  étant supposée  $= \frac{y}{r}$ , l'on aura  $\frac{rr dy}{yy + rr} =$   
 $r d\zeta$ . De plus  $\frac{dy}{r} = d. \text{tang. } \zeta$ ; donc  $dp = r. d. \text{tang. } \zeta$   
 $- r. d\zeta$ ,  $dp = d. \text{tang. } \zeta - d\zeta$ , &  $p = \text{tang. } \zeta - \zeta =$   
 $\frac{y}{r} - A. \text{tang. } \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{xx - rr}}{r} - A. \text{tang. } \frac{\sqrt{xx - rr}}{r}$   
 $= \sqrt{\left(\frac{xx}{rr} - 1\right)} - A. \text{tang. } \sqrt{\left(\frac{xx}{rr} - 1\right)}$ ,  
 A désignant un angle, ou si l'on veut encore un arc  
 pris dans un cercle dont le rayon  $= 1$ .

Puisque  $\frac{x dp}{dx} = \text{tang. } (a - p)$ , & que  $r dp =$   
 $\frac{dx \sqrt{xx - rr}}{x}$ , l'on a  $\frac{x dp}{dx} = \frac{\sqrt{xx - rr}}{r} =$   
 $\text{tang. } (a - p) = \text{tang. } \zeta$ ; donc  $a - p = \zeta$ , &  $a =$   
 $\zeta + p$ .

Maintenant  $r$  étant donné, on prendra  $x$  à volonté,  
 & l'on cherchera  $y = \sqrt{xx - rr}$ , ce qui fera con-  
 noître  $\text{tang. } \zeta = \sqrt{\left(\frac{xx}{rr} - 1\right)}$ , &  $p = \text{tang. } \zeta - \zeta$ ;  
 il est visible qu'on ne doit pas prendre  $x < r$ , autre-  
 ment  $y$  seroit imaginaire. Il sera donc facile de con-  
 struire la courbe AKM.

Soit AK (fig. 61) la développante d'un cercle dont  
 le rayon CA  $= r$ , DK sera égal à l'arc ABD. Sup-  
 posons l'angle BCD  $= \zeta$ , l'angle ACB  $= p$ , CK  
 $= x$ ; il est évident que l'arc ABD sera  $= r(p + \zeta)$ . Mais par la nature de la courbe AK, l'arc ABD est  
 $= DK$ ; donc  $DK = r(p + \zeta)$ . D'un autre côté le  
 triangle rectangle CDK, donne  $DK = \sqrt{xx - rr}$ ,

en faisant  $CK = x$  ; ainsi la tangente de l'angle  $BCD$  prise dans le cercle dont le rayon est  $r$ , est  $= r. (p + z)$  ; donc  $\frac{DK}{r} = (p + z)$ . Or  $\frac{DK}{r}$  est la tangente de l'angle  $z$  en prenant cet angle dans le cercle dont le rayon  $= 1$  ; ainsi  $\frac{DK}{r} = \text{tang. } z = p + z$ , &  $p = \text{tang. } z - z$ . De-là il suit que la courbe cherchée n'est autre chose que la développante d'un cercle dont le rayon  $= r$ , le rayon osculateur de la courbe  $AK$  étant toujours  $= r(p + z) = r.a$ .

78. POUR faire l'application de ce problème à la mécanique, soit  $P$  (fig. 62) un de ces pilons dont on se sert dans les moulins à poudre ou à papier, portant une piece transversale  $H$  qu'on nomme le *mentoné* ou la *dent* du pilon, & qui doit lui être perpendiculaire. La levée  $ak$  qui se meut avec le rayon  $aC$  autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical  $ZACa$  par l'action d'une roue que l'eau met en mouvement, élève la piece  $H$  & avec elle le pilon  $P$ , de maniere que l'extrémité de la dent  $H$  doit toujours se trouver dans la verticale  $AZ$ . C'est pourquoi pour que la levée  $ak$  puisse glisser le plus facilement qu'il est possible sous la dent du pilon qui doit retomber quand il est parvenu à une certaine hauteur, il est nécessaire que la tangente au point  $k$  qui se trouve dans la verticale  $AZ$  soit continuellement horisontale ; ainsi la figure de la levée  $ak$  doit être une portion de la développante d'un cercle dont le rayon  $= CA$ .

Supposons que le rayon  $CA$  décrit un cercle entier dans un nombre  $n$  de secondes ; si nous faisons  $1 : c$  le rapport du rayon à la circonférence, l'angle  $aCA = a$  sera décrit dans un tems exprimé par  $\frac{n.a}{c}$ , & divisant l'angle  $a$  par le tems employé à le décrire,  $\frac{c}{n}$  sera la vitesse angulaire de la ligne  $CA$ , c'est-à-dire, sera l'angle que décrit la ligne  $CA$ , ou  $Ca$  à chaque seconde. C'est pourquoi (fig. 63) ayant tiré  $kp$

perpendiculaire à  $Ck$ , le point  $k$  aura dans la direction  $k p$  une vitesse exprimée par  $\frac{c \cdot x}{n}$ , en faisant  $Ck = x$ , & il décrira un arc  $= x \cdot da$  ( $a$  est un arc variable) dans le même-tems  $dt$  que le point  $a$  décrit l'arc  $r \cdot da$ .

Ayant mené l'horizontale  $p q$ , les triangles  $p q k$ ,  $Ck A$  seront semblables; car ils ont un angle droit, l'un en  $q$ , l'autre en  $A$ ; mais de plus l'angle  $p k q = k C A$ , puisqu'ils sont tous les deux complémens de  $C k A$ ; donc la vitesse horizontale du point  $k$  est  $=$

$$\frac{p q}{p k} \cdot \frac{c \cdot x}{n}. \text{ Mais } p k : p q :: 1 : \sin. k C A = \sin. \zeta ;$$

donc la vitesse horizontale du point  $k$  est  $= \frac{x c}{n} \sin. \zeta$

$$= \frac{c}{n} \cdot r \tan g. (a - p) = \frac{c}{n} \cdot r \tan g. \zeta, \text{ en substituant}$$

la valeur  $\frac{r}{\cos. (a - p)}$  de  $x$ . Mais  $\tan g. (a - p) =$

$$\tan g. \zeta = p + \zeta = a; \text{ donc cette vitesse est } = \frac{c}{n} \cdot r \cdot a.$$

de même la vitesse verticale du point  $k$  est  $= \frac{c}{n} \cdot x \cos. \zeta$

$$= \frac{c \cdot r \cdot \cos. \zeta}{n \cdot \cos. \zeta} = \frac{c \cdot r}{n}, \text{ quantité constante qui nous fait voir}$$

que le mouvement du pilon en montant est uniforme.

Si l'on fait maintenant  $c : n :: da : dt = \frac{n da}{c}$ , on aura le tems employé à décrire l'arc infiniment petit  $da$ , &  $t = \frac{n a}{c}$ . Or  $t$  exprime le tems que la dent  $H$  met à monter de  $A$  en  $k$ , ou le tems que la levée met à glisser de  $a$  en  $k$ .

Supposons à présent que le poids du pilon étant  $= P$ ,  $\frac{P}{m}$  exprime le frottement, c'est-à-dire, que la raison de



de la pression au frottement soit  $= \frac{P}{m}$ , & que l'effet du frottement doive s'estimer par le produit du tems (que le corps frotte) & de la vitesse avec laquelle s'exécute le frottement (c'est ici la vitesse horisontale),  $\frac{P}{m} \cdot \frac{c}{n} \cdot r \cdot a \cdot dt$   
 $= \frac{Pr \cdot a \cdot d a}{m}$  sera l'effet du frottement pendant le tems  
 $dt$ , &  $\frac{Pr \cdot a^2}{2m}$  exprimera cet effet pendant le tems  $t$   
 employé à élever la dent H de A en k.

La maniere d'estimer l'effet du frottement que nous venons de donner n'est peut-être pas exacte; mais dans une matiere aussi difficile, aussi obscure, & aussi incertaine que l'est encore la théorie du frottement, on doit se contenter d'une méthode moins rigoureuse quand on ne peut pas parvenir à la justesse géométrique dont les solutions d'un très-grand nombre de Problèmes Physico-Mathématiques ne paroissent pas susceptibles; parce qu'on n'a pas assez de données pour les résoudre.

*Des puissances qui tendent les cordes ou les fils.*

79. PROBLÈME. Soit une corde ACBD attachée aux points immobiles A, D & tendue par des puissances quelconques  $CP = p$ ,  $BQ = q$ , déterminer le rapport de  $p$  à  $q$  pour que la corde reste dans la situation ACBD (fig. 64). Ayant prolongé les directions PC, QB des puissances  $p$  &  $q$ , de maniere que EC soit  $= p$ , & BI  $= q$ , j'acheve les parallelogrammes GCFE, BHIK, la tension de la corde CB (exprimée par la force CF) sera à la puissance  $p$  comme CF : CE. Mais dans l'équilibre la corde CB sera également tendue dans la direction CB & dans la direction BC; donc l'action BK est  $= CF$ ; donc la puissance  $q$  est à la tension B selon BC comme

Tome V.

Cc

$BI : BK = CF$ ; donc  $p = \frac{B. CE}{CF}$ ,  $q = \frac{B. BI}{CF}$ , &  $q : p :: CE : BI$ ; mais  $BI : BK =$   
 $IH :: \sin. IHB = \sin. DHI = \sin. CBD :$   
 $\sin. IBD$ , &  $CF : CE :: \sin. CEF = \sin. ACE :$   
 $\sin. EFC = \sin. ACB$ . Si l'on multiplie les deux  
 proportions  $BI : BK :: \sin. CBD : \sin. IBD$ , &  
 $CF = BK : CE :: \sin. ACE : \sin. ACB$ , il sera aisé  
 de voir que  $q : p :: BI : CE :: \sin. CBD. \sin. ACE :$   
 $\sin. IBD. \sin. ACB$ .

COROLLAIRE. Si deux puissances  $BQ = q$ ,  
 $NB = m$  sont supposées être appliquées au point  
 B, tandis que deux autres puissances  $PC = p$ ,  
 $CR = R$  agissent sur le point C (fig. 65), on  
 déterminera facilement les conditions de l'équi-  
 libre entre ces puissances. Car si les puissances  $p$   
 &  $q$  étoient seules, on auroit  $q : p :: \sin. CBD \times$   
 $\sin. ACE : \sin. IBD. \sin. ACB$ , ou  $p. \sin. CBD \times$   
 $\sin. ACE = q. \sin. IBD. \sin. ACB$ . Si les seu-  
 les puissances  $m$  &  $R$  agissoient, on auroit  
 $R. \sin. CBD. \sin. ACL = m. \sin. MBD. \sin. ACB$ .  
 Mais l'équilibre ne sauroit subsister, à moins que  
 la corde ne soit également tirée dans la direc-  
 tion CB & dans la direction BC; il est donc  
 nécessaire que l'on ait l'équation  $p. \sin. CBD \times$   
 $\sin. ACE + R. \sin. CBD. \sin. ACL = q \times$   
 $\sin. IBD. \sin. ACB + m. \sin. MBD. \sin. ACB$ , ou  

$$\frac{p. \sin. ACE}{\sin. ACB} + \frac{R. \sin. ACL}{\sin. ACB} = \frac{q. \sin. IBD}{\sin. CBD} + \frac{m. \sin. MBD}{\sin. CBD}$$

80. PROBLEME. Trouver la nature de la courbe  
 que forme un fil dont chaque point reçoit l'action de  
 deux puissances quelconques, dont l'une est perpen-

diculaire à la courbe, tandis que l'autre est toujours parallèle à une ligne donnée de position (fig. 66). Que  $AC$ ,  $CB$ ,  $BD$  représentent trois élémens de la courbe cherchée, qu'on prenne  $HT$  pour l'axe des abscisses, & qu'on mène l'ordonnée  $GA = y$ , à laquelle les directions des puissances  $RC = R$ ,  $NB = m$  soient supposées parallèles. A cause que les angles  $ACB$ ,  $CBD$  diffèrent infiniment peu de deux angles droits, & que les puissances  $CP = p$ ,  $BQ = q$  sont perpendiculaires à la courbe, leurs directions coupent en deux parties égales (& dont chacune diffère infiniment peu d'un angle droit) les angles  $ACB$ ,  $CBD$ . Qu'on mène les lignes  $Aa$ ,  $Ah$ ,  $Ac$ , respectivement perpendiculaires à  $PE$ ,  $BC$ ,  $gC$ ; ayant pris  $AC$  pour sinus total  $= 1$ , on aura  $Aa = \sin. ACE$ ,  $Ah = \sin. ACh = \sin. ACB$  &  $Ac = \sin. ACg$ . Mais  $ACB$  est double de  $ACE$ , dont le cosinus est  $Ca$ ; donc  $Ah = 2. Aa. Ca$  (Géo. 136)  $= 2. Ca$ , parce que  $Aa$  diffère infiniment peu de  $AC = 1$ . On trouvera de même que  $Cn = \sin. CBD = 2. Bb$ ; mais  $fD = \sin. DBT$ .

Cela posé, les puissances  $p$ ,  $q$ ,  $R$ ,  $m$  doivent (par le Corollaire précédent) être telles que l'on ait

$$\frac{p. \sin. ACE}{\sin. ACB} + \frac{R. \sin. ACg}{\sin. ACB} = \frac{q. \sin. TBD}{\sin. CBD} + \frac{m. \sin. TBD}{\sin. CBD},$$

ou (en substituant les valeurs des sinus (& faisant attention que  $Aa = CA$ ,  $Cb = CB$ ),

$$\frac{p. AC}{2Ca} + \frac{R. Ac}{2Ca} = \frac{q. CB}{2Bb} + \frac{m. fD}{2Bb} \dots (H).$$

Soit  $CE$  le rayon de courbure  $= T$ , on aura

$$Cc 2$$

$Ca = \frac{AC^2}{2T}$  (\*), ou  $2Ca = \frac{ds^2}{T}$ . Soit  $BI = V$  le rayon osculateur au point B de la courbe, on aura  $2Bb = \frac{AC^2}{V}$  (en faisant  $AC = BC$ , ou en

supposant  $ds$  constant)  $= \frac{ds^2}{V}$ . Soit  $HG = x$ ,

$Gg = Ac = dx$ ; donc  $gT$  différentielle de  $Hg = x + dx$ , sera  $= dx + ddx$  &  $Tt = fD$  différentielle de  $HT = x + 2dx + ddx$ , sera  $= dx + 2ddx$ , en négligeant la différentielle  $d^3x$ , qui est ici inutile. Mais la puissance est  $q = p + dp$ ,  $m = R + dR$ , &  $V = T + dT$ ; ces quantités étant introduites dans l'équation (H), elle deviendra

$$\frac{p.T}{ds} + \frac{R.Tdx}{ds^2} = \frac{(p+dp).(T+dT)}{ds} + \frac{(R+dR).(T+dT).(dx+2ddx)}{ds^2}.$$

Effectuant les multiplications indiquées, effaçant ensuite les quantités communes aux deux membres de l'équation, & omettant les termes  $\frac{dT.dp}{ds}$ ,  $\frac{2R.dTddx}{ds^2}$ ,

&c. qui s'évanouissent devant les autres, nous trouverons l'équation  $0 = \frac{p.dT}{ds} + \frac{Tdp}{ds} + \frac{RdTdx}{ds^2} + \frac{2RTddx}{ds^2} + \frac{TdR.dx}{ds^2}$ , ou  $(p dT + T dp) ds$

(\*) Car le sinus versé d'un arc circulaire évanouissant est égal au carré de l'arc divisé par le diamètre. Voyez ce que nous avons dit dans les Sections Coniques à l'occasion du rayon osculateur.

$+RdTdx + RTddx + TdRdx = -RTddx$ .  
 Dont l'intégrale (à cause de  $ds$  constant) sera  
 $pTds + RTdx = C - S.RTddx$ . Mais (Section 1., n°. 103) le rayon osculateur  $T$  est  $= \frac{dsdy}{ddx}$ ; donc  $pTds + RTdx = C - ds.SRdy$ ,  
 équation qui détermine la courbe cherchée.

Si le fil est tendu par les seules forces perpendiculaires à la courbe, on aura  $R = 0$ , & l'équation de la courbe deviendra  $pTds = C$ ,  
 ou  $p = \frac{C}{Tds}$ ; c'est-à-dire, que les puissances normales seront en raison inverse des rayons osculateurs, à cause de  $ds$  constant. Si les puissances normales sont toutes égales & proportionnelles à l'élément  $ds$  de la courbe, il est visible qu'on aura  
 $T = \frac{C}{pds} = c$ , quantité constante; c'est-à-dire que

le rayon osculateur sera constant, ainsi la courbe cherchée sera un cercle. Donc si une corde ou une surface flexible & non pesante est poussée en chacun de ses points, par des forces égales & qui lui soient perpendiculaires, elle prendra une courbure circulaire, si c'est une corde, & une courbure sphérique si c'est une surface fermée de toutes parts. On peut comprendre par là pourquoi les bulles d'air qui se dégagent d'une liqueur échauffée, de l'eau, par exemple, prennent la figure sphérique: l'air intérieur en se dilatant, presse également & perpendiculairement tous les points de la surface de la bulle.

Si les forces perpendiculaires à la courbe sont

nulles, nous aurons  $p = 0$ , & notre équation deviendra  $R dT \cdot dx + RT ddx + T dR dx = -RT dx$ , qui, en transposant & divisant par  $TR dx$ , se change en celle-ci  $\frac{dT}{T} + \frac{2 ddx}{dx} = -\frac{dR}{R}$ , dont l'intégrale est  $L. T + 2 L. dx = 2 L. a ds - L. R$  (en ajoutant la constante  $2 L. a ds$ ); ou  $T dx^2 = \frac{a^2 ds^2}{R}$ , d'où l'on tire  $T = \frac{a^2 ds^2}{R dx^2}$ . Mais le sinus total étant supposé  $= 1$ ,  $\frac{dx}{ds}$  est le sinus de l'angle de la courbe avec l'ordonnée; ainsi dans cette hypothèse les puissances parallèles sont en raison inverse des rayons osculateurs & des carrés des sinus des angles que les directions de ces puissances font avec la courbe.

COROLLAIRE. Si les puissances  $R$  représentent les poids des élémens du fil dont la pesanteur spécifique (c'est-à-dire par exemple le poids d'un ponce de ce fil) soit  $= g$ , nous aurons  $R = g ds$ . Si dans l'équation  $p T ds + R T dx = C - ds$ . Si  $R dy$ , on substitue  $g ds$  au lieu de  $R$ ,  $\frac{dy ds}{ddx}$ , au lieu de  $T$ ,  $a^2 ds^2$  à la place de  $C$ , ce qui est très-permis, & qu'on fasse  $p = 0$ , il viendra  $\frac{g dy ds^2 dx}{ddx} = a^2 ds^2 - ds^2$ . S.  $g dy$ , ou  $g dy dx = a^2 ddx - g y ddx$ , ou  $g dy dx + g y ddx = a^2 ddx$ , dont l'intégrale, en ajou-

tant la constante  $b^2 ds$ , est  $gy dx = a^2 dx + b^2 ds$ . Mais  $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ; donc  $gy dx - a^2 dx = b^2 \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ,  $dx^2 (gy - a^2)^2 = b^4 (dx^2 + dy^2)$ , ou  $dx = \frac{b^2 dy}{\sqrt{(gy - a^2)^2 - b^4}}$ , ou en faisant  $gy - a^2 = z$ ,  $dx = \frac{b^2 dz}{g \sqrt{(z^2 - b^4)}}$ , équation de la chaînette & qui est de la même forme que celle que nous avons trouvée ci-dessus (\*).

81. PROBLÈME. Déterminer la courbure d'un fil  $Aa$  sans pesanteur tendu par une tringle de fer  $BD$  (fig. 67) par le moyen des cordons  $aC$  attachés à tous les élémens de ce fil. Tous les élémens  $aa$  du fil étant tendus par la partie correspondante  $CC$  de la tringle, les puissances  $R$  sont comme les différentielles  $AM = dx$ . que  $g$  représente la gravité spécifique de la tringle,  $R$  sera  $= g dx$ ; parce que  $p = 0$ , en mettant dans

(\*) Il est visible que  $x = S. \frac{b^2}{g} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - b^4)}}$ , & que  $\frac{dz}{\sqrt{(z^2 - b^4)}}$  est la différentielle de  $L.[z + \sqrt{(z^2 - b^4)}]$ . Il n'est donc pas difficile d'intégrer l'équation ci-dessus; je ne m'y arrête pas, parce que nous avons déjà construit la courbe dont il s'agit. Il n'est pas non plus difficile de comprendre qu'en faisant abstraction de la pesanteur d'une voile enflée par le vent, en la supposant cependant rectangulaire, & que les deux bords opposés supérieur & inférieur forment une ligne droite; il n'est pas, dis-je, difficile de comprendre que toutes les coupes de la voile faites par des plans parallèles à la direction du vent, formeront une courbe de la même nature que la chaînette, pourvu qu'on suppose que les particules d'air s'échappent après qu'elles ont fait leur choc.

l'équation  $T = \frac{a^2 ds^2}{R dx^2}$ ,  $g dx$  au lieu de  $R$ , &  $\frac{dy ds}{ddx}$  à la place de  $T$ , nous trouverons  $\frac{dy}{ddx} = \frac{a a ds}{g dx^2}$ , où  $g dy = a a ds \cdot \frac{d dx}{dx^2}$ , dont l'intégrale (à cause de  $ds$  constant) sera  $gy = -\frac{a a ds}{2 dx^2}$ .

Puisque  $a^2$  est une constante arbitraire, on peut, afin de conserver l'homogénéité de l'équation, écrire  $-b ds$  au lieu de  $a^2$  pour avoir  $gy = \frac{b ds^2}{2 dx^2}$ . Mais  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ; donc  $dx =$

$\frac{dy \sqrt{b}}{\sqrt{(2gy - b)}}$ , dont l'intégrale est  $x = \frac{\sqrt{b}}{g} \times \sqrt{(2gy - b)}$ , ou  $g^2 x^2 = b(2gy - b) + C$ . En examinant cette équation avec un peu d'attention, il n'est pas difficile de s'apercevoir qu'elle appartient à la parabole d'Apollonius; ainsi la courbe cherchée  $Am$  est une parabole vulgaire. Mais laissons-là cette théorie plus curieuse qu'utile, & passons à des recherches plus importantes.

#### *Des machines accélérantes & uniformes.*

§2. DÉFINITIONS. J'appelle machines accélérantes celles qui sont mises en mouvement par des puissances accélérantes ou retardantes. J'appellerai machines uniformes celles qui sont mises en mouvement par des puissances dont l'action est uniforme.



Les puissances qui font mouvoir les machines font les poids, les animaux, les fluides.

83. PROBLÈME. Soit le levier  $ACB$  mobile autour du point  $C$ , & chargé de deux poids  $P$  &  $Q$  qui ne soient pas en équilibre, on demande le tems de la descente du poids  $P$  ou de la montée du poids  $Q$  (fig. 68). Soit  $AC = a$ ,  $CB = b$ , si les poids étoient en équilibre, on auroit  $a : b :: Q : P = \frac{bQ}{a}$ . Donc pour que  $P$  fasse mouvoir la machine, on doit avoir  $P > \frac{bQ}{a}$ ; & la puissance qui accélérera le mouvement du levier fera  $= P - \frac{bQ}{a}$ . Puisque cette puissance étant appliquée au point  $Q$ , doit accélérer le mouvement de  $P$  & de  $Q$ , si au lieu de la masse  $Q$ , on substitue au point  $A$  une autre masse représentée par  $\frac{bQ}{a}$ , elle doit recevoir le même mouvement à la distance  $AC$ , que  $Q$  à la distance  $CQ$ . C'est donc la même chose que si la puissance  $P - \frac{bQ}{a}$  devoit faire mouvoir les masses  $P + \frac{bQ}{a}$ . Donc la vitesse accélératrice, qui est toujours égale à la puissance accélérante divisée par la masse sur laquelle elle agit, ou qui est en raison inverse de la masse & en raison directe de la force motrice, sera  $= \frac{(aP - bQ)a}{Pa + Qb}$ .

Que  $g$  représente la force accélératrice,  $\frac{v}{2}$  l'espace que cette cause fait parcourir dans une seconde aux corps qui sont exposés à son action,  $t$  le tems que le corps  $P$  met à descendre. On fait qu'avec la vitesse acquise au bout du tems  $t$ , le corps  $P$ , s'il étoit livré à lui-même, parcoureroit d'un mouvement uniforme un espace double de celui qu'il vient parcourir ; mais la vitesse est comme le produit du tems & de la force  $g$  ; donc  $\frac{v}{2} = gdt$ , &  $v = 2gdt$ . Mais dans le mouvement uniforme, tel qu'on peut le considérer pendant le tems  $dt$ , l'espace est comme la vitesse ; donc  $v$  peut représenter la vitesse. Si la force que nous prenons pour l'unité de force, en prenant en même tems 1" pour l'unité de tems, n'est pas celle de la gravité, qu'elle en soit ou un multiple ou une partie désignée par  $\frac{(Pa - bQ)a}{Pa a + Qbb}$ , il est aisé de voir que dans ce cas, après le tems  $t$ , l'on aura  $v = 2gt \times \frac{(Pa - bQ)a}{Pa a + Qbb}$ . Mais  $a : b :: v : \frac{bv}{a}$ , vitesse du poids  $Q$  ; donc cette vitesse sera  $= 2gt \times \frac{(Pa - bQ)b}{Pa a + Qbb}$ .

Soit l'espace parcouru  $= x$ , l'on aura  $dx = vdt$ , &  $dt = \frac{dx}{v}$ . Donc  $v dv = 2g dx \frac{(Pa - bQ)a}{Pa a + Qbb}$  ;  
 &  $v^2 = 4gx \frac{(Pa - bQ)a}{Pa a + Qbb} = 4g^2 t^2 \frac{(Pa - bQ)^2 a^2}{(Pa a + Qbb)^2}$ ,  
 &  $x = \frac{g t^2 (Pa - bQ)a}{Pa a + Qbb}$ .

La solution de ce problème peut s'appliquer facilement aux autres machines accélérantes qui peuvent toutes, excepté le plan incliné, se réduire au levier. S'il s'agit d'une poulie, dans ce cas les distances (ce sont les bras de levier)  $a$  &  $b$  sont égales, aussi-bien que les vitesses des poids  $P$  &  $Q$ , la vitesse de chacun sera  $= 2gt \frac{P-Q}{P+Q}$ ; & l'espace  $x$  que chacun parcourera dans le tems  $t$  sera  $= g t^2 \frac{(P-Q)}{P+Q}$ . Soit  $t = 61''$   $P = 12$  livres,  $Q = 4$ ,  $g = 15$  pieds, on aura  $x = 270$ , c'est-à-dire que l'espace que l'un & l'autre corps parcoureront dans  $61''$  fera de 270 pieds.

84. PROBLEME. Déterminer la construction d'une machine accélérante qui doit rendre la vitesse du fardeau  $Q$  un maximum. Si dans l'expression  $\frac{(Pa - Qb)b}{Pa a + Qbb}$  de la vitesse de  $Q$ , on considère  $b$  comme un maximum, on aura, dans ce cas l'équation,  $\frac{(Pa - 2Qb)db}{Pa a + Qbb} - \frac{2Qbbdb(Pa - Qb)}{(Pa a + Qbb)^2} = 0$ ; d'où l'on tire  $(Pa a + Qbb) \cdot (Pa - 2Qb) = 2Qbb(Pa - Qb)$ ,  $b^2 + 2ab = \frac{Pa a}{Q}$ , &  $b = -a + \sqrt{\left(\frac{Pa a}{Q} + a^2\right)}$ , ou  $\frac{b}{a} = -1 + \sqrt{\left(\frac{P+Q}{Q}\right)}$ ; donc la machine doit être construite de manière que l'on ait  $1 : -1 +$

$\sqrt{\left(\frac{P+Q}{Q}\right)} :: a : b$ . Comme le plan incliné n'appartient pas aux machines qu'on peut réduire au levier, nous allons donner une solution particulière pour cette machine.

§5. PROBLÈME. Si la masse  $Q$  placée sur un plan incliné  $AB$  (fig. 69) doit être enlevée par le poids  $P$  au moyen d'une corde qui joint ces deux masses & qui passe sur la poulie  $F$ , on demande l'inclinaison du plan pour que le tems de l'élévation du poids  $Q$  soit le plus petit possible, nous supposons la portion  $FQ$  de la corde parallèle au plan incliné. Soit  $AB = x$ ,  $AC = a$ , la masse  $Q$  descendra sur le plan incliné par l'action d'une force  $= \frac{Qa}{x}$  (\*). Il est donc nécessaire que

$P > \frac{Qa}{x}$ . Ainsi la force accélératrice sera  $= \frac{Px - Qa}{x(P+Q)}$ , quantité constante qui ne dépend pas de la variable  $x$  ou de la longueur du plan. Soit  $\frac{Px - Qa}{x(P+Q)} = z$ ; à cause de  $dt =$

(\*) Si l'on décompose la force verticale  $Qp$  qui pousse le corps  $Q$  vers le centre de la terre, en  $QM$  perpendiculaire, &  $QN$  parallèle au plan  $AB$ , la première étant détruite par la résistance du plan; la seconde agira seule pour faire descendre le corps vers  $B$ . Les triangles  $ACB$ ,  $QMP$  sont évidemment semblables, & donnent  $x : a :: QP = Q :$

$MP = QN = \frac{Qa}{x}$ . Mais cette force est la même sur tous les points du plan incliné; & le rapport de  $a : x$ , ou de  $\sin. ACB : AB$  demeurant le même, elle ne sauroit varier.

$\frac{dx}{v}$ , & de  $dv = 2g\zeta dt$ , on aura  $dv = \frac{dx}{v} 2g\zeta$ ,  
 ou  $v dv = 2g\zeta dx$ , ou  $v^2 = 4g\zeta x$ , parce que  
 $\zeta$  est constant. Mais le tems de la montée étant  
 supposé  $= t$ , on aura  $dt = \frac{dx}{v} = \frac{dx}{2\sqrt{g\zeta x}}$ , d'où

l'on tire  $t = \sqrt{\left(\frac{x}{g\zeta}\right)} = \frac{x\sqrt{(P+Q)}}{\sqrt{(gPx - a gQ)}}$ . La con-  
 dition du *maximum* donnera (en divisant par  
 $\sqrt{(P+Q)}$  & par  $\frac{dx}{\sqrt{g}}$ ),  $0 = (Px - Qa)^{-\frac{1}{2}}$

$-\frac{1}{2} Px (Px - Qa)^{-\frac{1}{2}}$ . Si l'on multiplie cette  
 équation par  $(Px - Qa)^{\frac{1}{2}}$ , on trouvera aisé-  
 ment  $\frac{1}{2} Px = Qa$ , ou  $Px = 2Qa$ ; donc  $x : a$   
 :: *sinus total* : *sin. ABC* ::  $2Q : P$ ; c'est-à-dire,  
*que si le sinus total est au sinus que fait le plan in-*  
*cliné avec la base comme le double du poids Q est*  
*au poids P, le poids Q sera enlevé dans le moindre*  
*tems possible (\*)*; & parce que  $x = \frac{2Qa}{P}$ , le tems

de la montée sera  $= \frac{2}{P} \sqrt{\left(\frac{Qa}{g} \cdot (P+Q)\right)}$ .

REMARQUE. Quand il s'agit d'estimer l'action des  
 hommes ou des animaux, il faut avoir égard à la  
 vitesse avec laquelle ils marchent; car ils peuvent  
 exercer une plus grande force, lorsque sans avoir au-  
 cun mouvement progressif, ils font effort pour mou-  
 voir un corps par le moyen des pieds ou des mains.  
 Bien plus un animal qui marche avec une grande

(\*) Si  $Q = P$ , l'angle  $ABC$  doit être de  $30^\circ$ .

vitesse, ne peut employer aucune force pour traîner ou pour pousser un obstacle. Plusieurs Physiciens, principalement Amontons & Desaguliers ont fait différentes expériences pour déterminer les forces des animaux; mais ils n'ont pas déterminé le rapport selon lequel leur force décroît eu égard à leur vitesse.

86. PROBLÈME. *Déterminer l'action des animaux dans le mouvement des machines.* Il semble qu'on peut comparer l'action d'un animal qui met une machine en mouvement avec celle d'un fluide qui agit sur un obstacle. Or l'action d'un fluide qui frappe perpendiculairement un plan immobile  $F$ , avec une vitesse  $c$ , est  $= F.c^2$ ; mais si le plan se meut avec la vitesse  $v$ , cette action sera comme  $F(c-v)^2$ . Soit  $A = F.c^2$  ou  $F = \frac{A}{c^2}$ ,  $\frac{A}{c^2}(c-v)^2 = A.(1 - \frac{v}{c})^2 = P$  sera l'action que le fluide (dont la densité est supposée  $= 1$ ) exercera sur le plan mobile. Comme cette action décroît lorsque la vitesse augmente, elle ressemble en cela à l'action d'un animal dont la force pour mouvoir un obstacle décroît aussi lorsque sa vitesse augmente. La quantité  $A$  représentera l'action d'un animal qui n'a aucun mouvement progressif,  $c$  la vitesse qui ne permet pas à l'animal d'exercer aucune puissance, &  $P$  l'effort que peut faire l'animal lorsqu'il a la vitesse  $v$ . Or la formule  $A.(1 - \frac{v}{c})^2 = P$  satisfait aux conditions de la question. Si l'animal n'ayant aucune vitesse progressive, agit sur un obstacle par le moyen seulement de ses muscles, on aura

$v = 0$  &  $A = P$ . Si l'animal se meut avec la plus grande vitesse  $c$ , on aura  $v = c$ , &  $P = 0$ .

Par les expériences de l'illustre Defaguliers il paroît que l'effort d'un homme qui agit au moyen de ses seuls muscles équivaut à 80 livres  $= A$ , tandis qu'en se mouvant avec une vitesse de 3.5 pieds par seconde, il peut exercer une action  $P = 30$  livres. Substituant ces valeurs dans la formule ci-dessus, on aura la plus grande vitesse  $c$  qui fait perdre à l'homme toutes ses forces. Or

$$1 - \frac{v}{c} = \sqrt{\left(\frac{P}{A}\right)}, \text{ donc } c = \frac{v \sqrt{A}}{\sqrt{A} - \sqrt{P}}; \text{ donc}$$

$c = 9.6$  pieds, c'est-à-dire qu'un homme qui parcourroit à chaque seconde 9.6 pieds ne pourroit exercer aucune force sur un obstacle; & puisque six hommes font à peu-près autant d'effort qu'un cheval, la formule pour un cheval sera  $P =$

$$6. A \left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

87. THÉOREME. *Pour entretenir le mouvement des machines uniformes, on a besoin de la même puissance que pour conserver leur équilibre.* Les puissances qui font mouvoir les machines uniformes sont des animaux ou des fluides; mais les fluides conservant une vitesse uniforme, du moins sensiblement pendant un certain tems, le mouvement de la machine ne peut manquer de parvenir bientôt à l'uniformité: car le frottement, la tension des cordes, l'inertie de la machine étant comprises dans le fardeau qu'on doit mettre en mouvement, & opposant toujours (au moins sensiblement) la même résistance, le moment de la résistance ne peut manquer d'être égal à celui du

fluide choquant, & aussi-tôt que la machine aura un mouvement uniforme, il faudra employer pour le conserver, l'action d'une puissance égale à l'action & à la réaction, qui naît de l'inertie, & qui est égale au fardeau qu'on doit mettre en mouvement. S'il s'agit des animaux, dès qu'ils auront produit le mouvement de la machine, ils continueront (du moins sensiblement, & pendant un certain tems) à se mouvoir avec la vitesse uniforme  $v$ , à moins que fatigués par un travail trop violent, ils ne perdent subitement leurs forces. Il y a véritablement des machines hydrauliques, qui sont mises en mouvement par des puissances non uniformes; mais on a accoutumé de les construire de manière que dans la pratique leur mouvement peut être regardé comme uniforme, ou du moins que leurs puissances accélératrices ou retardatrices puissent être réduites à une force moyenne, qu'on peut regarder comme uniforme.

88. PROBLÈME. *Etant donnée la construction d'une machine uniforme, le fardeau  $Q$  & la vitesse de ce fardeau, trouver combien d'hommes, ou de chevaux, l'on doit appliquer à la machine, & déterminer en même tems son effet.* Comme cette machine peut se réduire à un levier dont les bras seroient  $a$  &  $b$ , l'on aura à cause du mouvement

uniforme de cette machine,  $A \left(1 - \frac{v}{c}\right)^2 a =$

$Q.b$ , lorsque la machine doit être mise en mouvement par un seul homme. Si le nombre des hommes est  $= n$ , la formule deviendra

$$n A \left(1 - \frac{v}{c}\right)^2 a$$



$n A \left( 1 - \frac{v}{c} \right)^2 a = Q. b$ . Soit  $u$  la vitesse du fardeau, l'on aura  $b : a :: u : v = \frac{au}{b}$ , & par conséquent  $n A \left( 1 - \frac{au}{bc} \right)^2 a = Q. b$ , &  $n = \frac{Q. b : A a \left( 1 - \frac{au}{bc} \right)^2}{(*)}$ .

Si l'on employoit des chevaux au lieu des hommes, l'on auroit  $n = \frac{Q. b}{a} : 6 A \left( 1 - \frac{au}{bc} \right)^2$ . Mais  $\left( 1 - \frac{au}{bc} \right)^2 = \frac{Q. b}{n A a}$ ; donc  $u = \left( 1 - \frac{\sqrt{Q. b}}{\sqrt{n A a}} \right) \times \frac{bc}{a}$ ; ainsi l'effet de la machine fera  $= Q. u = \left( 1 - \frac{\sqrt{Q. b}}{\sqrt{n A a}} \right) \cdot \frac{Q. b c}{a}$ , effet qui fera en même-tems égal au moment de la puissance. Or la vitesse  $v = \frac{au}{b}$  doit être plus petite que 9. 6 dans une seconde de tems. On ne peut donc pas espérer de lever par le moyen d'une telle machine, un poids à la hauteur de plus de 9 pieds environ dans une seconde.

89. PROBLEME. Déterminer la construction d'une machine uniforme, mise en mouvement par des animaux, qui produise le plus grand effet possible.

(\*) Cette expression indique la division de  $Q. q$  par  $A a \left( 1 - \frac{au}{bc} \right)^2$ .

Tome V.

D d

Comme la construction de cette machine dépend des quantités  $a$  &  $b$ , supposons  $\frac{b}{a} = \zeta^2$ , l'effet de la machine sera  $Q.u = \left(1 - \zeta \sqrt{\frac{Q}{nA}}\right) Q c \zeta^2$ , dont le *maximum* donnera  $2\zeta - 3\zeta^2 \sqrt{\frac{Q}{nA}} = 0$ , ou  $\zeta = \frac{2\sqrt{An}}{3\sqrt{Q}}$ ; d'où l'on tire  $\frac{b}{a} = \zeta^2 = \frac{4An}{9Q}$ . Mais parce qu'on fait ordinairement  $b < a$ , on pourra supposer  $\frac{b}{a} = \frac{1}{p}$ , ce qui donnera  $p$

$$= \frac{Q}{37n} \text{ (à peu-près en faisant } A = 80 \text{ livres).}$$

Donc la construction de la machine sera la plus avantageuse qu'il est possible, lorsqu'on aura  $a : b :: Q : 37.n$  (37 désignant 37 livres); mais

$$\text{alors } u = \left(1 - \zeta \sqrt{\frac{Q}{nA}}\right) c \zeta^2 \text{ devient } = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{4cnA}{9Q} = \frac{4cnA}{27Q}. \text{ D'un autre côté } b : a :: u : v$$

$$= \frac{au}{b} = \left(\frac{4Acn}{27Q}\right) \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{4Anc}{27Q}\right) \cdot \frac{9Q}{4An} = \frac{c}{3}.$$

Donc la vitesse de l'homme doit être égale au tiers de la plus grande vitesse, laquelle est  $= 9.6$ ; ainsi  $v = 3.2$ . C'est pourquoi les hommes produiront le plus grand effet possible, lorsqu'ils auront une vitesse de 3.2 pieds par seconde,

$$\& \text{ la vitesse du fardeau sera } u = \frac{bv}{a} = \frac{bc}{3a} \text{ pieds;}$$

& parce que  $a > b$ , il est visible que  $u < 3.2$  pieds par secondes.

Ainsi le plus grand effet possible sera  $Q.u = \frac{4 A n c}{27}$ , auquel chaque homme contribuera pour

une portion  $P = A \left( 1 - \frac{v}{c} \right)^2 = 80. \frac{4}{9} = 37$

livres, qu'il doit élever en s'élevant avec une vitesse de 3.2 par seconde.

Dans le problème précédent nous n'avons fait attention ni au frottement ni à la roideur des cordes. Les Physiciens, fondés sur un grand nombre d'expériences, qu'on peut regarder à peu-près comme exactes, ont établi que le frottement est égal à une certaine partie de la pression qu'un corps exerce sur une surface; mais cette partie est différente selon que les corps sont différens. Il faut même avoir l'attention de ne pas faire frotter les corps de même espèce l'un contre l'autre; & il est plus avantageux de faire frotter un corps de fer, par exemple, contre une surface de bois que contre une surface de fer.

2°. Le frottement, disent-ils, n'est pas altéré par la vitesse du mouvement.

3°. Le frottement ne dépend point de la figure de la base du corps frottant ou du corps frotté, non plus que de sa grandeur, mais seulement de la pression.

Ces regles que plusieurs Physiciens, sur-tout Desaguliers dans sa physique, & Camus dans son Traité des forces mouvantes, ont établi avec grand soin par un grand nombre d'expériences, ne

sont cependant pas bien rigoureuses ; & il y a quelques Savans , parmi lesquels se trouve le fameux Mushenbroek , qui doutent que le frottement puisse être altéré par la figure , la grandeur de la base & la vitesse. En effet M. Hennert rapporte avoir éprouvé fort souvent qu'un corps mis en mouvement sur un plan horizontal par le moyen d'un poids s'arrête après un certain tems. Or ce phénomène paroît inexplicable si l'on n'admet que le frottement augmente avec la vitesse du mouvement , ou du moins qu'il croît par d'autres raisons qui ne sont pas encore connues. On peut concevoir que les aspérités & les sinuosités des surfaces frottantes s'engagent de maniere que les éminences de l'une des surfaces entrent dans les cavités de l'autre surface ; de sorte que le mouvement ne peut continuer à moins que les aspérités ne fléchissent ou du moins que les corps qui frottent ne soient un peu soulevés , pour que les aspérités de la surface frottante se dégagent des cavités de la surface frottée.

Il paroît que malgré toutes les expériences qu'on a faites sur cette matiere , la cause du frottement n'est cependant pas encore entièrement connue. En effet les filamens de la surface frottée sont fléchis par les corps mis en mouvement ; car l'on voit le frottement augmenter lorsque le corps frottant fait un certain séjour sur le corps frotté , & il n'est pas douteux que la cohésion ou l'attraction n'ait quelque part au frottement. Quoiqu'il en soit , on peut supposer dans la pratique que le frottement est une partie de la pression , de sorte que la pression étant supposée  $= P$  , le frottement sera  $= n P$ . Or cette quantité

est ordinairement le tiers ou le quart de la pression : il ne s'agit pas ici des corps pointus sur le frottement desquels nous n'avons presque aucune connoissance.

90. PROBLÈME. *On demande d'expliquer mathématiquement la cause du frottement.* Puisque le frottement paroît augmenté lorsque les surfaces sont moins polies ; nous pouvons concevoir la surface d'un corps comme remplie de sinuosités, telles que  $acm$  (fig. 70). Soit supposée  $= P$  la pression du corps qui se fait dans une direction  $CP$  perpendiculaire à la surface frottée  $ND$ . Que le corps frottant soit poussé par une force  $V$  quelconque selon la direction  $CB$  parallèle à  $ND$ , qu'on mène  $CA$  parallèle au côté  $c$  de la cavité  $mca$ , & soit l'angle  $ACB = acb = \gamma$ . Qu'on tire par le point  $p$ , la ligne  $pR$  perpendiculaire sur le prolongement de la ligne  $AC$ , & ayant fait  $Cp = P$ ,  $CR$  représentera la résistance que la pression du corps qu'il faut tirer de la cavité  $mca$ , oppose à la puissance  $V$ . Soit  $CB = V$ , & soit menée par le point  $B$  la ligne  $BA$  perpendiculaire sur  $CA$ , on aura  $CA = V \cos. \gamma$ . Mais  $CA$  étant opposée à la direction  $CR = P \sin. \gamma$ , il est visible que la puissance  $V$  fait un effort  $V \cos. \gamma$  pour vaincre le frottement  $P \sin. \gamma$ . Ainsi quand le mouvement du corps sera parvenu à l'uniformité, on aura  $V \cos. \gamma = P \sin. \gamma$ , &  $V = P \tan. \gamma$ .

Puisque le frottement est exprimé par  $P \tan. \gamma$ , il est visible qu'il est proportionnel à la pression, & si l'on fait  $\tan. \gamma = n$ , le frottement sera  $=$  égal  $n.P$ . Au reste cette explication du frottement est plus mathématique que physique ; mais on peut dans la pratique l'employer avec assez de confiance.

91. PROBLÈME. Déterminer le mouvement progressif d'un corps  $M$  sur un plan horizontal & sur un plan incliné, sollicité au mouvement par une puissance constante  $P$ . Nous supposons ici que ce corps ne tourne pas. Soit l'espace  $mB$  (fig. 71) parcouru dans le tems  $t = x$  & la vitesse  $= v$ , on aura  $v dv = 2 g \cdot \frac{P - nM}{M} dx$ ; car le frottement diminue l'intensité de la puissance. Donc  $v^2 = 4 g x \frac{(P - nM)}{M}$ . De la  $t = S. \frac{dx}{v} = \sqrt{\frac{M x}{g(P - nM)}}$ .

Si le corps se meut sur un plan incliné tel que l'angle que ce plan fait avec la base soit  $= \gamma$ , la pression que ce corps exercera sur le plan incliné sera  $= M \cos. \gamma$ , d'où naîtra le frottement  $n M \cos. \gamma$ . Mais le corps est poussé le long du plan incliné par une force  $= M \sin. \gamma$  (fig. 69), en supposant que la masse du corps  $Q$  est  $= M$  (\*); donc le corps  $Q$  descendra avec une force  $= M(\sin. \gamma - n \cos. \gamma)$ . Soit l'espace parcouru  $= x$  & le tems  $= t$ , aura  $v dv = \frac{M}{M} \times 2. g (\sin. \gamma - n \cos. \gamma) dx = 2. g (\sin. \gamma - n \cos. \gamma) dx$ ; &  $t = S \frac{dx}{v} = \sqrt{\left[ \frac{x}{g(\sin. \gamma - n \cos. \gamma)} \right]}$ . Donc  $x = g t^2 (\sin. \gamma - n \cos. \gamma)$ .

(\*) Supposons  $Qp = M$ ,  $ABC = \gamma$ , le triangle rectangle  $MQP$  semblable au triangle  $ABC$  donnera sinus total  $= 1 : M :: \sin. QPM = \cos. \gamma : QM = M. \cos. \gamma$ , pression que fait le corps  $Q$  dont nous désignerons ici la masse par  $M$ , sur le plan incliné  $AB$ . Le même triangle donne  $1 : M :: \sin. MQP = \sin. \gamma : M. \sin. \gamma = MP = QN$ , force qui pousse le corps le long du plan  $AB$ . Il est visible que  $\sin. \gamma$  doit être plus grand  $n \cos. \gamma$ , autrement il n'y auroit point de mouvement.

92. PROBLEME. Déterminer l'intensité de la puissance appliquée à une roue nécessaire pour vaincre le frottement de l'axe BN (fig. 72). Soit le poids de la roue & de l'axe  $= Q$ , & la puissance qui agit sur la roue dans une direction horizontale  $AP = P$ . Lorsque la roue se meut, dans la direction ADE, le frottement s'oppose au mouvement. Or cette résistance se fait au point N : elle est  $= nQ$ , & son moment est  $= BC.nQ$ , auquel doit être égal le moment de la puissance P, savoir CA.P ; donc  $P = \frac{BC.nQ}{CA}$ . tel est l'expression de la puissance nécessaire pour vaincre le frottement.

Si la puissance  $ap = P$  fait effort pour mouvoir la roue dans une direction oblique & non horizontale  $ap$  (fig. 73), je tire par le centre C la ligne CB, que je suppose parallèle à la direction  $ap$  &  $= P$ , & la verticale CF  $= Q$ . Ayant achevé le parallélogramme CFGB dont la diagonale CG exprimera la pression de l'axe sur le support cave RNS, supposons l'angle  $ACA = \alpha$  ; à cause des angles droits  $Cap$ ,  $BCa$ , on aura  $FCB + aCA = 90^\circ$ , &  $CG = \sqrt{(P^2 + Q^2 + 2PQ \sin. \alpha)}$  (\*). C'est pourquoi dans ce

(\*) Soit l'angle  $BGC = m$ ,  $FCB = p$ , le triangle CBG donnera en faisant  $CG = u$ ,  $u : \sin. p :: P. \sin. CGB = \sin. FCG = \sin. m = \frac{\sin. p. P}{u}$ . Le triangle CFG donne  $u : Q :: \sin. p : \sin. (p - m)$ , ou  $\sin. (p - m) = (\sin. p. \cos. m. - \sin. m. \cos. p) = \frac{Q. \sin. p}{u} \dots (A)$ . Mais en

cas  $P.Ca = n.CN. \sqrt{(P^2 + Q^2 + 2PQ \sin. \zeta)}$ ;  
donc en supposant  $Ca = a$ , &  $CN = b$ , il vien-

$$\text{dra } P = \frac{nbQ[(nb \sin. \zeta + \sqrt{(a.a - nnbb \cos. \zeta)})]}{aa - nnbb}.$$

Par la solution de ce problème il est facile de voir que la résistance du frottement est d'autant moindre que la puissance est appliquée à un plus long levier  $Ca$ . Il est évident encore que la figure (73) représentant l'axe dans le tour, le frottement augmente dans cette machine selon l'obliquité de la direction de la puissance, par rapport à la verticale  $CA$ . La résistance sera donc la plus grande possible lorsque l'angle  $\zeta$  sera de  $90^\circ$ , & alors on aura  $P = \frac{nbQ(nb + a)}{(aa - nnb)} = \frac{nbQ}{a - nb}$ .

Mais quand la puissance a une direction opposée à  $M$ , la résistance diminue. Supposons que dans

$$\text{supposant le rayon} = 1, \text{ l'on a } \cos. m = \sqrt{(1 - \sin. m)^2} \\ = \sqrt{\left(1 - \frac{\sin. p.P^2}{u^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{uu - \sin. p.P^2}{uu}\right)}. \text{ Sub.}$$

stituant la valeur de  $\sin. m$  &  $\cos. m$  dans l'équation  $A$ , il

$$\text{vient } \sin. p. \frac{\sqrt{(uu - \sin. p.P^2)} - \sin. p. \cos. p.P}{u} = \\ \frac{Q. \sin. p}{u}. \text{ Donc } \sqrt{(uu - P^2 \sin. p)} = Q + P \cos. p;$$

$$uu - P^2 \sin. p = Q^2 + P^2 \cos. p^2 + 2QP \cos. p;$$

& (à cause de  $\cos. p + \sin. p = 1$ ),  $u = Q \sqrt{(P^2 + Q^2 + 2PQ \sin. \zeta)}$ , en faisant attention que  $\zeta$  étant le complément de  $p$ , on a  $\sin. \zeta = \cos. p$ .



ce cas  $\zeta = -90^\circ$ , parce qu'alors les angles ont une situation contraire, nous aurons  $P = \frac{nbQ(a-nb)}{aa-nnb} = \frac{nbQ}{a+nb}$ , expression qui fait voir que dans ce cas on a besoin d'une plus petite force P.

On peut par le moyen de la formule  $\frac{nbQ}{a-nb}$  trouver la quantité de frottement dans la poulie & l'axe dans le rour, en supposant le rayon de l'axe  $= b$ , celui de la roue ou des poulies  $= a$ , lorsque la quantité Q outre la masse du cylindre & de la poulie représente la somme du fardeau & de la puissance & que les directions du fardeau & de la puissance sont parallèles; car dans ce cas on a  $\zeta = 90^\circ$ . La formule satisfera même à la pratique avec assez d'exactitude, quoique l'angle  $\zeta$  diffère de 10 ou 12 degrés, & peut-être plus de  $90^\circ$ .

93. PROBLEME. Déterminer le frottement dans les moustes. Soit une moufle composée de deux poulies mobiles & de deux immobiles. Chacune des poulies mobiles porte la moitié du fardeau que je suppose  $= 4Q$ . Ainsi le frottement dans la

premiere poulie mobile sera  $= \frac{2nbQ}{a-nb}$ ; & la corde

sera tendue par le poids  $Q + \frac{2nbQ}{a-nb} =$

$\frac{(a+nb)Q}{a-nb}$  quantité que je fais  $= A$ . Mais la

tension A du second cordon doit être égale à celle du troisieme cordon; donc la poulie immobile correspondante sera chargée du poids 2 A, d'où résultera

un frottement  $= \frac{2nbA}{a-nb}$ . Le troisieme cordon est

donc tendu par une force  $= A + \frac{2nbA}{a-nb} = \frac{(a+nb)A}{a-nb} = \frac{(a+nb)^2}{(a-nb)^2} \cdot Q = B$ . Puisque le quatrième cordon fait équilibre avec le troisième, la troisième poulie sera chargée du poids  $2B$ , d'où naîtra le frottement  $= \frac{2nbB}{a-nb}$ ; ainsi le quatrième cordon sera tendu par le poids  $B + \frac{2nbB}{a-nb} = \frac{(a+nb)B}{a-nb} = \frac{(a+nb)^3}{(a-nb)^3} \cdot Q = C$ .

En général si le nombre des cordons est  $m$ , la tension du dernier sera  $= \left( \frac{a+nb}{a-nb} \right)^{m-1} Q$ . Sans le frottement la puissance devrait être  $= Q$ ; ainsi l'augmentation qui résulte du frottement est  $= \left( \frac{a+nb}{a-nb} \right)^{m-1} Q - Q$ . On doit encore ajouter le frottement qui résulte du poids des poulies  $= R$ , frottement qui sera exprimé par  $\frac{nbR}{a-nb}$ .

Outre le frottement dont nous venons de parler, on doit encore avoir égard à la roideur des cordes, quand il s'agit d'estimer les effets des machines. Par les expériences d'Amontons & de Desaguliers, il est évident que la roideur d'une corde, ou la difficulté de la plier est d'autant plus grande que son diamètre est plus grand, que le poids qui la tend est plus grand & que le diamètre du cylindre autour duquel on la plie est plus petit, de sorte que la roideur d'une corde est en raison composée de la directe du poids

tendant, du diamètre de la corde & en raison inverse du diamètre de la poulie. Desaguliers a trouvé que la roideur d'une corde d'un demi-pouce de diamètre, roulée autour d'un cylindre d'un pouce & demi de diamètre & tendue par un poids de 60 livres, faisoit une résistance de 75 onces. Appellant donc cette résistance  $R$ , on aura

$$R = \frac{960. \text{ onces} \times 0.5}{1.5} = 320. \text{ Supposons une autre}$$

corde d'un pouce de diamètre, tendue par un poids de 80 livres & roulée autour d'une poulie de cinq pouces de diamètre, sa roideur sera

$$\text{comme } \frac{80. 1}{5} = 16. \text{ Donc en faisant } 320 : 75 \text{ on-}$$

ces :: 16 livres :  $x = 6 \frac{1}{4}$  livres, on aura la roideur de cette corde.

Il n'est pas difficile de voir comment il faut s'y prendre pour calculer l'augmentation de la puissance dans les mouffles, eu égard à la roideur des cordes & au frottement (\*).

---

(\*) Pour faciliter aux commençans le moyen de calculer l'effet du frottement & de la roideur des cordes dans les machines, nous prendrons le palan ou caliorne de la figure (74). En supposant que le rayon des chevilles ou effieu est la cinquième partie du rayon de chaque rouet, & que le frottement est le quart de la pression, parce qu'il est presque toujours plus grand lorsque les machines sont plus composées à cause des vices d'exécution qui se multiplient. S'il n'y avoit point de frottement les quatre branches du palan soutiendroient chacune le quart du poids  $P$  que je suppose de 400 livres ; ainsi chaque rouet immobile soutiendrait la moitié du poids, & les cordons 1 & 2 soutiendroient chacun le quart du poids. Mais selon

94. PROBLEME. *Trouver la vitesse avec laquelle un poids P peut élever un fardeau Q par le moyen de l'axe dans le tour, eu égard au frottement & à l'inertie de la machine. Soit le petit rayon de l'axe dans le tour =  $a$ , & le*

la supposition que nous avons faire cette moitié du poids produit un frottement qui sera le quart de cette moitié; & comme ce frottement produit une résistance cinq fois moindre à cause de la grandeur du rayon de la poulie, la branche 2 sera tirée en haut avec une force qui sera la vingtième partie de la charge, pour remédier au seul frottement.

La force ajoutée n'est la vingtième partie de la charge qu'après que cette force a été ajoutée : ainsi elle est la dix-neuvième partie de la charge considérée avant l'addition. Si le poids P pèse donc 400 livres, ce qui donne 200 livres pour la charge des deux branches 1 & 2 jointes ensemble, nous n'avons qu'à prendre la dix-neuvième partie de 200 livres, & nous aurons  $10 + \frac{10}{19}$  livres pour l'excès de la force avec laquelle la branche 2 doit être tirée en haut. La branche 1 qui n'est sujette à aucun frottement n'est tendue qu'avec une force de 100 livres; mais comme la branche 2 doit soutenir le même poids, & qu'elle doit de plus surmonter le frottement sur la poulie d'en bas; il est nécessaire qu'elle soit tirée en haut avec une force de  $110 \frac{10}{19}$  livres.

Ce sera la même chose dans le passage de la branche 2 à la branche 3 sur une des poulies supérieures. Il faut, à cause du frottement, comme on vient de le voir, que la branche 2 soit tendue avec une force de  $110 \frac{11}{19}$  livres, pendant que la branche 1 ne soutient que 100 livres. La tension de la branche 3 doit être plus grande dans le même rapport; ainsi elle sera d'un peu plus de 121 livres: il faudra faire une augmentation semblable pour la branche 4 qui sera tendue avec une force de 135 livres, & une autre augmentation encore proportionnelle pour la branche 5, qui doit être tirée avec une force d'environ  $149 \frac{14}{19}$ . Ainsi la puissance M au lieu d'agir avec une force de 100 livres sera obligée de tirer avec une force plus grande d'environ une moitié.

grand rayon  $= b$ , le frottement de l'axe  $= F$ , frottement qui augmente le fardeau  $Q$  appliqué au petit rayon  $a$ . C'est pourquoi ce fardeau total est  $Q + F$  qui, étant rapportée à la distance  $b$  doit être  $=$

Les nombres 100,  $110 \frac{10}{19}$ , 135, 149 sont en progression géométrique; ainsi connoissant le premier & le second, il seroit facile d'avoir les autres si on ne les connoissoit pas.

Si nous voulons tenir compte, non-seulement du frottement, mais encore de la roideur des cordes, on doit faire attention qu'une corde de 6 lignes de diamètre chargée d'un poids de 120 livres, & passant sur un rouleau de 3 pouces de diamètre, oppose une résistance de 8 livres, ainsi que l'expérience l'apprend. Cela posé, supposons que les poulies de notre figure soient de 4 pouces de diamètre, & que le diamètre du cordage est de 4 lignes. Si nous multiplions 120 livres par 6 lignes  $= \frac{1}{2}$  pouce, nous aurons 60. Divisant ce produit par 3 diamètres du rouleau, le résultat 20 donnera le premier terme d'une analogie dont la roideur 8 sera le second. Je multiplie les 4 lignes  $= \frac{1}{3}$  de pouce de diamètre qu'a la corde de notre figure par les  $210 \frac{10}{19}$  livres qui forment la charge des deux branches 1 & 2 jointes ensemble, & je divise le produit par le diamètre 4 pouces des poulies, le résultat est à peu-près  $17 \frac{1}{2}$  livres, & c'est là le troisième terme de l'analogie dont le quatrième 7 livres est l'effet de la roideur du funin.

Nous avons dit ci-dessus que la branche 2 devoit être tirée de bas en haut avec une force de  $110 \frac{11}{19}$  livres à cause du frottement. Il faudroit donc ajouter 7 livres à cette quantité, si la poulie sous laquelle passe cette corde étoit soutenue par son centre. Mais lorsqu'on agit sur la branche 2 pour vaincre sa roideur & celle de la branche 1, le point d'appui est situé au point où la branche 1 rencontre la poulie; de sorte que le bras du levier sur lequel on agit est alors égal, non au rayon, mais au diamètre de la poulie; il ne faut donc ajouter que la moitié de 7 livres à  $110 \frac{10}{19}$ , & il nous viendra environ 114 livres au lieu de  $118 \frac{1}{2}$  livres que nous trouverions sans cette attention, pour la force avec laquelle il faut tirer en haut

$\frac{a \times (Q + F)}{b} < P$  ; de sorte que la force motrice sera  
 $= P - \frac{a}{b} (Q + F)$ . Mais en faisant la masse du cy-  
lindre  $= M$ , son moment d'inertie sera exprimé par  
 $\frac{M a a}{2}$  ; & cette inertie du cylindre étant transportée à  
la distance  $b$  est  $= \frac{M a a}{2 b b}$ . Mais les inerties des poids  
 $P$  &  $Q$  sont  $P + \frac{Q a a}{b b}$  ; donc la force accélératrice  
sera  $= \left( P - \frac{a}{b} (Q + F) \right) : \left( \frac{M a a}{2 b b} + P + \frac{Q a a}{b b} \right)$

---

la branche 2, afin de vaincre le frottement & la roideur  
de la corde joints ensemble. La branche 2 étant tendue  
avec une force de 114 livres, la branche 3 sera tendue  
eu égard au frottement & à la roideur du cordage par  
une force qu'on trouvera en faisant la proportion 100 :  
118 :: 114 :  $x$ , parce que dans le passage de la branche  
2 à la branche 3, la poulie étant soutenue par son cen-  
tre, on ne doit pas faire la réduction dont on a parlé  
ci-dessus. Ce qui donnera 135.09 livres pour la tension du  
cordon 3. Dans le passage du cordon 3 au cordon 4, il faudra  
à cause de la poulie mobile embrassée par ces cordons, faire  
la proportion 100 : 114 :: 135.09 :  $x$ , le quatrième terme  
de cette proportion fera trouver la force avec laquelle le  
cordon 4 doit être tiré en haut. Cette force est d'environ  
154 livres. Le cordon 5 sera donc tiré avec une force qu'on  
trouvera en faisant 100 : 118  $\frac{1}{2}$  :: 154 :  $x = 182$  à peu-  
près. Il faut donc, eu égard à tout, que la puissance  $M$   
fasse un effort d'environ 182 livres.

Il est aisé de sentir qu'il faut, autant qu'il est possible, em-  
ployer des cordes d'un petit diamètre & les plus souples que  
l'on peut, faciliter le mouvement des poulies & augmenter leur  
diamètre, autant qu'on le peut, sans rendre leur pesanteur  
nuisible.

$$= \frac{[Pb - a(Q + F)]b}{\frac{1}{2}Ma a + Pb\dot{b} + Qaa}. \text{ Donc en faisant la vitesse}$$

du fardeau  $= v$ , l'espace parcouru  $= x$ , on aura

$$v dv = 2g dx \cdot \frac{[Pb - a(Q + F)]b}{\frac{1}{2}Ma a + Pb\dot{b} + Qaa}, \text{ dont l'inté-}$$

$$\text{grale donne } v^2 = 4gx \frac{[Pb - a(Q + F)]b}{\frac{1}{2}Ma a + Pb\dot{b} + Qaa}. \text{ Si l'on}$$

suppose le tems de la montée  $t = S \cdot \frac{dx}{v}$ , il viendra

$$x = \frac{g t^2 [Pb - a(Q + F)]b}{\frac{1}{2}Ma a + Pb\dot{b} + Qaa}.$$

Si le fardeau  $Q$  est supposé  $= 0$ , l'on aura la vitesse

$$v = 2 \sqrt{\left[ \frac{gx(Pb\dot{b} - Fa\dot{b})}{\frac{1}{2}Ma a + Pb\dot{b}} \right]}: \text{ telle sera la vitesse}$$

du cylindre, eu égard à son inertie & au frottement.

*Des corps qui se meuvent dans les fluides.*

95. PROBLEME. *Trouver la résistance des solides de révolution qui se meuvent dans un fluide parfait. Soit A D (fig. 75.) la courbe qui par la révolution autour de l'axe A B, engendrera le solide de révolution que nous supposons se mouvoir dans la direction BA, & supposons MT parallèle à BA. Ayant mené la tangente Mm, construit le rectangle mTnM, je tire mt perpendiculaire sur MT. Cela posé si MT exprime la résistance du fluide, par rapport au point M, il est visible qu'on peut décomposer cette force en deux autres Tm, m M. Mais Mm, étant la force par laquelle le fluide tendra à glisser le long de la tangente m M, n'altérera pas le mouvement de l'élément Mm, qui ne sera altéré que par la force Tm = n M, perpendiculaire à la tangente Mm.*

Décomposant  $mT$  en  $tT$  &  $tm$ , la force  $tm$  sera détruite par une force contraire & opposée, qui agira sur le point  $P$ , & la seule force  $tT$  pourra retarder le mouvement du solide. Supposant  $MT = 1$ ,  $Mm = ds$  (qu'on peut regarder comme un arc infiniment petit de la courbe, qui se confond avec sa tangente),  $mt = dy$  (car  $mt = pM = dy$ , en faisant  $ac = y$ ),  $Mt = dx$ , les triangles rectangles semblables  $MmT$ ,  $Mmt$ , donneront

$$ds : 1 :: dy : Tm = \frac{dy}{ds}. \text{ Mais les mêmes trian-}$$

$$\text{gles donnent } TM = 1 : Tm = \frac{dy}{ds} :: \frac{dy}{ds} : Tt =$$

$$\frac{dy^2}{ds^2}. \text{ Maintenant si on conçoit que les filets du}$$

fluide aillent choquer l'arc  $mM$  parallèlement à l'axe  $AB$ , il est visible que le nombre de ces filets sera égal à celui des filets qui pourroient choquer  $Mp = dy$ , si l'arc  $mM$  étoit anéanti (\*); donc le nombre de ces filets est proportionnel à  $dy$ ; donc en multipliant  $Tt$  par  $dy$ , on aura la force que le fluide exerce sur l'élément  $mM$ , dans la direction de l'axe; donc cette force sera représentée par  $\frac{dy^3}{ds^2}$ . Si  $r$  représente le rayon d'un

cercle dont la circonférence soit  $c$ ,  $\frac{cy}{r} \cdot \frac{dy^3}{ds^2}$  ex-

(\*) Car si le diamètre d'une particule de fluide est la centième partie; par exemple, de  $dy$ ,  $dy$  vaudra 100, en supposant que les parties se touchent; si elles sont également distantes l'une de l'autre, leur nombre sera néanmoins proportionnel à  $dy$ .



primera l'action du fluide sur la zone décrite par la révolution de  $Mm$  autour de l'axe  $AB$ . Mais si on suppose que le mobile se meut dans le fluide avec la vitesse qu'on a supposée au fluide, & que celui-ci soit en repos, le mouvement que communiquera (à chaque instant) le mobile au fluide pourra évidemment être exprimé par la même formule; donc la résistance qu'éprouve un solide de révolution qui se meut dans un fluide parfait, dans la direction de son axe est

$$= \frac{cydy^3}{rds^2}.$$

EXEMPLE I. Soit la courbe  $AD$  une demi-parabole dont l'équation soit  $2ax = yy$ , on aura  $ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{dy^2}{aa} \cdot (aa + yy)$ , &  $S. \frac{cydy^3}{rds^2} = S. \frac{ydy}{aa + yy} \cdot \frac{caa}{r} = \frac{caa}{r} \cdot L.(aa + yy) + C.$  pour déterminer la constance  $C$ , je remarque que l'intégrale doit s'évanouir lorsque  $y = 0$ ; donc  $C = -\frac{caa}{r} \cdot L.aa$ , & l'intégrale complete est

$$= \frac{caa}{r} L. \left( \frac{aa + yy}{aa} \right).$$

EXEMPLE II. Si on suppose que  $AD$  est l'arc d'un cercle dont l'équation soit  $aa - yy = xx$ , on aura  $ds = \frac{a dy}{x}$ , & en supposant  $r = a$ , l'élément de la résistance du solide sera  $\frac{cyxxdy}{a^3}$

$$= \frac{c}{a} y dy - \frac{c}{a^3} y^3 dy, \text{ en substituant la va-}$$

Tome V. E e

leur de  $xx$  ; donc la résistance sera  $\frac{cy^2}{2a} - \frac{cy^4}{4a^3}$ .

Si l'on suppose  $x = 0$ , ce qui donne  $y = a$ , la résistance de l'hémisphère & par conséquent celle de la sphère entière ( car l'hémisphère postérieur n'a aucune résistance à vaincre ) sera  $= \frac{ca}{4}$ , laquelle n'est que la moitié de celle d'un de ses grands cercles.

EXEMPLE III. Soit  $BD = r = 1$  le demi-petit axe,  $AB = a$  le demi-grand axe d'une ellipse ; l'on aura  $aay^2 = aa - xx$ ,  $aaydy = -x dx$ ,  $a^4y^2dy^2 = x^2dx^2$ ,  $dx^2 = \frac{a^2y^2dy^2}{1-y^2}$ ,  $ds^2 = dy^2 + \frac{a^2y^2dy^2}{1-y^2} = \frac{dy^2(1+ggyy)}{1-y^2}$ , en faisant  $aa - 1 = g^2$  ; donc

la différentielle de la résistance sera  $\frac{cydy - cy^3dy}{1+ggyy}$   
 $= \frac{c}{gg} \left( \frac{aaydy}{1+ggyy} - ydy (*) \right)$ , à cause de  $gg + 1 = aa$ , dont l'intégrale en faisant  $L.(1 + gg yy)^{\frac{1}{2}} = P$ , sera  $= \frac{c}{gg} \left( \frac{aa}{gg} P - \frac{yy}{2} \right)$ .

Lorsque  $y = 1$ , cette intégrale devient  $\frac{caa}{g^4} \times$

(\*) On trouvera facilement que le premier membre de l'équation est égal au second en réduisant  $-ydy$  en une fraction dont le dénominateur soit  $1 + gg yy$ , & en faisant attention que  $aa = gg + 1$ .

$L. a - \frac{c}{2g^2}$  qui exprime la résistance de l'ellipsoïde entier. On n'a pas ajouté de constante parce que le logarithme hyperbolique de 1 étant = 0, l'intégrale devient = 0 lorsque  $y = 0$ ; ainsi que cela doit être. Si BA étoit le second demi-axe, l'on auroit  $1 > a$ , &  $gg = aa - 1$ , seroit une quantité négative, de sorte qu'il faudroit changer le signe du second terme de l'intégrale qui, pour le cas de la résistance du solide entier, donneroit  $\frac{caa}{g^4} L. a + \frac{c}{2gg}$ .

EXEMPLE IV. Soit DAP (fig. 76) la section d'un cône droit, dont le rayon DB de la base soit  $r = a$ , & le côté DA =  $b$ . Ayant tiré la ligne TC perpendiculaire, & Ma parallèle à DB, les triangles semblables AMa, ABD donneront  $BD = a : AD = b :: Ma = y : MA = s = \frac{by}{a}$ ; donc  $ds = \frac{bdy}{a}$ , &  $\frac{cydy^3}{rds^2} = \frac{acydy}{bb}$ , dont l'intégrale =  $\frac{acy^2}{2bb}$ , exprime la résistance du cône MA r. Et si l'on fait  $y = a$ , la résistance du cône entier DAP, sera =  $\frac{ca^3}{2bb} = \frac{ca}{2} \cdot \frac{aa}{bb}$ . Or  $a$  étant plus petit que  $b$ ,  $\frac{aa}{bb} < 1$ ; donc la résistance qu'éprouve le cône est plus petite que celle qu'éprouveroit sa base, résistance qui seroit représentée par  $\frac{ca}{2}$ , & les résistances du cône & de sa base sont entr'elles comme  $\frac{aa}{bb} : 1 :: aa : bb$ , c'est-

à-dire comme le carré du rayon de la base est au carré du côté du cône.

Si l'on suppose un cône droit (fig. 77) inscrit dans un hémisphère, le triangle rectangle isocèle  $DAB$  donnera  $\overline{DA}^2 = b^2 = 2 \cdot \overline{DB}^2 = 2 a^2$ ; donc alors  $\frac{a a}{b b} = \frac{1}{2}$ , & la résis-

tance qu'éprouve le cône devient  $= \frac{c a}{4}$ , la même que celle qu'éprouve l'hémisphère  $DAP$ , ce qui mérite d'être remarqué.

96. PROBLEME. *Entre tous les cônes droits tronqués de même base  $DBb$ , & de même hauteur  $BP$ , décrits par le trapèze  $PpDB$  autour de l'axe  $BP$  (fig. 78) & qui se meuvent parallèlement à cet axe, trouver celui de la moindre résistance.* Ayant prolongé le côté  $Dp$ , jusqu'à la rencontre de l'axe en  $A$ , je mène  $Pm$  &  $BM$ , perpendiculairement à  $DA$ . Cela posé, nous savons que la résistance de la surface décrite par  $AD$  est à celle de la base comme le carré  $a a$  du rayon de la base est à  $b b$  carré du côté  $DA$ , ou comme  $\overline{DM}^2 : \overline{DB}^2$ , à cause des triangles semblables  $DBA$ ,  $DMB$ . De même la résistance du petit cône  $pAa$  sera à celle de sa base comme  $\overline{pm}^2 : \overline{Pp}^2$ ; donc  $Pm$  différence des carrés  $\overline{Pp}^2$  &  $\overline{pm}^2$  exprimera la différence entre la résistance de la base de ce cône  $pAa$ , & du cône lui-même, tandis que  $\overline{DM}^2$  exprime celle du cône dont le côté  $= DA$ . Maintenant il est visible que la résistance de notre cône tronqué sera un *minimum* si  $\overline{DM}^2 + \overline{Pm}^2$  est un *mini-*

*mun* : car cette résistance fera d'autant plus petite que la somme de  $\overline{DM}^2$  & de  $\overline{Pm}^2$  sera plus petite, puisque  $\overline{DM}^2 + \overline{Pm}^2$  est comme la résistance totale (\*). Mais si l'on mène  $Pn$  parallèle à  $Dp$  jusqu'à la rencontre de  $B M$  en  $n$ , on aura  $Mn = Pm$ , &  $\overline{Dn}^2 = \overline{DM}^2 + \overline{Pm}^2$ ; donc  $\overline{Dn}^2$  & par conséquent  $Dn$  doit être un *minimum*. Mais à cause de  $Pn$  parallèle à  $DA$ , l'angle  $BnP$  est droit; donc il est placé sur la circonférence du diamètre  $BP$ . D'un autre côté la plus courte ligne qu'on puisse mener d'un point  $D$  à une courbe, est la perpendiculaire, ainsi qu'on l'a vu dans la première Section; donc  $Dn$  est perpendiculaire au demi-cercle  $BnP$ ; elle passe par conséquent par son centre  $C$ , & l'on a  $Cn = CP$ . Mais à cause des parallèles  $DA, nP$ , les triangles  $DCA, nCP$  sont semblables; ainsi puisque le dernier donne  $Cn = CP$ , le premier donnera  $CD = CA$ ; c'est-à-dire qu'on trouvera la hauteur du cône entier, en menant  $DC$  par le point  $D$ , & par le milieu  $C$  de la hauteur du cône tronqué, & prenant  $CA = CD$ .

97. PROBLEME. *Entre tous les solides dont la base a pour rayon  $DC$ , engendrés par la révolution d'une courbe  $DA$  autour de l'axe  $CB$ , déter-*

(\*) Car si  $a$  exprime la résistance du cône dont  $AD$  est le côté,  $b$  la résistance de la base supérieure du cône tronqué,  $c$  celle du petit cône,  $a + b - c$ , sera celle du cône tronqué, laquelle en faisant  $a = \overline{DM}^2$ ,  $b - c = \overline{Pm}^2$ , deviendrait  $\overline{DM}^2 + \overline{Pm}^2$ .

miner celui dont la résistance dans le sens de l'axe est un *minimum* (fig. 79). Considérons les zones engendrées par les arcs AM & MG, si l'on suppose que la première reçoive une augmentation dans sa résistance, il faut que la seconde reçoive une diminution égale, sans cela la résistance sur la zone entière engendrée par l'arc GA ne sauroit être un *minimum*; ce qu'on vient de dire par rapport à ces deux zones doit s'entendre de toutes les autres zones prises deux à deux, & lorsqu'elles auront cette propriété, la surface entière engendrée par la courbe, aura évidemment la propriété du *minimum*. Revenant donc aux deux zones dont nous venons de parler, je différencie

l'expression  $\frac{cydy^3}{rds^2}$  de la première, en faisant seulement varier  $dx$  (c'est-à-dire, que je regarde  $dy$  aussi-bien que  $y$  comme constans), ce qui me donne  $\frac{-2cdxdxxydy^3}{r(dy^2+dx^2)^2}$ . Mais alors la zone

suivante doit donner pour la différentielle de sa résistance, l'expression  $+\frac{2cdxdxxydy^3}{r(dy^2+dy^2)^2}$ , par-

ce que la hauteur FB des deux zones étant supposée ne pas varier, lorsque la hauteur de la première augmente de la quantité  $ddx$ , celle de la seconde diminue de la même quantité; donc

$$\frac{2cdxdxxydy^3}{rds^4} - \frac{2cdxdxxydy^3}{rds^4} = 0, \text{ ou}$$

$$\frac{ydx dy^3}{ds^4} - \frac{ydx dy^3}{ds^4} = 0. \text{ Maintenant quoique}$$

$\frac{2cdx ddx y dy^3}{r ds^4}$  soit une quantité infiniment petite,

rien n'empêche qu'en la divisant par  $\frac{2cd dx}{r}$ , elle

ne devienne une quantité finie telle qu'on voudra<sup>(\*)</sup>; & parce que nous pouvons supposer que toutes les zones éprouvent des variations égales par rapport à leurs résistances, les unes en plus les autres en moins alternativement, nous pourrions

faire  $\frac{y dx dy^3}{ds^4} = a$ , quantité constante; donc

$y dy^3 dx = a ds^4 = a dx^4 + 2 a dx^2 dy^2 + a dy^4$ . Supposant maintenant  $dx = \frac{\zeta dy}{a}$ , sub-

stituant cette valeur dans l'équation qu'on vient de trouver, divisant ensuite par  $\zeta dy^4$  & multipliant par  $a$ , on aura  $y = \frac{\zeta^3}{aa} + 2\zeta + \frac{a^2}{\zeta} \dots (A)$ .

Substituant dans  $dx = \frac{\zeta dy}{a}$ , la valeur de  $dy$  prise de l'équation A, & en intégrant, on aura  $x = \frac{3\zeta^4}{4a^3} + \frac{\zeta\zeta}{a} - aL.\zeta \dots (B)$ . Si dans l'équation A

l'on fait  $y = 0$ , on aura en multipliant par  $\zeta$  & par  $aa$ ,  $\zeta^4 + 2aa\zeta\zeta + a^4 = 0$ , d'où l'on tire  $\zeta\zeta + aa = 0$ ,  $\zeta\zeta = -aa$  &  $\zeta = \sqrt{-aa}$ , quantité imaginaire qui fait voir qu'on ne peut supposer  $y = 0$ , & que la courbe ne rencontre pas son axe. Si l'on suppose  $dy = 0$ , ce qui indique la

(\*) Cela aura lieu en supposant à  $ddx$  une valeur convenable.

plus petite ordonnée BA, on aura  $\frac{3zzdz}{aa} + 2dz - \frac{aadz}{zz} = 0$ , d'où l'on tire  $z^4 + \frac{1}{3}aaaz - \frac{1}{3}a^4 = 0$ , &  $z^3 + \frac{1}{3}aa = \frac{1}{3}aa$ ,  $z^3 = \frac{1}{3}aa$ ,  $z = a\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ , à l'origine B des  $y$  & des  $x$ . Substituant cette valeur de  $z$  dans celle des  $y$ , on aura pour la valeur de la plus petite ordonnée  $y = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ .

Maintenant si nous supposons qu'on prenne  $z$  dans un logarithmique  $mb$ , telle que l'ordonnée Bb soit  $= a\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$  & qu'on prenne les abscisses BT positives, tandis qu'on prend les abscisses Bp négatives, on aura L.  $a\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = 0$ , & à l'origine A de la courbe, ou  $z = a\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ , l'on aura L.  $z = 0$ , ce qui arrivera lorsque  $x$  fera  $= 0$ ; donc l'équation

(B) donnera dans ce cas  $x = \frac{3z^4}{4a^3} + \frac{zz}{a}$ , quantité qui doit être  $= 0$ , puisque  $x = 0$ . Mais alors  $z = a\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ ; donc cette quantité deviendra  $\frac{3a}{4.9} +$

$\frac{1}{3} = \frac{a}{4.3} + \frac{4a}{4.3} = \frac{5a}{12}$ . Il faut donc ajouter une constante C à l'intégrale B, & cette constante doit être  $= -\frac{5a}{12}$ .

Maintenant si nous supposons, que la soustangente de la logarithmique  $ma$  soit  $= Bt$  & que Bt soit  $= a$ ; S.  $\frac{adz}{z} = a$  L.  $z$  fera  $= BT$ , lorsque l'on fera  $BN = Tm = z$ , & qu'on prendra les logarithmes dans la logarithmique  $mb$ . Cela posé pour construire la courbe AD, je prends  $BA = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ , en faisant  $Bt = a$ ,  $a$  est arbitraire.



Je fais ensuite  $BN = Tm = z$ , je fais l'abscisse  $BC = x = \frac{3z^4}{4a^3} + \frac{zz}{a} - \frac{1a}{12} - BT$ , & l'ordonnée correspondante  $CD = y = \frac{z^3}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$ , & j'ai le point D de la courbe, on trouvera de même tous les autres points de la même courbe, dont l'origine est en A (\*).

REMARQUE. Si l'on mène la ligne  $tc$ , elle sera parallèle à la tangente  $Gn$  au point G de la courbe, trouvé en supposant la quantité correspondante  $z = Bc$ : car l'équation  $dx = \frac{z dy}{a}$  donne  $dy = fG : dx = fM :: a$

(\*) Si l'ordonnée DC de la base est supposée déterminée, ainsi que l'annonce le Problème, qu'elle soit de dix pieds, par exemple, on doit prendre  $a$  &  $z$ , tels que

l'on ait  $y = 10$  pieds  $= \frac{z^3}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$ . Si l'on fait

$a = 1$  pied, on trouvera  $z$  par la résolution de l'équation  $z^4 + 2zz - 10z + 1 = 0$ , qui est du quatrième degré, & alors on aura facilement la valeur de  $BC = x$  ou la hauteur du solide. Si l'on veut que CD soit de 10 pieds 6 pouces, on n'aura qu'à supposer  $z$  de deux pieds, &  $a = 1$  pied.

Si on vouloit construire la courbe sans employer la logarithmique, on feroit attention qu'au point A de la courbe  $z$  est  $= a \sqrt{\frac{1}{3}}$ , ce qui donne pour la valeur de  $x$  dans ce

point  $\frac{5a}{12} - aL.(a\sqrt{13})$ , tandis qu'on doit trouver 0;

on ajouteroit donc à l'intégrale B ci-dessus qui représente la valeur de  $x$ , une constante  $C = aL.a\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{12}a$ , & l'on chercheroit ensuite pour chaque valeur de  $z$ , la valeur de  $y$  & de  $x$ ; mais comme les logarithmes dont on doit faire usage sont les hyperboliques, on pourra facilement les trouver par le moyen des tabulaires comme nous l'avons enseigné dans la première section (n°. 24).

$\equiv Bt : \zeta \equiv Bc$  ; de sorte que les côtés qui comprennent les angles droits des triangles  $GfM$ ,  $tBc$ , étant proportionnels, ces triangles sont semblables, & l'angle  $fGM$ , qui est censé le même que celui que forme la tangente  $Gn$  avec l'ordonnée, est égal à l'angle  $Btc$  ; ainsi  $Gn$  &  $Tc$  sont parallèles. Par la même raison  $tb$  est parallèle à la tangente au point  $A$  de la courbe qui, se trouvant entre les tangentes & l'axe, tourne, sa concavité vers cet axe.

En prenant les  $\zeta$  plus grands que  $Bb$ , on décrit la branche  $AD$ . Mais en prenant les  $\zeta$  plus petits que  $Bb$  on décrira la branche  $AV$ , de la même courbe qui par conséquent aura un point de rebroussement en  $A$ . Si l'on fait  $Bh = pa =$

$\zeta$ , on prendra  $\frac{Bp}{a}$  pour  $L.\zeta$ , & l'on aura  $Bp =$

$aL.\zeta$ , & au lieu de soustraire cette dernière quantité on l'ajoutera ; parce que  $Bp$  étant négatif, il faut changer le signe — en +, & les tangentes de la branche  $AV$  étant parallèles aux  $th$ , elle tournera sa convexité du côté de l'axe.

98. Si l'on fait tourner la branché  $AD$  autour de son axe, elle engendrera un solide qui aura la propriété que demande le problème. Il en sera de même si l'on fait tourner la branche  $AV$  ; on emploiera cette dernière branche, si l'on veut avoir un solide qui sous même longueur ait plus de solidité. Si l'on vouloir donner la figure de l'un des solides dont nous venons de parler à la proue d'un vaisseau on pourroit pour la rendre pointue, lui ajouter la figure conique que formeroit la tangente  $Ag$  ( au point  $A$  ) parallèle à  $tb$ , par la révolution autour de la ligne  $CN$ .

99. PROBLÈME. Si un corps  $m$  se meut dans un fluide parfait dont la densité soit  $= D$ , trouver une équation qui contienne le rapport entre l'espace parcouru & la vitesse restante. Supposons que la surface  $g$  représente la surface plane qui éprouveroit la même résistance que la surface du solide, en supposant que la vitesse de cette surface fût égale à celle du solide, & représentons la vitesse du mobile par  $u$ , ce mobile poussera chaque couche infiniment mince du fluide, avec un effort exprimé par  $g D u$  (\*), & la diminution de son mouvement sera comme le produit de  $g D u$  par le nombre des couches qu'il rencontrera, lequel est proportionnel à l'espace  $d s$  qu'il parcourt. On aura donc  $g D u d s = - m d u$ : on donne le signe  $-$  à  $d u$ , parce que l'espace augmentant  $u$  diminué; ainsi  $\frac{g D d s}{m} = - \frac{d u}{u}$ , & en intégrant & ajoutant une constante  $L.A$ , il vient  $\frac{g D s}{m} = - L. u + L. A$  (la quantité  $A$  doit être égale à la vitesse primitive avec laquelle le corps  $m$  a commencé à se mouvoir). Donc  $\frac{g D s}{m} = L. \frac{A}{u}$ , &  $\frac{g D s}{m} L. e = L. \frac{A}{u}$ ,  $e$  étant le nombre dont le logarithme hyperbolique  $= 1$ ; ainsi

---

(\*) A cause que la couche du fluide est supposée infiniment mince, elle est censée recevoir toute la vitesse actuelle du mobile.

$$\epsilon \frac{g D s}{m} = \frac{A}{u}, \& u = \frac{A}{\epsilon \frac{g D s}{m}} \dots (A), \text{équation qui ré-}$$

sout le problème.

100. PROBLEME. Supposant qu'un corps  $m$  se meut dans un fluide parfait dont la densité  $= D$ , trouver la relation entre l'espace parcouru, & le tems employé à le parcourir,  $u$  étant la vitesse,  $t$  le tems,  $s$  l'espace. On a  $u dt = ds$ ; donc l'équation  $g D u ds = -m du$  trouvée dans le problème précédent, deviendra  $g D u^2 dt = -m du$ , ou  $\frac{g D dt}{m} = -\frac{du}{uu}$ . En intégrant & ajoutant une

constante, on aura  $\frac{g D t}{m} = \frac{1}{u} - \frac{1}{A} = \frac{A-u}{A u}$ ,  $A$

étant la vitesse primitive du mobile. Si l'on substitue la valeur de  $u$  trouvée dans le problème

précédent, on aura  $\frac{g D t}{m} = \frac{\epsilon^{-1}}{A} \dots (B)$ , équation qui résout le problème.

Si un corps cylindrique dont la hauteur est  $= h$  & la base  $= g$ , se meut dans un fluide de même densité, & dans la direction de son axe, on pourra substituer  $h D g$  au lieu de  $m$ , & lorsque l'espace parcouru  $s$  sera égal à la hauteur  $h$ , on aura  $\frac{g D s}{m} = 1$ , & l'équation A (du

problème précédent) donnera  $u = \frac{A}{\epsilon}$ : on aura aussi  $\frac{g D t}{m} = \frac{\epsilon^{-1}}{A}$ . Mais  $\frac{g D}{m} = \frac{1}{h}$ ; donc  $t$

$= h. \frac{e-1}{A}$ . Soit  $h = 6$  pieds, si  $A$  est une vitesse capable de faire parcourir 10 pieds par seconde ; comme  $e = 2.71828$ , à peu-près, on aura  $u = \frac{10}{2.71828} = 3.6$ , en s'en tenant à une décimale, c'est-à-dire, que la vitesse restante pourra faire parcourir au corps environ 3.6 pieds par seconde. L'équation  $t = h. \frac{e-1}{A}$  donne dans ce cas  $t = 1.03097$ , en s'en tenant à cinq décimales, c'est-à-dire, que le mobile aura employé environ 1.03097 secondes de tems à parcourir l'espace  $h$  où sa longueur.

On peut remarquer que l'équation  $u = \frac{A}{e}$  fait voir que si plusieurs cylindres de même matière se meuvent dans un fluide de même densité & dans la direction de leur axe & qu'ils parcourent chacun un espace égal à leur longueur, les vitesses restantes sont égales aux vitesses primitives divisées par  $e$ , & par conséquent ces vitesses seront proportionnelles aux vitesses primitives.

### De l'Hydrodynamique.

101. LA théorie de l'équilibre & du mouvement des fluides est si intéressante que nous sommes persuadés que nos Lecteurs seront bien aises que nous donnions ici en peu de mots les principes généraux de l'hydrodynamique, c'est-à-dire de l'hydrostatique & de l'hydraulique. L'hydrostatique est cette science qui traite de l'équilibre des fluides, l'hydraulique au contraire traite de leurs mouvemens, de leur action & de leur

résistance. Nous avons déjà parlé de l'action & de la résistance des fluides, disons aussi quelque chose de leur équilibre & de leur mouvement.

La direction de la gravité étant perpendiculaire à l'horison, 1°. Si un fluide contenu dans un vase a sa surface parallèle à l'horison, toutes les particules qui composent les couches ou tranches horizontales, & tout le fluide seront en équilibre. 2°. Il est visible que tout le fluide contenu dans le vase AHDF (fig. 80) & celui qui pourroit être contenu dans le vase BCGE, doivent être en équilibre, en supposant que la ligne AB EF, est parallèle à l'horison, & que par conséquent le fluide contenu dans les vases communicans ABCa, EGCa HDF sera en équilibre lorsque la ligne AF sera une ligne de niveau ou parallèle à l'horison. De là on peut conclure que la pression des fluides sur une même base parallèle à l'horison est proportionnelle à la hauteur. Car si on mène la ligne aC parallèle à l'horison & que l'on suppose que AaCP représente un tube, il est évident que tout le fluide HAPCGEFDH sera en équilibre; donc la pression des deux parties AaCB, aCGEFDH sur la même base Ca sera la même. Il est évident d'ailleurs que la pression des fluides hétérogènes qui ont même hauteur & qui sont contenues dans des tubes cylindriques est proportionnelle à la densité ou à la gravité spécifique de ces fluides & à la grandeur de la base; de sorte que si la gravité spécifique d'un des fluides est double de celle de l'autre, la pression qu'exercera le premier, sera double de celle du

second ; mais si de plus la base devient triple , la pression doit devenir triple. En général la pression sera en raison composée de la base , de la hauteur & de la gravité spécifique des fluides ; & les fluides hétérogènes seront en équilibre dans les tubes communiquans , lorsqu'ils auront des hauteurs en raison inverse de leurs gravités spécifiques.

On peut conclure des principes ci-dessus , que si un solide est plongé dans un fluide , la pression relative qu'exercera ce fluide sur le solide pour le repousser sera égale au poids d'un pareil volume de fluide. Car si on suppose qu'un pareil volume de fluide de même figure vienne à occuper la place du solide , tout le fluide sera en équilibre , ce qui ne pourroit arriver si le poids de ce fluide n'étoit égal à la pression dont on vient de parler ; ainsi un corps plongé dans un fluide sera repoussé en haut avec une force égale au poids d'un pareil volume de fluide , & s'il est spécifiquement plus pesant que le fluide , il perdra une partie de son poids égale à la pesanteur d'un pareil volume de fluide. De plus les pressions horizontales du fluide se détruiront mutuellement & leur effet se réduira à presser le corps.

De là on peut conclure 1°. que si l'on plonge successivement le même solide dans des fluides de différentes pesanteurs spécifiques , les portions qu'il perdra de son poids , seront proportionnelles aux gravités spécifiques des fluides. 2°. Que différens corps plongés dans le même fluide perdront des parties de leur poids proportionnelles à leurs volumes. De plus à cause que les poids des corps sont comme les produits des volumes

& des densités, ce qui fait que les poids étant égaux, les volumes doivent être en raison inverse des densités; si on plonge plusieurs corps de même poids dans le même fluide, les parties de leurs poids que perdront ces corps, seront en raison inverse des densités. Mais parce que si on les plonge dans des fluides dont les pesanteurs spécifiques soient différentes, ils doivent perdre des parties de leur poids proportionnelles à leurs volumes, & à la gravité spécifique des fluides dans lesquels on les plonge, ils perdront des parties de leur poids qui seront en raison directe des gravités spécifiques des fluides, & en raison inverse des densités des corps plongés.

Si un corps est spécifiquement plus léger que le fluide, la partie du solide qui s'enfoncera dans le fluide sera égale au volume de fluide de même pesanteur que le solide; & parce que les volumes des corps de même poids sont en raison inverse de leurs densités ou gravités spécifiques, le volume entier du solide, sera au volume de la partie plongée, comme la gravité spécifique du fluide est à celle du solide. Ainsi les gravités spécifiques des solides de même volume, seront proportionnelles aux parties plongées dans le même fluide; & s'il s'agit de solides de même gravité spécifique, les parties plongées dans le même fluide, seront proportionnelles à leurs volumes (\*).

---

(\*) Puisque l'occasion se présente, nous jugeons à propos de dire un mot du célèbre problème de la couronne de Hieron, Roi de Syracuse. Ce Prince soupçonnant que l'ouvrier avoit mêlé de l'argent dans la couronne qu'il lui



102. PARLONS maintenant du mouvement des fluides. Selon Torricelli, les fluides qui coulent par des orifices faits dans les vases, peuvent remonter au niveau du fluide du vase, & les vitesses des premières particules qui s'écoulent sont

avoit fait faire, proposa à Archimede de trouver la portion d'argent mêlée avec l'or: voici comment on peut résoudre le problème. Soit  $P$  le poids de la couronne,  $x$  le poids de l'or contenu dans la couronne,  $z$  le poids de l'argent,  $p$  la partie du poids qu'une masse  $P$  d'or perd dans l'eau; si par exemple, l'or perdoit  $\frac{1}{15}$  de son poids dans l'eau,  $p$  seroit  $= \frac{P}{15}$ ,  $q$  la partie du poids que perd une masse d'argent  $= P$ , &  $t$  le poids que perd la couronne. En faisant  $P : p :: x : \frac{px}{p}$ , on aura le poids que perd dans

l'eau l'or de la couronne. Par la même raison  $\frac{qz}{p}$  exprimera la perte de poids de l'argent de la couronne. Mais ces deux pertes sont égales à la perte  $t$  que fait la couronne; ainsi l'on a l'équation  $\frac{px}{p} + \frac{qz}{p} = t$ . De plus

les poids  $x$  &  $z$  pris ensemble doivent être égaux au poids  $P$  de la couronne; c'est pourquoi nous aurons la seconde équation  $x + z = P$ . Donc  $z = P - x$ . Substituant cette valeur de  $z$  dans la première équation, on trouvera facilement  $x = \frac{(q - t) \cdot P}{q - p}$ . Cette valeur substituée dans

l'équation  $z = P - x$  donnera  $z = \frac{(t - p) \cdot P}{q - p}$ . Cependant cette solution suppose que l'or & l'argent qui entrent dans la couronne forment après le mélange un volume égal à la somme des volumes qu'ils donneraient s'ils étoient séparés, ce qui sans doute n'est vrai qu'à peu-près, & non exactement.

en raison soudoublée de la hauteur. Mais ce Savant ayant remarqué que dans les eaux jaillissantes, la hauteur du jet n'alloit pas tout-à-fait jusqu'au niveau de l'eau du réservoir, il attribua cette différence en partie à la résistance de l'air (résistance qui est cause de la division des gouttes d'eau qu'on observe dans les jets), & en partie à l'eau qui en retombant du sommet du jet, retarde les gouttes suivantes. En effet les premières gouttes d'eau qui sortent lorsqu'on ouvre l'orifice, montent plus haut que les suivantes, & lorsque par le moyen de la machine pneumatique on a pompé l'air, la dispersion des gouttes n'a pas lieu, & la hauteur du jet augmente. Mariotte dans son Traité du mouvement des eaux, ajoute à ces causes le frottement que souffre l'eau en sortant par les orifices, frottement qu'il a trouvé être plus considérable pour les grands que pour les petits jets, de manière que la hauteur de l'eau au-dessus de l'orifice étant de cinq pieds, la hauteur du jet n'est moindre que d'une  $\frac{1}{60}$  partie de cette hauteur, & lorsque la hauteur est de 33 ou 44 pieds, la diminution de la hauteur du jet n'est qu'une  $\frac{1}{11}$  partie de cette hauteur. Par les expériences de Mariotte, Gulielmini & autres, les vitesses des eaux qui coulent par des orifices égaux & semblables, mais situés à différentes distances de la surface de l'eau, sont en raison soudoublée, du moins à peu-près, des hauteurs. Ce qu'on dit des vitesses doit s'entendre des quantités d'eau qui coulent en même-tems par ces orifices. Gulielmini dans son livre second de la mesure des eaux coulantes, ayant fait au côté d'un vase 16 orifices

égaux, dont chacun pouvoit être ouvert, les autres étant fermés, trouva six fois les quantités d'eau proportionnelles aux racines des hauteurs, il trouva une fois un défaut de  $\frac{1}{34}$ , une fois un défaut d'un  $\frac{1}{36}$  & dans les huit autres expériences le défaut fut d'un  $\frac{1}{100}$ , ou plus petit.

103. PROBLEME. Supposant que la vitesse d'un fluide qui s'écoule par un orifice est proportionnelle à la racine de la hauteur du fluide, cherchons quelle seroit la quantité d'eau qui s'écouleroit par un orifice quarré  $ABDC$  (fig. 81) qu'on auroit pratiqué dans une des faces d'un vase parallélipède  $HTDC$ , en supposant que la surface du fluide est terminée par la ligne  $AB$ , & que pendant l'écoulement on entretient le fluide à cette hauteur. Soit  $AC = CD = a = 1$ ,  $am = x$ ,  $MN$  parallèle & égale à  $CD$  & perpendiculaire à  $am$ , étant multipliée par  $mp = dx$  donnera  $adx$  pour l'élément

$Mg.nN$  de l'orifice. Multipliant  $adx$  par  $x^{\frac{1}{2}}$ , on aura  $ax^{\frac{1}{2}}dx$  pour l'élément de la quantité de fluide qui s'écoule à chaque instant; donc

$S. ax^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}}$ , sera la quantité de fluide qui s'écoule à chaque instant par la partie  $AMNB$

de l'orifice; & si l'on fait  $x = a$ ,  $\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$  sera la quantité de fluide qui coulera par l'orifice entier. Si l'on mesure la quantité de fluide qui coule pendant une seconde, & qu'on la fasse =

$\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$ , en multipliant ensuite par 60, on aura la quantité de fluide qui s'écoulera pendant une minute.

Si par le milieu  $a$  du côté  $AB$ , on tire les lignes  $aC$ ,  $aD$  pour avoir le triangle ifocelle  $CaD$ , les triangles semblables  $aCb$ ,  $arm$ , donneront  $ab = a : bC = \frac{a}{2} :: am = x : mr = \frac{x}{2}$ ; ainsi  $rt = x$ , &  $rt su = x dx$ . Donc l'élément de la quantité de fluide écoulé fera  $= x \cdot x^{\frac{1}{2}} dx = x^{\frac{3}{2}} dx$ , &  $\frac{2}{7} x^{\frac{3}{2}}$  fera la quantité de fluide écoulé, & lorsque  $x$  fera  $= a = 1$ , l'on aura  $\frac{2}{7} a^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{7}$  pour la quantité d'eau écoulée par l'orifice triangulaire  $aCD$ .

104. Si dans le carré on inscrit un cercle dont l'ordonnée soit  $mi$  (fig. 82), on aura  $2mi \cdot mp$  pour l'élément de l'aire de ce cercle. Mais si l'on veut avoir la quantité d'eau qui s'écoulera par la partie  $tbi$ , on multipliera  $2ph = 2x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$  par  $pm$ , en faisant  $pm = -dx$ , parce que nous prenons, les  $dx$  dans un sens contraire aux  $x$  qui se prennent en allant de  $a$  vers  $b$ ; & en multipliant cette quantité par  $x^{\frac{1}{2}}$ , l'élément du fluide écoulé fera  $= -2x dx (1-x)^{\frac{1}{2}} = -2dx(1-x)^{\frac{3}{2}} + 2dx(1-x)^{\frac{1}{2}}$ , à cause de  $x = am = 1 - mb = 1 - (1-x)$ . Donc l'intégrale fera  $\frac{4}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}$ ; s'il

s'agit de l'orifice entier, on aura  $1 = b m$ , ou  $1 - x = 1$  & l'intégrale sera  $= \frac{8}{15}$ ; ainsi la quantité qui coulera par l'orifice circulaire entier sera  $= \frac{8}{15}$ .

Si la courbe  $M a N$  (fig. 83) étoit une parabole dont le paramètre fût égal à  $b D = 1 = BD$ , l'axe  $a b$ , l'ordonnée  $m N = y$ , on auroit  $y = x^{\frac{1}{2}}$ ,  $2 x^{\frac{1}{2}} d x$  seroit l'élément de la parabole,  $2 x d x$  l'élément de la quantité du fluide écoulé,  $x^2$  la quantité d'eau écoulée correspondante à l'abscisse  $a m$ , & 1 la quantité correspondante à l'abscisse  $a b = 1$ , ce qui ne doit pas surprendre, parce que l'ordonnée correspondante à cette abscisse étant  $= 1$ , la largeur de la parabole sera  $= 2$ .

105. Supposons maintenant que  $H T$  (fig. 81.) est la surface du fluide, en faisant  $P m = x$ , l'on aura dans le cas de l'orifice quarré  $A B C D$ , l'on aura, dis-je (en faisant  $A B = A C = 1$ ),  $x^{\frac{1}{2}} d x$  pour l'élément de la quantité de fluide écoulé, &  $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$  pour la quantité d'eau écoulée par la partie  $A M N B$ . Pour déterminer la constante  $C$ , je remarque que l'intégrale doit s'évanouir, lorsque  $x$  devient  $= B a$  que je supposerai  $= a$ ; donc  $\frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} + C = 0$ , ou  $C = -\frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}}$ ; ainsi l'intégrale complete sera  $\frac{2}{3} (x^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}})$ , qui lorsque  $x = P b = a$

$+1$ , devient  $= \frac{2}{3} (\overline{a+1}^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}})$ . Dans le cas de l'orifice triangulaire, on aura l'élément du fluide écoulé  $= x dx \sqrt{x+a}$ , en faisant  $Pa = a$  &  $am = x$ . Si l'on suppose  $\sqrt{x+a} = z$ , on rendra cette formule rationnelle, & l'on pourra facilement l'intégrer. En effet l'on aura  $S. x dx \sqrt{a+x} = S. 2 dz (z^4 - a z z) = \frac{2}{5} z^5 - \frac{2}{3} a z^3$ . Cette intégrale devant s'évanouir lorsque  $x=0$ , ou lorsque  $z = \sqrt{a}$ , on doit lui ajouter une constante  $C = + \frac{4}{15} a^2 \sqrt{a}$ .

Si l'on suppose que la courbe  $MaN$  (fig. 83) est une hyperbole équilatère \* dont l'un des axes soit  $= a = aP$ , en faisant  $am = x$ ,  $\sqrt{a+x}$  sera la racine de la hauteur  $Pm$ , & l'on aura  $MN = 2. \sqrt{ax + xx} = 2x^{\frac{1}{2}} \sqrt{a+x}$ , & l'élément du fluide écoulé sera  $= 2x^{\frac{3}{2}} (a+x). dx = 2ax^{\frac{1}{2}} dx + 2x^{\frac{5}{2}} dx$ , son intégrale sera  $= \frac{4}{3} ax^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{7} x^{\frac{7}{2}}$ . Cette intégrale s'évanouissant lorsque  $x=0$  est complète, & si l'on suppose  $x=1=ab$ , elle deviendra  $= \frac{4a}{3} + \frac{4}{7}$ . Si l'équation de la courbe  $MaN$  est  $y = x \sqrt{a+x}$ ,  $2x dx (a+x)$  sera l'élément du fluide écoulé. \* Donc en intégrant, l'on aura  $axx + \frac{2x^3}{3}$ , expression du fluide écoulé par le segment  $MaN$ . Si on suppose  $x=1$ , la quantité du fluide écoulé par l'ouverture  $CaD$  sera  $= a.1 + \frac{2}{3}$ . Il n'est pas difficile de voir

comment il faut s'y prendre lorsque les orifices ont d'autres figures.

106. TORICELLI conclut que la vitesse des fluides doit être proportionnelle à la racine de la hauteur, principalement de ce que si l'on adaptoit un tube (convenable) à l'orifice, l'eau monteroit jusqu'à une ligne horizontale menée sur la surface supérieure du vase (supposé plein). Varignon dans les Mémoires de l'Académie (année 1703) a voulu conclure la même chose de ce que la pression est proportionnelle à la hauteur, & que la quantité du mouvement est comme le produit de la quantité du fluide & de la vitesse, (laquelle est aussi comme la quantité du fluide) ou comme le carré de la vitesse. Herman a suivi la même méthode dans sa Phoronomie. Daniel Bernoulli a voulu le prouver par le principe du Savant Huygens, de l'égalité entre la descente actuelle & l'ascension potentielle des corps. Le grand Newton (l. 2, proposition 36) considère l'eau comme si elle descendoit de la hauteur qu'elle a au-dessus de l'orifice. On peut remarquer aussi que les particules d'eau qui jaillissent d'un orifice ouvert ne suivent pas toutes une direction perpendiculaire à la surface de l'orifice; mais plusieurs en coulent vers les bords, par des mouvemens obliques & convergens, ce qui refait la veine de l'eau coulante & la rétrécit à une petite distance de l'orifice. On peut reconnoître ces mouvemens, en jettant de la poussière dans l'eau, ainsi que l'a fait le Savant Daniel Bernoulli; comme on peut le voir dans son Hydro-dynamique, partie 3, section 4. M. Newton a trouvé qu'à un demi-pouce à peu-près de

l'orifice le diamètre de la veine resserrée, est à celui de l'orifice comme 21 : 25. D'autres ont trouvé d'autres rapports. Il y en a qui ont observé que la contraction de la veine n'avoit lieu que pour les petits orifices de trois ou quatre lignes de diamètre, & qu'à peine elle étoit sensible pour de plus grandes ouvertures.

Il est aisé de comprendre combien sont éloignées de la force de la démonstration les raisons par lesquelles Toricelli, Vatignon, Herman ont conjecturé que la vitesse de l'eau étoit proportionnelle à la racine de la hauteur, & combien est éloignée de la vérité l'hypothèse de Newton & de Daniel Bernoulli, que l'eau qui coule par un orifice est descendue de toute la hauteur du vase. Cependant par les expériences de Mariotte, Guilielmini, Polenus, répétées avec soin par l'illustre Lecchi, comme on peut le voir dans son hydrostatique imprimée en 1765, on peut, avec assez de confiance supposer, que la vitesse est proportionnelle à la racine de la hauteur. Les expériences font voir que les orifices doivent avoir un certain rapport avec la capacité des vases. Si les orifices sont trop grands, il peut se faire, à cause de la cohésion des parties du fluide, que la nouvelle eau ne succède pas tout de suite à celle qui vient de s'écouler. Si les orifices sont trop petits, le frottement & la cohésion des parties peuvent retenir le fluide. Guilielmini ayant rempli successivement le même tube d'eau & de mercure, observa que le tems des écoulemens étoit le même dans les deux cas. On peut traiter en peu de mots ce qui regarde l'équilibre des fluides, mais la théorie de leur mouvement n'est appuyée que sur des hypothèses & n'offre que des doutes



& des incertitudes. Lorsqu'il s'agit de déterminer les mouvemens des corps les problèmes sont d'autant plus compliqués qu'il y a un plus grand nombre de corps qui agissent les uns contre les autres ; & puisque les particules des fluides agissent toutes les unes sur les autres en se pressant & en se mouvant d'une maniere que personne ne connoît & ne connoîtra peut-être jamais, il est visible que le problème par lequel on demande de déterminer leurs mouvemens, leur action & leur résistance surpasse les forces de la Géométrie & de l'analyse connues, & que c'est en pure perte que l'on feroit des efforts pour résoudre de tels problèmes, puisque la solution ne pouvant être appuyée que sur des hypothèses qu'on ne sauroit démontrer, ne peut jamais être bien rigoureuse.

107. PROBLÈME. Soit un tube cylindrique ABHG (fig. 84) ouvert de tous côtés, plein d'eau, de maniere que l'ayant enfoncé jusques en fG (Tt représentant le niveau de l'eau du vase NDCM) on retire subitement le ponce avec lequel on tenoit l'orifice GH fermé, on demande à quelle profondeur au-dessous de Tt l'eau pourra descendre. Soit la longueur du tube  $AG = a$ , le cercle dont le diamètre est  $AB = c$ , la gravité spécifique de l'eau  $= n$ ,  $fG = b$ , l'espace AP, par lequel l'eau descend  $= x$ . Il est visible que l'eau fG H g étant en équilibre avec celle du vase ne contribue en rien au mouvement de l'eau du tube ; de sorte que la puissance motrice est seulement égale à la masse  $P m g f$ , qui se trouve au-dessus du niveau. Mais  $P f = a - b - x$  ; donc  $P m g f = (a - b - x) n c$  : or cette masse motrice doit mouvoir à chaque instant la masse  $PH = (a - x) n c$ . Donc la force accélératrice du fluide dans le tube est =

$\frac{a-b-x}{a-x}$ . Soit  $v$  la vitesse du fluide au point  $P$ ,  $g$  l'espace que la gravité fait parcourir aux corps dans une seconde de tems, on aura  $v dv = 2 g \cdot \frac{(a-x-b) dx}{a-x} = -\frac{2 g b dx}{a-x} + 2 g dx$ , &  $v^2 = 4 g b L \cdot \left( \frac{a-x}{a} \right) + 4 g x$ , en ajoutant une constante  $C = -L \cdot a$ , qui rende  $v = 0$ , lorsque  $x = 0$ . Si donc on fait  $v = 0$  pour avoir  $4 g b \cdot L \cdot \left( \frac{a-x}{a} \right) + 4 g x = 0$ ,  $x$  indiquera la profondeur  $AR$ , à laquelle le fluide descendra dans le tube.

108. THEOREME. *Les oscillations d'un fluide qui monte & descend par les branches d'un siphon B A S T D C (fig. 85) sont tautochrones, c'est-à-dire d'égale durée.* Supposons que le niveau du fluide soit représenté par la ligne  $MP$ , la longueur du canal  $MTP$  étant  $= L$ . Soit le sinus de l'angle  $BQR = p$ . Supposons encore que le fluide en montant dans la branche  $ASQB$  parvienne en  $mn$ , tandis qu'elle descend dans l'autre branche jusqu'en  $po$ . Soit  $Bn = x$ ,  $BN = a$ , &  $Nn = a - x$ , la grandeur de l'amplitude  $AB = e$ , celle de l'amplitude correspondante  $CD = f$ . Puisqu'il doit monter autant d'eau dans une des branches qu'il en descend dans l'autre, on aura  $e \cdot Nn = f \cdot Pp$ , ou  $Pp = \frac{e \cdot (a-x)}{f}$ .

Mais en faisant le rayon  $= 1$ , on a  $1 : q = \sin. QRC = \sin. LOC = \sin. LOO :: Oo = Pp : lo = LK$ . Donc  $LK = \frac{e \cdot q \cdot (a-x)}{f}$ . De plus  $QK : QZ :: \sin. QZK$

$$= p:1::LK:NZ, \text{ ou } p:1::LK:NZ = \frac{eq}{fp}(a-x).$$

$$\text{Donc } nZ = nN + NZ = a - x + \frac{eq}{fp}x.$$

$$(a-x) = \frac{(a-x) \cdot (fp+eq)}{fp} = \frac{(a-x)h}{p}, \text{ en.}$$

$$\text{faisant } \frac{fp+eq}{f} = h. \text{ Enfin } ZQ:QK::nZ:qK,$$

ou  $1:p::nZ:QK = (a-x)h$ . Maintenant il est visible que la quantité de fluide  $mZ$  est  $= (ah-hx)e$ . Donc la masse de fluide B, contenue dans le siphon est sollicitée par la force motrice  $(ah-hx)e$ . Soit la vitesse de l'eau qui descend  $= v$ , nous aurons  $v dv =$

$$\frac{(ah-hx)2g \cdot e dx}{B}, \text{ \& } v = \sqrt{\left[ ge \left( \frac{4ahx-2hxx}{B} \right) \right]};$$

ainsi le tems employé à parcourir  $nN$  fera  $t =$

$$S. \frac{dx}{v} = S. \left( \frac{dx}{\sqrt{(eg \cdot 4ahx - 2eghxx)}} \right) \cdot \sqrt{B} =$$

$$\sqrt{\frac{B}{2hge}} \cdot S \frac{dx}{\sqrt{(2ax-xx)}} = \sqrt{\frac{B}{2hge}} \cdot A \sin. \frac{x}{a}.$$

Si l'on suppose  $nN = BN = NZ = x = a$ , l'on aura le tems d'une demi-oscillation, & ce tems,

à cause de l'arc  $A \sin. \frac{x}{a}$  qui, dans ce cas  $= \frac{c}{2}$

( $c$  étant la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon  $= 1$ ), fera  $t = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{\frac{B}{2hge}}$ . Comme l'es-

pace qui doit être parcouru n'entre point dans cette expression, il s'en suit que dans le même siphon, les demi-oscillations & par conséquent les oscillations entières sont tautochrones.

109. PROBLÈME. Déterminer la longueur d'une pendule qui fait ses demi-oscillations dans le tems que le fluide du siphon du théorème précédent emploie à monter ou à descendre. Le tems d'une demi-vibration dans un pendule dont la longueur est  $a$ , étant  $= \frac{c}{2} \sqrt{\frac{a}{2g}}$ , nous aurons

$$\frac{c}{2} \sqrt{\frac{a}{2g}} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{B}{2hg \cdot e}}; \text{ donc } a = \frac{B}{he} =$$

$\frac{Bf}{(fp + eq)e}$ . Si nous supposons que les branches du siphon sont verticales & que  $e = f$ , il viendra

$$a = \frac{Bf}{2ff} = \frac{B}{2f}. \text{ Mais la longueur du canal étant}$$

$$\text{supposée} = b, \text{ on a } B = bf; \text{ donc } a = \frac{bf}{2f} = \frac{b}{2};$$

c'est-à-dire que dans ce cas la longueur du pendule est égale à la demi-longueur de la colonne de fluide (\*).

(\*) Le savant Newton a comparé (*Principes de la Philosophie naturelle*, Liv. II, Section 8) le mouvement des ondes avec celui de l'eau dans les siphons ou canaux. Si l'on conçoit que par une action quelconque dirigée sur le point A (fig. 86), il s'est produit une cavité A dans une eau stagnante fG, l'équilibre de cette eau en sera troublé, & les eaux s'élèveront à droite & à gauche jusques en C & B pour redescendre ensuite par leur gravité, en partie du côté de A, en partie du côté de G & de F. Il est visible que par les vitesses dues aux hauteurs Bb, Cc les eaux formeront des nouvelles cavités en F & D, d'où elles s'élèveront de nouveau en H & E, & ainsi de suite le mouvement des ondes se propagera en cercles autour du point A par des montées & des descentes successives.

Si on suppose un pendule dont la longueur soit  $= \frac{AC}{2}$

Si on suppose  $e=f$ , on a  $B=b f=b e$  &  $a=\frac{b}{p+q}$ ; c'est-à-dire que dans ce cas la longueur du pendule est égale à celle du canal occupé par l'eau, divisée par la somme des sinus d'inclinaison des branches du siphon.

$\frac{BA}{2}$ , à cause de  $AC=BA$ , l'onde descendra dans le creux

$BA$ , ou montera au sommet du fillon  $AC$  dans le même tems que ce pendule fera une vibration. Ainsi il fera deux vibrations entières pendant le tems que l'onde montera & descendra, c'est-à-dire, pendant le tems que l'onde parcourra sa largeur  $BC$  ou  $AD$ . En effet il fera une demi-oscillation dans le tems que l'eau  $B$  parviendra en  $b$  qui est le point où elle s'arrêteroit si elle ne continuoit à se mouvoir par le mouvement acquis de  $B$  en  $b$ ; de sorte que le tems que le point  $B$  met à parcourir  $Bb$  est le même que celui d'une demi-oscillation dans un siphon dont une des branches seroit  $Bb$  & l'autre  $bD=bB$ . Mais le nombre des vibrations des pendules suit la raison renversée soudoublée de leurs

longueurs; donc un pendule dont la longueur seroit  $4 \frac{AB}{2}$

$=2.AB$ , fera une oscillation dans le tems que l'onde parcourra sa largeur  $BC$ , qu'on peut supposer  $=2.AB$ , à cause du peu de profondeur des ondes. Si l'on fait  $=p$  la longueur d'un pendule qui fait une vibration dans une seconde, la proportion  $\sqrt{p} : 1'' :: \sqrt{BC} : t$  donnera le tems d'une vi-

bration d'un pendule de la longueur  $BC$ , ou  $t = \frac{\sqrt{BC}}{\sqrt{p}}$ .

Si l'on divise l'espace  $BC$  par le tems  $t$ , on aura la vitesse de l'onde  $v = \sqrt{BC.p}$ , de sorte que la vitesse des ondes suit la raison sous-doublée de leurs largeurs; & si l'on suppose  $BC=p$ ,  $v$  sera  $=p$ . Les ondes qui ont 3 pieds  $8\frac{1}{2}$  lignes de largeur parcourent cet espace en une seconde, & par conséquent 183 pieds 6 pouces 6 lignes dans une minute.

Cependant ces choses ne sont vraies qu'à peu-près, parce qu'on suppose que dans les ondulations les parties de l'eau montent & descendent en ligne droite, au lieu que leur mouvement se fait en ligne courbe.

110. PROBLÈME. Déterminer le choc de l'eau qui frappe horizontalement les ailes inférieures de la roue d'un moulin (fig. 87). Soit le rayon AC de la roue  $= b$ ,  $CB = a$ , la longueur de l'aile sera  $= a - b$ , soit la largeur de l'aile  $= f$ , la vitesse de l'eau  $= c$ , celle du point B, extrémité du rayon CA  $= v$ , la vitesse avec laquelle l'eau choque le point B sera  $= c - v$ . Mais si on suppose  $CP = x$ , on aura la vitesse du point

$$P = \frac{xv}{a} = xv : a, \text{ \& celle avec laquelle l'eau}$$

choque ce point sera  $= c - \frac{xv}{a}$ . Mais l'élément MNnm de l'aile étant  $= f dx$ , l'action de l'eau contre cet élément sera exprimée par  $f x \left( c - \frac{xv}{a} \right)^2 dx$ .

Dont l'intégrale est  $f \left( \frac{x^2 c c}{2} - \frac{2}{3} \frac{c v x^3}{a} + \frac{1}{4} \frac{v^2}{a^2} x^4 \right)$

$= \left( \frac{c^2 x^2}{2 a a} - \frac{2 c x^3 v}{3 a^2} + \frac{x^4 v^2}{4 a^4} \right) f a a + C$ , en

ajoutant une constante C. Mais au point A le choc est nul; donc en faisant  $x = b$ , l'on aura  $C =$

$- f a a \left( \frac{c^2 b^2}{2 a a} - \frac{2 c b^3 v}{3 a^2} + \frac{b^4 v^2}{4 a^4} \right)$ . Ainsi l'action de l'eau sur la partie DMNE de l'aile sera

$= f a a \left( - \frac{c^2 b^2}{2 a a} + \frac{2 c b^3 v}{3 a^2} - \frac{b^4 v^2}{4 a^4} + \frac{c^2 x^2}{2 a a} \right.$

$\left. - \frac{2 c x^3 v}{3 a^2} + \frac{x^4 v^2}{4 a^4} \right) = a c^2 m \left( - \frac{A v}{c} + B + \frac{C v^2}{c^2} \right)$ , en faisant  $x = a$ ,  $\frac{b}{a} = p$ , ou 1 —

$p = \frac{a-b}{a}$ ,  $\frac{2}{3}(1+p+p^2) = A$ ,  $\frac{1+p}{2} = B$ ,  
 $\left(\frac{1+p^2}{4}\right)(1+p) = C$ , & la surface  $f.(a-b)$   
 de l'aîle =  $m$ . On peut regarder ce moment de  
 percussion comme un poids d'eau =  $c^2 m \left(-\frac{Av}{c}\right.$   
 $\left.+ B + \frac{Cv^2}{c^2}\right)$  appliqué au rayon  $a = CB$ .

III. PROBLÈME. Déterminer la construction d'un  
 moulin qui doit produire le plus grand effet possible.  
 Puisque l'effet d'une machine doit s'estimer par  
 la vitesse du fardeau qu'elle doit élever & par  
 le poids de ce fardeau, si nous faisons ce fardeau  
 =  $P$  & sa vitesse =  $V$ , l'effet du moulin sera =  $P.V$ .  
 Mais la puissance motrice appliquée au rayon  $GB$  est  
 =  $c^2 m \left(B - \frac{Av}{c} + \frac{Cv^2}{c^2}\right)$  & sa vitesse est =  $v$ ;

donc en faisant  $\frac{v}{c} = z$ , ou  $v = cz$ , & multi-  
 pliant cette puissance par  $cz = v$ ,  $c^3 m z (B - Az$   
 $+ Cz^2)$  fera comme  $PV$ . Or en faisant  $z$  variable  
 le maximum de cet effet donne  $c^3 m (B -$   
 $2Az + 3Cz^2) = 0$ ; donc  $z = \frac{A}{3C} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{9C^2}\right.$   
 $\left.- \frac{B}{3C}\right)}$ . Mais dans le cas du maximum on doit  
 faire  $z = \frac{A}{3C} - \sqrt{\left(\frac{A^2}{9C^2} - \frac{B}{3C}\right)}$  comme il est  
 facile de le conclure de ce que nous avons dit  
 sur les maxima & les minima dans le calcul diffé-

rentiel. Comme la valeur de  $\chi$  est non-seulement très-compiquée, mais qu'elle est encore différente selon les valeurs de  $a$  & de  $b$ , il est à propos de chercher une valeur moyenne. Or il n'est pas conve-

nable que  $b$  soit  $< \frac{a}{2}$ , ni  $> \frac{2a}{10}$ . Si nous suppo-

sons  $b = \frac{a}{2}$ , nous aurons  $p = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ , &

$\frac{2}{3} (1 + p + p^2) = \frac{7}{6}$ ,  $B = \frac{1+p}{2} = \frac{3}{4}$ ,  $C =$

$\frac{13}{12}$ . D'où l'on tire  $\chi = \frac{v}{c} = 0.43$ ; c'est-à-dire que

$v$  fera  $= 0.43 c$ . Dans le second cas ou  $b =$

$\frac{2a}{10}$ , il vient  $\frac{b}{a} = p = \frac{2}{10}$ ,  $A = \frac{17}{13}$ ,  $B = \frac{19}{20}$ ,

$C = \frac{86}{100}$ , d'où l'on tire  $v = 0.31 c$ . Donc la vitesse de la roue est plus grande, lorsque les aîles sont plus courtes (\*).

Comme les vitesses de la roue dans ces deux suppositions extrêmes ne diffèrent pas beaucoup prenons une valeur moyenne arithmétique entre celles de  $p$

ou de  $\frac{b}{a}$ , cette valeur fera  $(\frac{1}{2} + \frac{2}{10}) : 2 = 0.7$ ,

& alors la longueur de l'aîle  $a - b$  fera  $=$

$\left(\frac{a-b}{a}\right) a = \frac{3a}{10} = \frac{3b}{7}$ , c'est-à-dire que la lon-

(\*) Mais il est visible que pour qu'il se fasse une espèce de compensation, il est nécessaire que les aîles aient une certaine longueur; car si elles sont trop courtes le choc sera moindre, que si elles sont plus longues.



gueur de l'aîle doit être les  $\frac{1}{2}$  du rayon de la roue & alors  $z = \frac{v}{c} = 0.38$  à peu-près ; donc la vitesse des aîles doit être à peu-près les  $\frac{38}{100}$  de celle du fluide ou à peu-près les deux cinquièmes de celle du fluide (\*). On voit par là que la théorie vulgaire que nous avons exposée ci-dessus ne s'accorde pas avec celle-ci, ce qui vient de ce que l'on y a regardé l'aîle comme un plan mu dans la même direction que le fluide ; mais la solution que nous venons de donner s'accorde à très-peu près avec l'expérience.

(\*) Si l'on substitue la valeur de  $z$  dans l'expression  $c^3 m (B - A z + c z^2)$ , on trouvera que le plus grand effet est comme  $\frac{7 c^3 m}{50}$  ; mais si l'aîle étoit en repos le choc du fluide seroit  $= c^2 m$ , & le moment de ce choc  $= c m^2$ . Donc le plus grand effet est un peu plus petit que la septième partie de celui que le fluide peut produire par son choc.

Combinons avec la grande roue du moulin un assemblage de roues dont la dernière qui fait mouvoir le fardeau P fasse un nombre  $n$  de révolutions avec la vitesse  $V$ , tandis que la grande n'en fait qu'une, nous aurons  $v : V :: 1 : n$ , &  $V =$

$$\frac{v n}{1} = 0.38. c n. \text{ Ainsi } \frac{7 c^3 m}{50} = 0.38 P c n. \text{ D'où l'on}$$

tire  $n = \frac{7 c^2 m}{19 P}$ , équation qui déterminera la construction de la machine.

Mais en faisant  $= 2 p$ , la circonférence d'un cercle dont le rayon  $= r$ ,  $\frac{2 a p}{v} = \frac{200. p a}{38. c}$  exprimera le tems d'une révolution de la grande roue, pendant lequel celle

112. PROBLÈME. *Déterminer le moment d'impulsion des ailes d'un moulin à vent.* Soit MM la coupe d'une aile perpendiculairement à son axe AC (fig. 89), & supposons que le vent aille

qui fait mouvoir le poids P fait le nombre  $n$  des révolutions.

Si la résistance de la meule qui écrase le bled est désignée par  $P. q$ , ayant pris  $q$  pour le levier auquel cette résistance est censé appliquée, nous aurons  $2 p a :$

$$2 p n q :: v : V = \frac{v n q}{a} = \frac{38. c n q}{100. a}. \text{ Donc } P V = \frac{7 c^3 m}{50} \\ = \frac{38. P c n q}{100. a}, \text{ d'où lon tire } n = \frac{7 c^2 m a}{19. P q}.$$

Si l'action de l'eau est comme le quarré de la vitesse multiplié par  $a$ ,  $a v^2$  exprimera cet effort. Si l'on appelle  $x$  la hauteur dont un corps devoit tomber pour acquérir cette vitesse, l'on aura  $v dv = 2 g. dx$ ,  $2 g$  étant la vitesse que la gravité communique dans une seconde, &  $v^2 =$

$$4 g. x = 60. x, \text{ ou } x = \frac{v^2}{60}, \text{ \& la résistance par rap-}$$

port à la surface  $f$  sera exprimée par  $a x f$ . Or  $f x$  est un prisme qu'il faut multiplier par le poids  $n$  d'un pied cube d'eau en supposant ce prisme exprimé en pieds. A l'égard du coefficient  $a$  il paroît par certaines expériences qu'on peut le faire à peu-près égal 1.7; ainsi 1.7  $f n h$  désignera l'action de l'eau correspondante à la vitesse  $c$  due à la hauteur  $h$ .

Voici à peu-près comme il paroît qu'on peut s'y prendre pour déterminer le nombre des ailes d'une roue de moulin pour que le choc de l'eau ne soit pas affoibli par leur nombre (fig. 88). Nous supposons que les directions des ailes forment un angle BCE au centre de la roue. Cela posé, menons la ligne horisontale NA qui indiquera la direction du fleuve, il est visible que la partie FE de l'aile DE est frappée par l'eau, aussi-bien que la partie HB de l'aile verticale AB. Afin donc que le choc de l'eau sur la roue ne soit pas diminué par l'interposition de l'aile

frapper cette coupe (fig. 90) avec la vitesse & la direction VP. Soit PE la vitesse de l'aile qui ne peut tourner que dans une direction perpendiculaire à PV, ou EL, puisque pendant

DE, il est nécessaire que l'action de l'eau sur les parties HB, EF soit égale à celle qui auroit lieu sur l'aile verticale AB sans l'interposition de l'aile DE.

Supposons pour ne pas nous jeter sans nécessité dans des calculs compliqués, que la roue est en repos, & que l'eau vient frapper avec la vitesse C les ailes immobiles AB, DE. Soit l'angle BCE = p, CA = b, CB = a, la longueur des ailes = a - b, leur largeur = f, & le rayon = 1. Le triangle rectangle HCE donne 1 : a :: cos. p : CH = a. cos. p; donc HB = a - a. cos. p. Ainsi le choc de la surface HB sera = fC<sup>2</sup> (a - a. cos. p). Mais FG = AH = CH - CA = a. cos. p - b. Donc

FE =  $\frac{a. \cos. p - b}{\cos. p}$ ; ainsi le choc de la surface FE (qui

est oblique), sera =  $\left(\frac{a. \cos. p - b}{\cos. p}\right) \cdot f. \sin. CFA. C^2 =$

$\left(\frac{a. \cos. p - b}{\cos. p}\right) \cdot f. \overline{\cos. p}^2 C^2 = (a. \cos. p - b. \cos. p) fC^2.$

Mais le choc perpendiculaire de l'aile AB est = (a - b) f. C<sup>2</sup>.

Donc (a - b) f. C<sup>2</sup> = (a. cos. p - b. cos. p) fC<sup>2</sup> + (a - a. cos. p) f. C<sup>2</sup>. Donc a - b = a. cos. p - b. cos. p + a - a. cos. p, ou  $\overline{\cos. p}^2 - \left(\frac{a+b}{a}\right) \cdot \cos. p = -\frac{b}{a}$ ; &

$\cos. p = \left(\frac{a+b}{2a}\right) \pm \sqrt{\left[\left(\frac{a+b}{2a}\right)^2 - \frac{b}{a}\right]} =$   
 $\frac{a+b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2 - 2ab + b^2}{4aa}\right)} = \frac{a+b}{2a} \pm \left(\frac{a-b}{2a}\right);$

qu'une particule d'air fait le chemin  $VP = LE$ , le point  $P$  de l'axe de l'aile fait le chemin  $PE$ , il est visible qu'en décomposant  $LE$  en  $PE = Ln$  &  $PL = En$ ,  $PL$  sera la vitesse & la direc-

donc  $\cos. p = 1$ , &  $\cos. p = \frac{b}{a}$ . Si  $\cos. p = 1$ , on aura  $p = BCE = 90^\circ$ , c'est-à-dire, que la roue ne devrait avoir que quatre ailes distantes l'une de l'autre d'un quart de cercle. Mais parce que l'impulsion de l'eau sur la roue doit être continu & non interrompu, il est convenable que le nombre des ailes soit plus grand. Il faut donc rejeter la première valeur de  $\cos. p$ , & employer la seconde  $\cos. p = \frac{b}{a}$ ; donc  $\sin. p = \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}$ . C'est pourquoi selon les différentes valeurs de  $\frac{b}{a}$  le nombre des ailes de la roue doit être différent. Supposons pour les limites de la valeur de  $\frac{b}{a}$ ,  $\frac{1}{2}$  &  $\frac{7}{10}$ . Si  $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ , on aura  $\sin. p = \sin. 60^\circ$ . Ainsi dans ce cas la roue doit avoir 6 ailes. Si  $\frac{b}{a} = \frac{7}{10}$ , il vient  $\sin. p = \sin. 25^\circ. 45'$ , c'est-à-dire, que la roue doit alors avoir 14 ailes. Ainsi une roue ne doit avoir ni moins de six ailes, ni plus de quatorze. Si  $\frac{b}{a} = \frac{7}{10}$ , on aura  $\sin. \frac{b}{a} = \sin. 43^\circ. 36'$ ; ainsi une telle roue doit avoir neuf ailes.

REMARQUE I. L'on doit toujours prendre pour la longueur  $a - b$  de l'aile, la profondeur à laquelle l'aile verticale  $AB$  peut s'enfoncer dans l'eau. La théorie des moulins dont les roues sont horizontales est appuyée sur les mêmes principes.

REMARQUE II. Quelque spacieuse que soit cette théorie,

tion apparente de l'air. Donc l'effort PE sera  
 comme  $\frac{PL^2 \sin. LPM^2 \sin. EPH}{\sin. LPH^2}$  (voyez le n°. 25)  
 $= PL \sin. LPM \cos. VPH$ . Maintenant  
 $PL : LH :: \sin. PHL = \sin. PHE = \sin. VPH =$   
 $\sin. p$  (en faisant l'angle  $VPH = p$ ) :  $\sin. LPM$ .  
 Donc  $PL \sin. LPM = LH \sin. p$ . Mais en fai-  
 sant  $PE = v$ , l'on trouve  $EH = v \cot. p =$   
 $\frac{v}{\tan. p}$ . C'est pourquoi en supposant  $VP = c$ ,

l'on aura  $LH = c - \frac{v}{\tan. p}$ . Donc en substituant,

$$PE = \cos. p \cdot \overline{\sin. p}^2 \left( c - \frac{v}{\tan. p} \right)^2 = \cos. p (c \sin. p - v \cos. p)^2.$$

Soit l'axe AC (fig. 89) de l'aîle =  $a$ ,  
 $AP = x$ ,  $Pp = dx$ ,  $MM = y$ , l'élément  
 $MmmM$  de l'aîle sera  $= y dx$ . Soit encore la vitesse  
 de l'extrémité C de l'aîle =  $\zeta$ , la vitesse du point P  
 sera  $v = \frac{\zeta x}{a}$ ; donc l'impulsion sur le plan élémen-

$$\text{taire } y dx \text{ sera } = y dx \cos. p \left( c \sin. p - \frac{\zeta x \cos. p}{a} \right)^2.$$

Multipliant cette quantité par la vitesse du point  
 P, le moment d'impulsion sur le plan  $y dx$  sera  
 $= \frac{y \zeta x dx}{a} \cos. p \left( c \sin. p - \frac{\zeta x \cos. p}{a} \right)^2$ , dont l'in-

je doute qu'elle soit vraie; car un Savant prétend avoir  
 trouvé par expérience que la roue produit un plus grand  
 effet lorsqu'elle a 48 aîles que quand elle n'en a que 24  
 ou 12. Or les dimensions de la roue qu'il a employée  
 sont telles que  $\frac{b}{a}$  est  $= \frac{2}{3}$  à peu-près.

régle exprimer le moment d'impulsion de l'aîle entière  $NDcn$ . Supposant la largeur  $MM = b$ , c'est-à-dire, supposant l'aîle rectangulaire, le moment

d'impulsion cherché sera  $= \frac{b\zeta \cos. p}{a} \left( \frac{c^2 x^2 \sin. p^2}{2} - \frac{2c\zeta x^3 \sin. p. \cos. p}{3a} + \frac{\zeta^2 x^4 \cos. p^2}{4a^2} \right) + C$ . Dans cette intégrale  $\zeta$  &  $p$  sont des quantités qu'on regarde comme constantes.

Pour déterminer la constante  $C$ , je remarque qu'en supposant  $x = AB = m$ , l'impulsion de l'aîle doit être nulle; puisque l'aîle commence au point  $B$ ; donc le moment d'impulsion cherché est

$= \frac{b\zeta \cos. p}{a} \left( c^2 \frac{\sin. p^2}{2} (x^2 - m^2) - \frac{2c\zeta \sin. p. \cos. p}{3a} \times (x^3 - m^3) + \frac{\zeta^2 \cos. p^2}{4a^2} (x^4 - m^4) \right)$ . Enfin en supposant  $x = a$ , & négligeant la quantité  $m$  qui dans les moulins, tels qu'on les construit, est très-petite par rapport à la quantité  $a$ , on trouvera facilement que le moment d'impulsion de l'aîle est  $= ab\zeta \cos. p \left( cc \sin. p^2 - \frac{2}{3} c\zeta \sin. p. \cos. p + \frac{\zeta^2 \cos. p^2}{4} \right)$ .

Il est bon de remarquer que si en supposant  $n = x = AF$ , on trouve le moment d'impulsion de la partie  $Lfc n$  positif, & qu'en retranchant ce moment du moment total de l'aîle, on trouve une quantité négative pour le moment d'impulsion de la partie restante, il est visible que le plan  $NLfd$  bien loin d'être frappé par le vent frappera l'air au contraire: ainsi il faut

faire la longueur de l'aîle de manière qu'il n'y en ait aucune partie qui ne reçoive l'impulsion de l'air & la terminer au point F, ou la quantité  $c \sin. p - v \cos. p$  devient  $= 0$ , ou bien faire en sorte que  $c$  soit toujours  $> \frac{x \zeta \cot. p}{a}$ , ou du moins que  $c =$

$$\frac{x \zeta \cot. p}{a} = \zeta \cot. p = \frac{\zeta}{\tan. p}, \text{ en faisant } x = a :$$

car si  $c < \frac{x \zeta \cot. p}{a}$ , la vitesse relative de l'impulsion devient négative, & l'impulsion par rapport à la partie correspondante de l'aîle se change en répulsion.

113. PROBLEME. Déterminer la construction d'un moulin à vent propre à produire le plus grand effet possible. Soit AB la résistance que je considère comme un poids P appliqué au levier  $r$ , sa vitesse sera  $\frac{r \zeta}{a}$ . Donc l'effet de la machine sera  $=$

$$\frac{P r \zeta}{a}. \text{ Mais parce que le moulin porte quatre aîles,}$$

$$\text{nous aurons } \frac{P r \zeta}{a} = 4 a b \zeta \cos. p \left( \frac{c^2 \sin. p}{2} - \frac{2 c \zeta}{3} \times \right. \\ \left. \sin. p \cos. p + \frac{\zeta^2 \cos. p}{4} \right) (*) = 4 a c^2 b \zeta \cos. p \times$$

(\*) Selon certains Auteurs l'action d'un fluide est égale au poids d'une colonne de fluide dont la hauteur seroit égale à celle dont un corps doit tomber pour acquérir la vitesse du mobile, d'autres paroissent mieux fondés sur l'expérience en la faisant à-peu-près double. De sorte que selon ces derniers en supposant  $h$  cette hauteur,  $f$  la surface plane que le fluide frappe directement,  $m$  le poids d'un pied cube de fluide,  $A f m h$  sera l'impulsion directe du fluide sur la surface  $f$ , en faisant  $A = 2$ , à-peu-près; je pense que  $A$  est à-peu-près  $= 1.7$  quand il s'agit de l'eau.

$\overline{\sin. p}^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{2z \cos. p}{3c} + \frac{z^2 \cos. p^2}{4cc} \right)$ . Soit  $\frac{z \cos. p}{c} = y$ , ou  $\frac{z}{c} = y \cdot \text{tang. } p$ , on aura  $\frac{Prz}{a} = 4 a. b y c^3 \overline{\sin. p}^3 \left( \frac{1}{2} - \frac{2y}{3} + \frac{yy}{4} \right)$ . Dont le *maximum* en regardant  $y$  comme variable, donne  $\frac{1}{2} - \frac{4y}{3} + \frac{3y^2}{4} = 0$ , d'où l'on tire  $y = \frac{8 \pm \sqrt{10}}{9}$ . Mais pour le *maximum* l'on doit avoir  $y = \frac{z}{c} \cos. p = \frac{8 - \sqrt{10}}{9}$  (voyez ce que nous avons dit sur les *maxima* & les *minima* dans le Calcul différentiel). Substituant cette valeur dans l'équation de l'effet de la machine, il viendra  $\frac{Prz}{a} = a b c^3 \cdot \left( \frac{68 + 5\sqrt{10}}{729} \right) \cdot \overline{\sin. p}^3$ . Donc le plus grand effet de la machine fuit la raison triplée du sinus d'obliquité de l'aîle par rapport à l'axe du moulin qu'on doit toujours placer dans la direction du vent.

114. PROBLÈME. *Déterminer l'inclinaison des aîles par rapport à l'axe pour que le moulin produise le plus grand effet possible.* Si dans l'expression  $\frac{yz^x dx}{a} \cos. p \left( c. \sin. p - \frac{zx \cos. p}{a} \right)^2 = \frac{bc^2 z}{a} x \cos. p dx \left( \sin. p - \frac{zx \cos. p}{ac} \right)^2$ , en faisant  $y = b$ , on considère  $z$  comme constant, & qu'on



fasse  $x \cos f. p \left( \sin. p - \frac{z x. \cos. p}{a c} \right)^2 = t$ , la ques-  
 tion se réduit à chercher le *maximum* de  $S t d x$ . Mais  
 $d t = d x \cos f. p \left( \sin. p - \frac{z x. \cos. p}{a c} \right)^2 - d x \times$   
 $\frac{z x. \cos. p}{a c} \left( \sin. p - \frac{z x. \cos. p}{a c} \right) - x d p. \sin. p \left( \sin. p$   
 $- \frac{z x. \cos. p}{a c} \right)^2 + x d p. \cos f. p \left( \sin. p - \frac{z x. \cos. p}{a c} \right) \times$   
 $\left( 2 \cos f. p + \frac{2 z x. \sin. p}{a c} \right)$ . De plus en supposant  
 $d t = P d x + M d p$ , dans le cas du *maximum*,  
 la quantité  $M$  doit  $= 0$  (\*) ; donc —  
 $x. \sin. p \left( \sin. p - \frac{z x. \cos. p}{a c} \right)^2 + 2 x. \cos f. p \times$   
 $\left( \sin. p - \frac{z x. \cos. p}{a c} \right) \cdot \left( \cos f. p + \frac{z x. \sin. p}{a c} \right) = 0$ .  
 D'où l'on tire  $\sin. p \left( \sin. p - \frac{z x. \cos. p}{a c} \right) =$

(\*) Cela est fondé sur ce beau Théorème : *P étant une*  
*fonction finie, si*  $d t = P d x + M d p$ , *M sera*  $= 0$ , *lorsque*  
 *$S. t d x$  sera un maximum.* A cause de  $d t = P d x + M d p$ ,  
 l'on a  $t = S. P d x + S. M d p$ , &  $t d x = d x S. P d x +$   
 $d x S. M d p$ ; d'où l'on tire  $S. t d x = S. d x S. P d x + S. d x S. M d p$ ,  
 Dont le *maximum* donne  $t d x = 0 = d x S P d x +$   
 $d x S. M d p$ ; donc  $P d x + M d p = 0$ . Or dans le cas du  
*maximum*  $\frac{d x}{d p}$  est  $= 0$ ; donc  $\frac{d x}{d p} = - \frac{M}{P} = 0$ ; c'est  
 pourquoi  $M = 0$ , parce que  $P$  est une quantité finie. Il est vi-  
 sible d'ailleurs que l'équation  $t d x = 0$ , suppose  $d x = 0$ .

$$2. \cos. p \left( \cos. p + \frac{x \sin. p}{ac} \right). \text{ Donc en divisant } \\ \text{par } \overline{\cos. p}, \text{ l'on aura } \overline{\tan. p} - \frac{x}{ac} \tan. p = 2 + \\ \frac{2x}{ac} \tan. p, \text{ \& } \tan. p = \frac{3x}{2ac} + \sqrt{\left( 2 + \right.} \\ \left. \frac{9x^2}{4ac^2} \right).$$

On voit par là qu'à chaque distance  $x$  répond une inclinaison différente, & qu'ainsi l'aîle doit être courbe dans toute sa longueur, car  $x$  croissant,  $\tan. p$  augmente. Si l'on suppose  $x=0$ , on aura  $\tan. p = \sqrt{2} = 1.414 = \tan. 54^{\circ}.44'$ . Ainsi la plus petite inclinaison de l'aîle auprès de l'axe doit être de  $54^{\circ}.44'$ , tandis que la plus grande inclinaison de l'extrémité de l'aîle se détermine par  $\tan. p = \frac{3x}{2c} + \sqrt{\left( 2 + \right.}$   
 $\left. \frac{9x^2}{4c^2} \right)$ , en supposant  $x=a$ .

*Usage du calcul intégral dans la recherche des mouvemens qui dépendent d'une force accélératrice.*

III5. PROBLEME. L'abscisse AP étant supposée représenter le tems, & l'ordonnée PM la vitesse correspondante acquise par une force accélératrice, trouver l'espace parcouru (fig. 91). Ayant mené l'ordonnée  $pm$  infiniment proche de PM, je fais  $AP=t$ ,  $PM=Z$ ,  $Pp=dt$ , l'élément  $PMm_p$  sera  $Zdt$ . Mais parce que pendant le tems infiniment petit  $dt$ , le mouvement peut être regardé comme uniforme, l'espace parcouru pendant le tems  $dt$  sera comme le produit de ce tems par la vi-

tesse  $Z$ , ou sera  $\dot{Z} dt = PM mp$ ; &  $S.Z dt$  ou l'aire  $APM$  exprimera l'espace parcouru pendant le tems  $AP$  ou pendant le tems  $t$ .

COROLLAIRE. Si le mouvement est uniformément accéléré, c'est-à-dire si les ordonnées sont proportionnelles aux abscisses, l'aire  $APM$  (fig. 91) deviendra un triangle (fig. 92). Donc si les abscisses ou les tems  $AP$ ,  $AB$ ,  $AD$  sont dans le rapport des nombres naturels 1, 2, 3, les aires correspondantes qui sont comme les quarrés de ces abscisses, à cause des triangles semblables  $APM$ ,  $ABC$ ,  $ADN$ , seront comme les quarrés 1, 4, 9. En général les espaces parcourus par un mouvement uniformément accéléré (comme est celui des corps qui obéissent librement à l'action de la gravité auprès de la terre) sont comme les quarrés des tems. Mais les vitesses sont alors proportionnelles aux tems; puisqu'une force constante doit communiquer une vitesse double, dans un tems double, une vitesse triple, dans un tems triple, &c. donc les corps qui obéissent librement à l'action de la gravité, parcourent des espaces proportionnels aux quarrés des tems & des vitesses; de sorte que les vitesses & les tems sont comme les racines des espaces.

Si l'on suppose  $APM=1$ ,  $AB=2$ .  $AP$ , l'espace parcouru pendant le tems 2.  $AP$  sera  $= 4$ . Donc l'espace parcouru pendant la seconde seconde doit être triple de celui qui a été parcouru dans la première seconde. Mais l'action de la force accélératrice étant supposée uniforme, cette action ne peut faire parcourir à un corps pendant la seconde seconde qu'un espace égal à celui qu'elle lui a fait parcourir pendant la première seconde; ainsi la vitesse acquise dans la première seconde est capable de faire parcourir pendant la seconde seconde un espace double de celui qui a été parcouru dans la première seconde. En général puisque  $DN=Aa$  représente la vitesse acquise pendant le tems  $AD$ , il est visible qu'avec cette vitesse le mobile  $A$  parcouroit dans un tems  $AD$  un espace exprimé par  $Aa \times AD$ , c'est-à-dire, un espace exprimé par l'aire du parallelogramme  $AaND$ , tandis qu'il n'a parcouru pendant le même tems, qu'un espace moitié plus petit, exprimé par l'aire du triangle  $ADN$ , moitié du parallelogramme  $ADNa$ .

Dans cette même supposition de la force accélératrice constante, les espaces parcourus successivement croîtront comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, &c. c'est-à-dire, que si le mobile parcourt dans un tems donné que j'appellerai un instant (\*) un espace comme un, il parcourera dans le second instant de son mouvement un espace comme 3, dans le troisieme instant un espace comme 5, &c. En effet, en supposant  $AP = PB = BD$ , si l'espace  $APM = 1$ , l'espace  $ABC$  sera  $= 4$  & l'espace  $ADN = 9$ . Maintenant l'espace  $APM$  ayant été parcouru dans le premier instant, il est visible que  $PMCB$  exprime l'espace parcouru au second instant, &  $BCND$  l'espace parcouru au troisieme instant. Or  $PMCB = ABC - APM = 4 - 1 = 3$ . De même  $BCND = DAN - BAC = 9 - 4 = 5$ . On prouvera par un raisonnement semblable que l'espace parcouru au quatrieme instant doit être  $= 7$ , & ainsi de suite.

Mais parce que le mouvement des corps qui montent contre l'action de la gravité doit être retardé dans la montée de la même maniere qu'il a été accéléré dans la descente; car la cause retardatrice est la même que la cause accélératrice, les espaces parcourus en montant doivent être comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7, &c. pris dans un ordre renversé, & si deux mobiles  $D$  &  $B$  remontent contre la gravité jusqu'à ce qu'ils aient perdu toute leur vitesse en  $A$ , les espaces parcourus par ces mobiles, seront comme les triangles  $DNA$ ,  $BCA$ , c'est-à-dire comme les quarrés des tems  $DA$  &  $BA$ .

116. PROBLEME. Si  $AB$  (fig. 91) représentant l'espace parcouru par un mouvement accéléré, les ordonnées  $AD$ ,  $PQ$  sont comme les forces qui agissent dans les points  $A$ ,  $P$  tandis que  $PM$  représente la vitesse acquise par le

(\*) Selon ce que nous avons dit dans notre métaphysique l'instant n'est autre chose que la limite qui sépare le tems passé du tems futur. Mais nous prenons ici ce terme dans un autre sens, c'est-à-dire, que nous supposons que l'instant représente un tems déterminé.

mobile au point P, trouver la vitesse correspondante à chaque point de l'espace. Soit  $PQ = u$ ,  $AP = r$ ,  $PM = z$ , la masse du mobile  $= m$ , on aura  $Pp = dr$ . Mais la vitesse pendant le tems  $dt$  employé à parcourir  $Pp$  pouvant être regardée comme uniforme, on aura  $dr = z \cdot dt$ ,  $z =$

$$\frac{dr}{dt}, \text{ \& } dt = \frac{dr}{z}. \text{ De plus la quantité de mouvement}$$

engendré pendant le tems  $dt$  sera  $= m dz$ , & parce que la quantité d'action qui répond au tems  $dt$  est égale à la force mouvante multipliée par le tems, on a  $u dt =$

$$m dz, \text{ ou } dt = \frac{m dz}{u}. \text{ Mais } dt = \frac{dr}{z}; \text{ donc } = \frac{dr}{z} =$$

$$\frac{m dz}{u}, \text{ ou } u dr = m z dz, \text{ \& } S. u dr = \frac{1}{2} m z z = \frac{z z}{2}$$

en supposant  $m = 1$ . Mais  $S. u dr = S. (PQqp) = APQD$ . Donc si la masse est supposée constante, la moitié du quarré de la vitesse & par conséquent le quarré de la vitesse sera proportionnel à l'aire des forces  $APQD$ .

117. PROBLÈME. Supposant que les forces  $AD$ ,  $PQ$ , sont comme les distances  $AC$ ,  $PC$ , au point  $C$ , trouver la vitesse dans chaque point  $P$  de l'espace (fig. 93). Puisque (par l'hypothèse)  $AD : PQ :: AC : PC$ , l'aire des forces  $ACD$  sera un triangle, &  $CD$  une ligne droite. Soit  $AC = a$ ,  $AP = x$ , la force correspondante au point  $P = u$ , on aura  $PC = a - x$ , & parce que  $PQ$  est comme  $PC$ , on aura (par le problème précédent), en supposant

$$\text{toujours la vitesse exprimée par } z, S. u dx = \frac{z z}{2} =$$

$$S. (a dx - x dx) = ax - \frac{xx}{2}, \text{ ou } 2ax - xx = zz.$$

Mais si du centre  $C$  on décrit le quart de cercle  $AMB$ ,  $PM$  sera  $= \sqrt{(2ax - xx)} = z$ . Donc si du centre  $C$  avec le rayon  $CA$  on décrit un quart de cercle par le point  $A$  où commence le mouvement, les vitesses dans chaque point  $P$  compris entre  $C$  &  $A$  seront

comme les sinus des arcs correspondants du quart de cercle.

118. PROBLEME. *Dans cette même hypothèse, on demande le tems de la descente le long de AC, PC, &c. jusqu'au point C. Il est visible que  $Pp = dx = z dt =$*

$$dt\sqrt{(2ax - xx)}, \text{ \& par conséquent } dt = \frac{dx}{\sqrt{(2ax - xx)}},$$

équation que je désigne par (A). Mais les triangles PMC, n Mm ayant leurs côtés perpendiculaires soit semblables & donnent PM : CM :: Ma : Mm, ou

$$\sqrt{(2ax - xx)} : a :: dx : Mm = \frac{a dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}; \text{ donc}$$

$$\frac{Mm}{a} = \frac{dx}{\sqrt{(2ax - xx)}} = dt, \text{ \& } t = S. \frac{Mm}{a}; \text{ c'est-}$$

à-dire si l'on suppose AP = AC, ou  $x = a$ , le tems  $\frac{AMB}{a}$  sera =  $\frac{AMB}{a}$ . Par la même raison si le mouvement

commence au point P, le tems de la descente le long de PC = b sera exprimé par  $\frac{PHG}{b}$ . Mais il est visible

que le rapport du quart de la circonférence au rayon est le même dans tous les cercles; ainsi dans cette loi des forces, le mobile arrivera au point C dans le même tems, soit qu'il parte du point A, ou du point P.

Nous avons vu ci-dessus (51) que cette loi des forces a lieu pour les vibrations d'un pendule qui fait ses oscillations dans des petits arcs de cercle; donc les vibrations d'un tel pendule doivent être d'égale durée, quoiqu'elles ne soient pas égales.

119. PROBLEME. *Supposant que le mobile parcourt une droite Aa (fig. 94) qui ne passe pas par le centre C des forces, & que le mouvement commence au point A, trouver la vitesse dans chaque point B de l'espace. Je mène la ligne CA au point A ou commence le mouvement, la ligne CM perpendiculaire sur Aa, & je fais AM = a, CM = b, CB = x, pour avoir BM =  $\sqrt{(xx - bb)}$ . Soit u la force qui agit sur le mobile au point B dans*

la direction CB, la décomposant en deux autres, l'une selon BM, l'autre selon Bc perpendiculaire à Ba & parallèle à MC; il est visible que la force perpendiculaire à la ligne Aa sera détruite par le plan Aa, & que la seule force selon BM produira le mouvement. Maintenant la force absolue, que je suppose exprimée par BC, sera à la force respective comme  $BC : BM :: x : \sqrt{xx - bb}$ . C'est pourquoi  $x : \sqrt{xx - bb} :: u : \frac{u \sqrt{xx - bb}}{x}$ , force respective qui produit le mouvement.

Soit  $AB = AM - BM = a - \sqrt{xx - bb} = r$ ,  
on aura  $dr = \frac{-x dx}{\sqrt{xx - bb}}$ . C'est pourquoi si dans

l'équation  $S. u dr = \frac{zz}{2}$  trouvée ci-dessus (116) à la place de la force qu'on a exprimée par  $u$  dans l'endroit cité, on substitue la force respective qui est ici  $= \frac{u \sqrt{xx - bb}}{x}$ , & qu'on mette  $\frac{-x dx}{\sqrt{xx - bb}}$  à la

place de  $dr$ , on aura  $\frac{zz}{2} = S. (-u dx)$ ; c'est-à-dire si l'on fait  $CP = CB = x$ , & qu'en prenant AC pour axe, on décrive la courbe des forces DQ dont les ordonnées QP représentent les forces centrales  $u$ ,

on aura au point B,  $\frac{zz}{2} = ADQP$ . Ainsi la vitesse acquise au point B le long du plan incliné AB est égale à celle que le mobile auroit acquise en tombant verticalement le long de AP, pourvu que les points P & B soient également éloignés du centre, & que la loi des forces soit la même (voyez le n°. 116).

COROLLAIRE. Le mouvement sera donc accéléré depuis le point A jusqu'au point M, où la force accélérante BM s'évanouira. Depuis le point M le mouvement sera retardé en allant vers b, à cause de la force bM qui repoussera le mobile vers M, & à la distance

$M a = M A$ , le mouvement sera totalement éteint. Ensuite le mobile reviendra de  $a$  en  $A$  par un mouvement accéléré depuis  $a$  jusqu'en  $M$ , & retardé depuis  $M$  jusqu'en  $A$ , & ainsi de suite; de sorte que s'il n'y avoit aucun obstacle ni de la part du plan ou du milieu, le mobile se mouvroit perpétuellement de  $A$  en  $a$  & de  $a$  en  $A$ .

120. PROBLEME. Supposons que la force accélérante est constante, & qu'elle est dirigée vers le centre de la terre, on demande dans quel rapport la force respective qui pousse un mobile le long d'un plan incliné  $AC$  (fig. 95), est à la force verticale qui le pousseroit le long de  $AB$ . Soit la force absolue (qui pousse le mobile  $m$  vers le centre de la terre) exprimée par  $Mm$  parallèle à  $AB$ , & décomposons cette force en deux autres, l'une  $Mn$  perpendiculaire au plan  $AC$ , l'autre  $mn = MN$  qui agit dans la direction  $mC$ ; à cause des triangles  $MNm$ ,  $ABC$  dont les côtés sont perpendiculaires & qui par conséquent sont semblables, on a la proportion  $Mm : MN :: AC : AB$ , c'est-à-dire la force respective qui fait mouvoir le mobile  $m$ , le long du plan incliné est constante, & elle est à la force absolue qui la feroit mouvoir le long du plan vertical  $AB$ , comme la hauteur du plan incliné est à sa longueur.

COROLLAIRE. Si l'on mène  $BD$  perpendiculaire à  $AC$ , les triangles rectangles  $MNm$ ,  $ABC$ ,  $ADB$  seront tous semblables, & l'on aura  $Mm : MN :: AC : AB :: AB : AD$ . Donc si  $AB$  représente la force verticale,  $AD$  représentera celle qui fait mouvoir le corps  $m$  le long du plan incliné; & parce que cette force est constante, les espaces  $AD$ ,  $AC$  sont comme les quarrés des tems employés à les parcourir. Donc en appellant ces tems  $t$  &  $T$ , nous aurons  $t : T :: AD : AC$ , &  $t : T :: \sqrt{AD} : \sqrt{AC}$ . Mais parce que dans une proportion continue le premier terme est au troisieme comme le quarré du premier à celui du second, ou comme le quarré du second à celui du troisieme, la proportion  $AC : AB :: AB : AD$ , ou  $AD : AB :: AB : AC$ , donnera  $AD : AC :: \overline{AD}^2 : \overline{AB}^2$ ,  
&



&  $\sqrt{AD} : \sqrt{AC} :: AD : AB$ . Donc  $t : T :: AD : AB :: BA : AC$ .

D'un autre côté les vitesses acquises par des forces accélératrices constantes sont comme les produits des tems & des forces, ou en raison composée des tems & des forces; donc la vitesse acquise le long du plan incliné  $AC$  est à la vitesse qui seroit acquise par la chute le long du plan vertical  $AB$  de même hauteur en raison composée de  $AC : AB$  & de  $AB : AC$ , ou comme  $AC \times AB : AB \cdot AC :: 1 : 1$ , ou en raison d'égalité.

Menons  $fg$  parallèle à  $Aa$ , &  $Bb$  perpendiculaire au même plan  $Aa$ . Si  $AB$  représente la force constante de la gravité auprès de la surface de la terre,  $AD$  &  $Ab$  représenteront les forces accélératrices le long des plans  $AC$ ,  $Aa$  (ou  $fg$ ). Et parce que ces forces sont en raison composée de  $AD$  à  $AB$ , ou de  $AB$  à  $AC$  & de  $Aa$  à  $AB$  ou de  $fg$  à  $fB$ , c'est-à-dire dans le rapport de  $AB \times fg$  à  $AC \times fB$  (car  $AD =$

$\frac{AB^2}{AC}$ ,  $Ab = \frac{AB^2}{Aa}$ ; donc  $AD : Ab :: Aa : AC$ ; mais à cause des triangles  $AaB$ ,  $fgB$ , l'on a  $Aa = \frac{AB \cdot fg}{fB}$ ;

donc  $Aa : AC :: AB \cdot fg : AC \cdot fB$ , il est évident qu'elles sont en raison directe des hauteurs des plans  $AB$  &  $fB$  & en raison inverse des longueurs  $AC$  &  $fg$ .

Puisque la force le long de  $AC$  est à la force le long de  $AB$  comme  $AD : AB$ , les espaces  $AD$ ,  $AB$  seront parcourus en tems égaux: comme cela suit évidemment de ce qu'on a dit ci-dessus (118). Par la même raison l'espace  $Ab$  sera parcouru dans le même tems que  $AB$ . Si donc on mène les cordes  $AD$ ,  $Ab$  (fig. 96) perpendiculaires aux cordes  $BD$ ,  $Bb$ , ces cordes seront parcourues dans le même tems que le diamètre vertical  $AB$ , & par conséquent elles seront parcourues en tems égaux. Et si l'on suppose les cordes  $BN$ ,  $BM$  respectivement égales, & par conséquent parallèles aux cordes  $AD$ ,  $Ab$ , elles seront évidemment parcourues dans le même tems, puisqu'elles sont également inclinées à l'horison, d'où il suit que toutes les cordes qui aboutissent aux extrémités  $A$  &  $B$  d'un diamètre vertical sont parcourues en tems égaux.

Tome V.

. H h

La théorie que nous venons de développer peut servir à résoudre ce beau Problème : *Etant donnée une ligne PB (fig. 97) inclinée à l'horizon, & un point A sur la verticale BD, trouver la ligne droite AP que doit suivre le mobile A pour arriver à la ligne BP dans le moindre tems possible.* Ayant mené AQ perpendiculaire sur BP, divisez l'angle DAQ en deux également par ligne PA, cette ligne sera le chemin qui doit suivre le mobile. Par le point P ou la ligne AP rencontre la ligne donnée BQ, menez PC parallèle à AQ; les angles alternes internes QAP, APC seront égaux. Mais par construction, QAP = CAP; ainsi APC = CAP & le triangle CAP est isocèle. C'est pourquoi si du point C pris pour centre avec le rayon CP on décrit un cercle, il passera par le point A; & si l'on mène les lignes AM, elles seront plus grandes que les lignes correspondantes Ar. Maintenant les cordes Ar, AP sont parcourues en tems égaux; donc le tems employé à parcourir AP sera plus court que le tems employé à parcourir AM; & partant AP est la ligne droite le long de laquelle le mobile A arrivera le plus promptement à la ligne BP. Si DA est parallèle à QP, l'angle CAP sera de  $45^{\circ}$ .

121. PROBLEME. *Trouver la vitesse qu'un mobile peut acquérir en descendant le long d'une courbe AB (fig. 98).* Soit Am la force qui pousse le mobile A selon la verticale Ab, comme ce corps ne peut pas suivre cette ligne, à cause de la courbe AM, je décompose cette force en AN perpendiculaire à la courbe, & AM que je considère comme un plan incliné. La force AN étant détruite par la résistance de la courbe, la seule force AM produira le mouvement, & selon ce qu'on a dit ci devant, la vitesse acquise le long de AM sera égale à la vitesse acquise le long de la verticale Am, & comme on peut faire le même raisonnement pour tous les élémens de la courbe aAB, il s'ensuit que la vitesse acquise le long de l'arc AB sera la même que celle que le mobile acquerreroit s'il tomboit de la hauteur Ab.

On objectera peut-être que le mobile en choquant la courbe doit perdre un peu de sa vitesse & qu'ainsi il ne peut avoir à la fin de sa chute en B la même vitesse qu'il auroit acquise en tombant le long de Ab. Pour répondre à cette difficulté, je suppose que le mobile

ait déjà parcouru l'arc  $Aa$  (fig. 99), il est certain qu'il tend à continuer son mouvement le long de la ligne  $ag$  tangente de la courbe. Il est donc évident que le mobile fera un effort que je représente par  $ag$ , pour parcourir cette ligne. Ayant décomposé la force  $ag$  en  $ad$  perpendiculaire à la courbe &  $af = gD$  qui représente la force restante, l'angle  $faq = agD$  sera infiniment petit, puisque la tangente s'éloigne infiniment peu de la courbe; & parce que dans un triangle quelconque les sinus des angles sont comme les côtés opposés à ces angles, le côté  $ag$  sera au côté  $aD$  comme le rayon est au sinus d'un angle infiniment petit, ou comme  $1 : \frac{1}{2}$ . De même  $gD$  sera infiniment plus grande que  $aD$ ; c'est-à-dire que  $aD$  est une quantité infiniment plus petite que la vitesse  $ag$  ou  $Dg$ . Maintenant pour savoir de combien  $ag$  est plus grande que  $af$  ou  $Dg$ , du point  $g$  comme centre avec le rayon  $ag$ , je décris l'arc  $an$  jusqu'à la rencontre du prolongement de  $gD$ . Il est visible que l'angle  $naD$  est infiniment petit; car l'angle  $aDn$  est droit & l'angle  $anD$ , en considérant l'arc  $na$  comme une ligne droite, ne peut différer qu'infiniment peu d'un angle droit; donc le côté  $Dn$  est infiniment plus petit que  $aD$ . Mais  $aD$  est infiniment plus petit que  $ga$ . Donc si  $ga$  représente une quantité finie,  $aD$  sera un infiniment petit du premier ordre, &  $Dn$  un infiniment petit du second ordre; de sorte que les quantités  $ag$ ,  $af$  ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite du second ordre, qui répétée une infinité de fois, c'est-à-dire autant de fois qu'il y a d'arcs infiniment petits dans la courbe  $AB$ , ne peut produire qu'un infiniment petit du premier ordre. Donc la vitesse acquise le long de  $AB$  ne peut différer de la vitesse acquise le long d'un plan vertical de même hauteur que d'une quantité infiniment petite par rapport à elle; donc ces vitesses doivent être supposées égales.

Si l'on suppose que les élémens  $Nn$ ,  $Mm$  (fig. 100) appartiennent à des arcs de cercle semblables  $NB$ ,  $Mb$ , & que ces élémens sont dans le rapport de ces arcs, on pourra les considérer comme des plans également inclinés à l'horison & dont les longueurs sont comme les quarrés des tems employés à les parcourir. La même chose aura lieu dans tous les autres élémens des arcs  $NB$ ,  $Mb$ ;

Hh 2

de sorte que ces arcs seront parcourus dans des tems proportionnels aux racines de leurs longueurs, parce que les vitesses acquises le long de  $Nn$  &  $Mm$  sont comme les racines des longueurs  $Nn$  &  $Mm$  & par conséquent proportionnelles aux vitesses qui auront lieu ( par l'action de la gravité ) dans les élémens suivans & semblables  $nD$ ,  $mC$ , & ainsi de suite. Donc les tems employés à parcourir les arcs semblables  $NB$ ,  $Mb$  sont comme les racines des longueurs de ces arcs, ou comme les racines des rayons  $AB$ ,  $ab$ .

Si  $NB$  &  $Mb$  sont supposés deux arcs semblables de deux paraboles désignées par les équations  $y^2 = ax$ ,  $y^2 = bx$ , qui sont des courbes semblables, & qu'on prenne les abscisses  $BP$ ,  $bP$  dans le rapport des paramètres  $a$  &  $b$ , les arcs  $NB$  &  $Mb$  seront dans le même rapport, & les tems employés à parcourir  $NB$  &  $Mb$  seront comme les racines des paramètres. Ainsi si  $a = 25b$ , ces tems seront comme  $5 : 1$ .

### *Des cordes vibrantes.*

122. Nous supposons que les cordes sont d'un très-petit diamètre d'une grosseur uniforme, de même matiere; ce n'est pas qu'on ne puisse comparer les tems des vibrations des cordes de différente matiere; mais il faut alors connoître par expérience l'élasticité de chacune; car les forces élastiques de l'acier trempé, de l'or, de l'argent, &c. ne suivent pas la raison des gravités spécifiques de ces matieres. Nous supposons encore que les vibrations, sont très-petites & telles qu'elles ont lieu dans les cordes de violon ou de basse par l'action de l'archet.

123. PROBLEME. *Trouver le rapport des tems des vibrations fort petites quoiqu'inégales d'une même corde AB. (fig. 101).* Si une force  $M$  fléchit cette corde de manière que le point  $M$  parvienne jusqu'en  $D$ , la force élastique de cette corde pourra être supposée proportionnelle à la ligne  $MD$ ; si le point  $M$  parvient en  $m$ , la force restituante sera censée proportionnelle à la ligne  $Mm$ . Donc les espaces que les parties de la corde auront à parcourir pour arriver à la ligne horisontale

A M B seront comme les forces qui font parcourir ces espaces. Donc, selon ce qu'on a dit ci-dessus (118), ces espaces seront parcourus dans le même tems; c'est-à-dire que les vibrations très-petites d'une même corde se feront en tems égaux, quoiqu'elles soient inégales.

124. PROBLEME. *Trouver le tems des vibrations de deux cordes AB, ab qui ne different que par la longueur.* Supposons que la première corde soit neuf fois plus grande que la seconde; il est visible que si une force N peut fléchir la corde *ab* à la profondeur N n comme 1, la même force pourra fléchir la corde AB à une profondeur M m que je supposerai = 9. N n. En effet la force élastique de AB ne peut faire équilibre à la puissance fléchissante que lorsque les parties de la corde AB seront autant écartées les unes des autres que le sont les parties correspondantes de la corde *ab*, c'est-à-dire qu'il est nécessaire, pour que la force restituante soit la même dans les deux cordes, que les allongemens des cordes soient comme les longueurs des cordes, & que les angles A m B, a n b soient égaux; donc les triangles isocelles & semblables A m B, n a b ont leurs hauteurs M m, N n proportionnelles aux bases AB & *ab*, ou ce qui revient au même, les inflexions produites par la même force sont comme les longueurs des cordes.

Concevons à présent les espaces M m, N n divisés en un grand nombre d'éléments infiniment petits, de manière que chaque élément de M m fait à chaque élément de N n comme M m : N n, & cherchons le rapport des tems employés à parcourir chacun de ces éléments. Il est visible d'abord que la force restituante en *m* est la même que la force restituante en *n*, & qu'en supposant  $m T = 9 n t$ , la force restituante en T sera la même que la force restituante en *t*, puisque dans ce cas M T sera = 9. N t, & ainsi de suite pour tous les autres éléments de M m & de N n; maintenant soit A = m T, a = n t; & considérons la force restituante comme étant uniforme pendant le tems employé à parcourir les premiers éléments A & a.

Faisons encore attention que A étant = 9. a, la même force qui peut faire parcourir un espace comme un à H h ;

la masse  $b$  de la première corde  $ab$  ne peut faire parcourir qu'un espace comme  $\frac{1}{9}$  à la seconde corde  $AB = B = 9. b$  ; mais une force accélératrice constante qui peut faire parcourir un espace comme  $\frac{1}{9}$  dans un tems comme un, fera parcourir un espace  $= 1$ , dans un tems comme 3, & un espace  $= 9$  dans un tems comme 9 ; ainsi le premier élément  $A$  sera parcouru dans un tems comme 9. La vitesse acquise à la fin de la description du premier élément étant la même de part & d'autre ; elle fera parcourir  $2A = 18. a$  dans un tems  $= 9$  à la grande, &  $2a$  dans un tems comme 1 à la plus courte corde. La nouvelle force qu'on je fais  $= f$ , fera parcourir l'élément  $c$  dans la plus courte corde, & un élément  $9c$  dans la plus longue, mais dans un tems neuf fois plus grand : & parce que  $2A + 9c = 9(2a + c)$ , les nouveaux élémens seront parcourus dans des tems proportionnels aux longueurs des cordes. Par un raisonnement semblable on prouvera que toutes les parties correspondantes des espaces  $Mm$ ,  $Nn$  sont parcourues dans des tems proportionnelles aux longueurs des cordes. C'est pourquoi le tems des vibrations entières seront comme les longueurs des cordes.

125. PROBLEME. Si les deux cordes  $AB$  &  $ab$  (fig. 102) sont supposées tendues par des poids égaux, de même longueur, mais de différens diamètres, quel sera le rapport des tems de leurs vibrations. Si le diamètre de la première corde est  $= 2R$ , & celui de la seconde  $= 2r$ , ces diamètres seront comme  $R:r$ . Supposons  $R = 9r$ , la première corde pourra être conçue comme composée de neuf cordons dont chacun sera égal à la seconde corde & supportera la neuvième partie du poids tendant  $P$  ; de sorte qu'il sera neuf moins tendu que la corde  $ab$  ; mais quoique chaque cordon résiste neuf moins à la force flexissante, les neuf cordons ensemble opposeront une résistance égale à celle de la corde  $ab$ , & les deux cordes seront flexées à la même profondeur par l'action de la même force.

Cela posé, concevons les lignes  $Mm$ ,  $Nn$  qui dans le cas présent doivent être supposées divisées en un même nombre d'élémens. Puisque chaque cordon de la corde  $AmB$  est neuf moins tendu que la corde  $anb$ , la force relative qui fera parcourir le premier élément de  $Mm$

sera à celle qui fait parcourir le premier élément de  $Nn$  comme 1 : 9. Donc si le premier élément de  $Nn$  est parcouru dans un tems comme 1, le premier élément de  $Mm$  sera parcouru dans un tems comme 3. En effet si nous concevons cet élément comme composé de neuf parties égales, la force  $\frac{1}{3}$  qu'on doit regarder comme constante pendant que le premier élément est parcouru, fera parcourir la première partie dans un tems comme 1, & les neuf parties pendant un tems comme 3, parce que les espaces sont comme les quarrés des tems, lorsque la force est constante. La force qui agit pour faire parcourir le second élément de  $Mm$  est composée de deux parties, l'une qui peut faire décrire dans un tems triple un espace double du premier élément, & l'autre qui peut faire parcourir dans le même tems un autre espace que j'appellerai  $a$ . De même dans la seconde corde, la force qui agit au commencement du second élément de  $Nn$  est composée de deux parties dont l'une peut faire parcourir dans un tems comme 1 un espace double du premier élément de  $Nn$  ou  $Mm$ , l'autre qui pendant le même tems peut faire décrire un espace qui est évidemment  $= a$ . Donc les seconds élémens de  $Mm$  & de  $Nn$  sont parcourus par des forces qui sont entr'elles comme 1 & 9 & comme d'ailleurs ces élémens sont supposés égaux de part & d'autre, ils doivent être parcourus dans des tems qui soient entr'eux comme 3 : 1, ou comme les diamètres des cordes. On prouvera par un raisonnement semblable que les élémens suivans de  $Mm$  & de  $Nn$ , & par conséquent  $Mm$  &  $Nn$  doivent être parcourus dans des tems qui soient dans le rapport des diamètres; & parce qu'il est facile de voir que cela arrivera de même, quelle que soit la grosseur des cordes, on peut dire en général que les tems des vibrations des cordes homogènes de même longueur & tendues par des poids égaux, sont comme les diamètres de ces cordes.

126. PROBLEME. Si les cordes  $AB$  &  $ab$  sont supposées également grosses & également longues; mais tendues par des poids différens  $P$  &  $p$ , quel sera le rapport des tems de leurs vibrations? Supposons  $P = 9.p$ , la même force qui flexira la corde  $AB$  à une profondeur comme 1 pourra flexir  $ab$  à une profondeur comme 9, car  $ab$  étant neuf

H h 4

moins tendue n'opposera une résistance capable de faire équilibre avec la force flexissante que lorsque  $Nn$  sera  $= 9. Mm$  ; parce que dans les petites inflexions des cordes médiocrement tendues, telles qu'on le suppose ici, la force de l'élasticité est proportionnelle à la grandeur de l'inflexion ; par conséquent en divisant  $Nn$  &  $Mm$  en un même nombre d'éléments inégaux, mais cependant tels que chaque élément de  $Nn$  soit neuf fois plus grand que l'élément correspondant dans  $Mm$ , le premier élément de  $Mm$  sera parcouru dans un tems comme 1, tandis que le premier élément de  $Nn$  sera parcouru par l'action d'une force égale, dans un tems comme 3, & en raisonnant comme dans la solution de l'avant dernier problème, on verra que toutes les parties correspondantes de  $Nn$  & de  $Mm$  sont parcourues dans des tems proportionnels aux racines des longueurs de ces parties ou proportionnels aux racines de  $Nn$  &  $Mm$ , ou dans des tems qui seront en raison inverse des racines des poids tendans.

127. PROBLEME. *Trouver le rapport des tems des vibrations de deux cordes AB, ab de différentes longueurs & grosseurs, & tendues par des poids différens.* Soit  $L$  la longueur de  $AB$ ,  $M$  son diamètre &  $P$  le poids qui la tend,  $l$  la longueur de  $ab$ ,  $m$  son diamètre &  $p$  le poids tendant. Il est visible par les trois théorèmes précédents que le tems  $T$  d'une vibration de la corde  $AB$  est au tems  $t$  d'une vibration de  $ab$  en raison composée de la directe des diamètres, des longueurs, & en raison inverse des racines des poids tendants. De

sorte que  $T : t :: \frac{M L}{\sqrt{P}} : \frac{m \sqrt{l}}{\sqrt{p}} :: M.L. \sqrt{p} : m.l. \sqrt{P}$ .

Si  $T = t$ , on aura  $M.L. \sqrt{p} = m.l. \sqrt{P}$ . Enfin les nombres des vibrations étant en raison inverse des tems employés à faire chaque vibration, ou étant comme

$\frac{1}{T} : \frac{1}{t}$ , seront comme  $\frac{\sqrt{P}}{M.L.} : \frac{\sqrt{p}}{m.l.}$ .

Maintenant si les forces élastiques représentées par les poids tendants sont les mêmes, les longueurs & les grosseurs égales, mais les masses ou les solidités des



cordes différentes, il est visible que la même force ne fera pas parcourir aux cordes des espaces égaux en tems égaux.

Soit supposée  $n$  la masse ou solidité d'une des cordes,  $N=9.n$  la solidité, ou la masse de la seconde corde, & supposant qu'elles soient flexies à une profondeur comme 1. Si dans un tems comme 1, la première corde parcourt l'espace 1, la seconde ne parcourra évidemment que l'espace  $\frac{1}{3}$  dans le même tems; & parce que nous pouvons supposer que l'action du poids tendant est uniforme pendant la durée de la restitution de la corde, cette seconde corde parcourra dans le second instant égal au premier un espace  $=\frac{1}{3}$ , & dans le troisieme instant un espace  $=\frac{1}{3}$ ; ainsi elle parcourra un espace comme 1 dans un tems comme 3. On prouvera par un raisonnement semblable que les tems des vibrations des cordes sont toujours comme les racines des solidités  $M, m$  de ces cordes. En général si les longueurs de deux cordes sont  $L$  &  $l$ , les solidités  $M$  &  $m$ , les poids tendants  $P$  &  $p$

les tems des vibrations seront comme  $\frac{\sqrt{LM}}{\sqrt{P}} : \frac{\sqrt{lm}}{\sqrt{p}}$ .  
& le nombre des vibrations d'une corde sera toujours comme  $\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{LM}}$ .

Si l'on suppose que les poids tendants de deux cordes métalliques, homogènes & semblables  $A$  &  $B$ , lorsqu'elles sont sur le point de se rompre sont en raison directe des solidités & en raison inverse des longueurs, les nombres des vibrations dans le même tems seront

comme  $\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{L} \cdot \sqrt{LM}} : \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{l} \cdot \sqrt{lm}} :: l : L$ ; & parce

que dans les cordes ou cylindres homogènes & semblables, les longueurs sont comme les racines cubes des solidités, l'on aura  $L:l :: \sqrt[3]{M} : \sqrt[3]{m}$ . Donc les nombres des vibrations dans le même tems seront en raison inverse sous-triplée des solidités, & si l'on suppose que les cylindres semblables, les parallelepipedes semblables, les cloches semblables, &

homogènes sont composées d'un égal nombre de fibres ou cordes semblables aussi tendues qu'il est possible sans se rompre, l'on pourra dire que les vibrations fort petites des solides semblables & homogènes sont dans le même tems, en raison inverse sous-triplée de leurs poids ou de leurs solidités.

*Méthode pour mesurer la hauteur des lieux par le moyen du baromètre.*

128. LES Physiciens ont trouvé par expérience que l'air se comprime en raison des poids dont il est chargé, de manière que les volumes auxquels il peut être réduit sont sensiblement, du moins auprès de la terre, en raison inverse des poids dont il est chargé. Dans un tube de verre  $abc$  (fig. 103) dont la branche  $ag$  soit d'environ quarante pouces & dont la branche  $bc$  soit par-tout de même diamètre & fermée hermétiquement, faites couler du mercure jusqu'à ce que la capacité  $bn$  la plus basse soit remplie, & ayant appliqué une échelle sur la branche  $cb$ , observés le nombre des divisions depuis la ligne horizontale  $bn$  jusqu'en  $c$ , je suppose que ce soit 10 pouces. Versez du mercure dans la branche  $ag$  jusqu'à ce que l'excès de la hauteur du mercure au-dessus de la ligne horizontale  $gf$  qui passe par la surface du mercure contenu dans  $bc$  soit d'environ 27 pouces & demi; l'air qui occupoit toute la partie  $bc$ , n'en occupera plus que la moitié. Si on continuoit de verser du mercure dans la branche  $ag$  (qu'il faudroit supposer assez longue) jusqu'à ce que la hauteur du mercure dans cette branche au-dessus la ligne  $gf$  fût double ou triple ou quadruple de 27 pouces & demi, l'air restant n'occuperoit que le tiers ou le quart de  $bc$ , & ainsi de suite.

Mais lorsqu'il n'y avoit du mercure que dans la capacité inférieure  $bn$ , l'air contenu dans  $cb$  étoit chargé du poids de toute l'atmosphère, poids équivalent à une colonne de mercure d'environ 27 pouces & demi de hauteur. Donc puisqu'en ajoutant une colonne de mercure de même hauteur on a chargé cet air d'un poids double, & que son volume est devenu deux fois plus petit, les volumes auxquels on peut réduire l'air sont sensiblement en raison des poids comprimants.

COROLLAIRE. Les densités de l'air sont proportionnelles aux poids qui le compriment.

129. Supposons que le poids total de l'atmosphère soit représenté par  $A = 348$  lignes de mercure, le poids  $B$  qui pèse sur la tranche la plus basse, que je nommerai première, sera  $= 347$  lignes de mercure. Soit  $C$  le poids qui pèse sur la seconde tranche,  $D$  celui qui pèse sur la troisième, &c. Il est visible que  $A - B$  sera le poids de la première de ces tranches (que je suppose d'une même épaisseur assez petite); donc  $A - B$  (poids de la première tranche) :  $B$  (poids qui comprime cette tranche) ::  $B - C$  (poids de la seconde tranche) :  $C$  (poids qui la comprime); & de même  $B - C : C :: C - D : D$ ; donc  $A - B + B : B :: B - C + C : C$ , ou  $A : B :: B : C$ , & par la même raison  $B : C :: C : D$ . Donc  $\therefore A : B : C : D$  : &c. c'est-à-dire que les poids  $A, B, C$ , &c. sont en progression géométrique, & par conséquent les densités des tranches de l'air (que nous supposons d'une très-petite épaisseur) sont aussi en progression géométrique décroissante. Donc si on observoit le baromètre entre chacune de nos tranches depuis le bas de l'atmosphère, les hauteurs seroient proportionnelles aux poids  $A, B, C, D$ , &c. & elles seroient en progression géométrique. Et puis  $A = 348$ , &  $B = 347$ , en multipliant chaque terme par  $\frac{347}{348}$ , on aura le suivant. D'un autre côté comme les tranches d'air comprises entre les points ou cette suite de hauteurs du mercure seroient observées sont d'égale épaisseur, les sommes de ces tranches, ou les hauteurs des colonnes d'air qui en seroient successivement formées seroient en progression arithmétique; mais les logarithmes, comme tout le monde le sçait, sont aussi des nombres en progression arithmétique. De plus, les différences des hauteurs des colonnes d'air correspondantes aux différences de hauteur du mercure dans le baromètre sont égales quand les hauteurs du mercure sont en progression géométrique, comme les différences des logarithmes de deux termes d'une progression géométrique sont toujours égales à la somme des différences égales des termes intermédiaires correspondants; donc les différences de hauteur de l'air suivent la même loi que les différences des logarithmes

des hauteurs du mercure, & leur font par conséquent proportionnelles.

Dans la table des logarithmes avec 7 décimales, la différence des logarithmes des nombres 348 & 347 est 12497 (on ne fait pas attention aux décimales) mais par une certaine température, l'épaisseur de la couche d'air interceptée entre deux stations, à l'une desquelles le mercure se tiendrait dans le baromètre à 348 lignes, tandis qu'il ne se tiendrait à l'autre qu'à 347 lignes, cette épaisseur, dis-je, a été trouvée de 12. 497 toises; & selon ce qu'on vient de dire, la même différence regne entre toutes les différences des logarithmes des hauteurs du mercure & les épaisseurs des couches d'air. Donc pour une température déterminée les différences des logarithmes des hauteurs du mercure, donnent immédiatement en millièmes de toise, la différence des hauteurs des lieux où l'on a observé le baromètre.

Mais on sent bien que cette épaisseur ne peut pas être la même lorsque la température sera différente, & que la chaleur différente de différens lieux dans lesquels on observe le baromètre doit causer quelque dérangement à la loi dont on vient de parler. Il a donc fallu chercher un moyen de connoître les effets de la chaleur sur l'air & sur le mercure même.

130 SOIT  $a$  le nombre des demi-degrés d'un thermomètre dont on donnera plus bas la construction, observés en  $+$  & en  $-$ , c'est-à-dire au-dessus & au-dessous du point zero,  $b$  la hauteur du mercure dans le baromètre observée à une certaine station,  $c$  sa hauteur observée au même moment à une station plus basse, la règle que M. de Luc employe pour avoir en toises la différence de hauteur des deux stations, se réduit à

$$L. c - L. b \pm (L. c - L. b) . a$$

cette formule  $\frac{1000}{1000}$ , dans la-

quelle  $L$  désigne des logarithmes tabulaires. On se sert du signe  $+$  lorsque la chaleur est au-dessus de zero & du signe  $-$ , lorsqu'elle est au-dessous; au point zero

la quantité  $a$  étant  $= 0$ , la formule devient  $\frac{L. c - L. b}{1000}$ .

Mais n'y a-t-il pas apparence que les exhalaisons & les vapeurs de l'air sont tantôt plus tantôt moins élastiques, & que l'air est sujet à des mélanges qui rendent son élasticité variable aussi bien que la densité ? D'ailleurs dans les régions supérieures de l'air & à une certaine hauteur, les vapeurs n'ayant pas la même densité, n'influeraient pas sur l'élasticité & le ressort de l'air comme dans les régions basses de l'atmosphère. Il seroit donc important de trouver un moyen sûr de faire une correction à la formule générale, relativement à cette cause.

Je pense cependant que si l'on avoit deux Observateurs dont l'un observât un baromètre & un thermomètre, tels que ceux dont on a parlé ci-devant à des instans convenus, tandis qu'un Voyageur observeroit aux mêmes instans un baromètre & un thermomètre semblables, on pourroit mesurer avec assez d'exactitude les différences des hauteurs des différens lieux assez éloignés & niveller une route. On pourroit aussi mesurer avec assez de facilité la hauteur des différentes villes de l'Europe relativement au niveau de la mer ; il suffiroit d'avoir un Observateur dans chaque ville & de convenir du moment des observations, qu'il faudroit répéter un certain nombre de fois, & l'on prendroit un milieu entre les résultats de ces observations. On doit éviter les observations faites au lever de l'aurore ; les plus favorables sont celles qu'on fait pendant la moyenne chaleur du matin, qui correspond à la cinquième partie du tems pendant lequel le soleil doit demeurer sur l'horison. Il y a apparence que dans cette partie du jour la densité de l'air est plus exactement telle que l'exige la température, c'est-à-dire, qu'on est éloigné de ces momens où pour l'ordinaire il se fait des condensations ou des dilatations subites qui troublent la loi générale. Peut-être aussi que le terrain n'étant pas échauffé, comme il l'est plus tard, les exhalaisons & les réverbérations de chaleur n'agissent pas encore aussi puissamment pour altérer l'effet des loix générales. Les observations faites à huit heures du matin, à une heure après midi, & à dix heures du soir, méritent aussi quelque confiance ; mais on doit avoir soin d'ex-

poser au vent & au soleil, autant qu'il est possible, le thermomètre dont on se servira, on doit employer un baromètre qui ait été purgé d'air par le feu, & avoir soin de le secouer avant l'observation, afin d'empêcher l'effet de l'adhésion du mercure par rapport au tube de l'instrument.

131. Le thermomètre dont s'est servi M. de Luc est de mercure, son tube est très-capillaire, & le diamètre extérieur de sa boule n'a que trois lignes. L'échelle est divisée en 186 parties égales ou degrés, le point 0 est regardé comme le point fixe de chaleur. L'eau bouillante correspond à + 147 dans l'échelle & l'eau dans la glace, à - 39; de sorte que 0 répond à 39. Les degrés de ce thermomètre ont une grandeur telle que lorsque la chaleur de l'air est au zéro, la différence des logarithmes des hauteurs du mercure exprime en millièmes de toise la différence des hauteurs des lieux où le baromètre a été observé, tandis qu'aux environs du point zéro du thermomètre, un degré de ce thermomètre répond à  $\frac{1}{1000}$ , & un demi-degré à un  $\frac{1}{2000}$  de changement dans le volume de l'air, en exprimant ce volume par 1000. L'opération à faire pour ramener les expériences à une température fixe est bien simple par ce moyen; il suffit de multiplier la hauteur trouvée, ou la différence des logarithmes des hauteurs du mercure exprimées en lignes, par le double des degrés indiqués sur le thermomètre & de diviser ensuite par 1000. Ainsi nommant H la hauteur du lieu, D la différence des logarithmes des hauteurs du mercure, g les degrés observés, h la hauteur que fournit le baromètre, la correction sera  $\pm \frac{h \cdot 2g}{1000}$ , & la hauteur sera  $h \pm \frac{2gh}{1000} = H$ , le signe + a lieu si les degrés indiqués par le thermomètre sont en plus, & le signe - si ces degrés sont au-dessous de zéro.

Si dans une station les degrés du thermomètre étoient + 20 & dans l'autre station + 12, on ajouteroit ces degrés, pour avoir 32, dont la moitié 16 indiqueroit

la température moyenne. Mais à cause du rapport des degrés du thermomètre dont il est ici question, & de la correction à faire pour la chaleur, on prendra la somme entière 32 & ce nombre représentera des demi-degrés. De même si à l'une des stations le thermomètre marquoit  $+ 6$  &  $- 10$  à l'autre, la somme  $- 4$  indiqueroit autant de millièmes de la hauteur trouvée à retrancher pour avoir la hauteur réelle. Ainsi dans la formule générale ci-dessus,  $a$  désigne la somme des degrés indiqués par les thermomètres aux deux stations. A l'égard des logarithmes, on ne fait pas attention aux décimales, c'est-à-dire, par exemple que si la hauteur du baromètre est de 330 ligne dans une station & de 300 dans l'autre, on prendra la différence entre 2.518514 & 2.477121 qui sont les logarithmes de ces nombres exprimés avec six décimales, comme si c'étoit des nombres entiers pour avoir 41393, différence des logarithmes.

M. de Luc se sert des logarithmes qui ont 7 décimales & le quotient donne alors des toises ; donc en se servant de logarithmes qui n'ont que 6 décimales, il faudra pour plus d'exactitude ajouter un zéro à la fin de la différence trouvée. Dans le cas dont on vient de parler j'ajouterois un zéro à la différence 41393 pour avoir 413930, & divisant par 1000, le quotient 413.930 donneroit la différence de hauteur en toises, en supposant que le thermomètre indique zéro.

132. ON a remarqué que par une augmentation de chaleur capable de faire monter le thermomètre depuis le point de la glace pilée jusqu'à celui de l'eau bouillante, la hauteur du baromètre étant à vingt-sept pouces environ, augmentoit de six lignes ou de  $\frac{2}{3}$  de ligne. C'est pourquoi en divisant en 96 parties égales, l'intervalle compris entre l'eau bouillante & l'eau dans la glace sur le thermomètre, chacune de ces parties correspondra à  $\frac{1}{16}$  de ligne. Or il est à propos d'employer les thermomètres de mercure, afin que leurs changemens soient le plus conformes qu'il est possible à ceux que la chaleur occasionne dans les baromètres. Le zéro dans le thermomètre dont nous parlons ici & qui doit accompagner le baromètre, c'est-à-dire être suspendu à côté

de lui, est placé à la 12 division; de sorte que l'eau à la glace, répond à  $-12$ , & l'eau bouillante à  $+84$ . Si on avoit un thermomètre dont l'échelle ne fût que de 80 parties il seroit facile de trouver à quelle partie de l'échelle de ce thermomètre doit répondre un degré observé sur celui dont on vient de parler & réciproquement.

Supposons deux baromètres tels que celui dont on vient de parler, placés l'un au sommet d'une montagne où le mercure se soutient à  $13\frac{1}{2}$  pouces, par exemple, & l'autre au pied de la montagne où le mercure se soutient à 27 pouces. Si les thermomètres qui accompagnent les baromètres sont à 0, il n'y a point de correction à faire pour cette température d'air; mais s'ils sont tous deux à  $-16$ , on ajoutera  $\frac{1}{12}$  de ligne ou une ligne à la hauteur observée du baromètre placé au pied de la montagne. A l'égard de celui qui est placé au sommet il sera facile de trouver ce qu'il faut ajouter à la hauteur du mercure, en faisant cette règle de trois  $27 : \frac{1}{12} :: 13\frac{1}{2} : x = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$  ligne. Ainsi il faudra ajouter une demi-ligne à la hauteur du mercure dans ce baromètre.

Si les degrés de ces thermomètres étoient en  $+$ , on feroit les soustractions dans le même ordre, tant pour les températures égales, que pour celles qui sont différentes; & de cette manière, on ramenera les températures à un terme fixe, ce qui produira le même effet que si les condensations du mercure étoient toujours les mêmes. En général la hauteur du mercure dans le baromètre étant d'environ 27 pouces, on ajoutera autant de  $\frac{1}{12}$  de ligne que le thermomètre indiquera de degrés au-dessous de zéro, & on retranchera autant de  $\frac{1}{12}$  de ligne qu'il indiquera de degrés au-dessus de zéro.

EXEMPLE. Supposons que la hauteur du mercure dans le baromètre soit de 311 lignes, le degré du thermomètre qui l'accompagne, & qu'il est bon de placer vers le milieu de sa longueur étant  $= +20$ , vous ferez la règle suivante 27 pouces  $= 324$  lignes :  $311 :: +20 : x = 19 + \frac{64}{114} = 19$ , en négligeant la fraction; c'est-à-dire



c'est-à-dire qu'il faut retrancher  $\frac{19}{172}$  de ligne de la hauteur 311, pour avoir 309  $\frac{11}{172}$  de ligne; 19 est donc le nombre des  $\frac{1}{172}$  de ligne qu'il faut retrancher de 311. J'appellerai cette quantité qu'il faut ainsi retrancher les degrés réduits du thermomètre qui accompagne le baromètre, ou pour abrégé, en appelant ce thermomètre B, les degrés réduits du thermomètre B. Si le mercure se tenoit à 29 pouces dans le lieu où le thermomètre donne + 20, on feroit 27 : 29 :: 20 : x le quatrième terme donneroit le nombre des  $\frac{1}{172}$  de ligne qu'il faudroit retrancher de la hauteur 29 pouces. Dans les observations que je vais rapporter les  $\frac{1}{172}$  de ligne ont été réduits à ceux qu'on doit ajouter, ou retrancher de la hauteur observée du mercure dans le thermomètre.

Le 18 Juin sur le corridor qui regne autour des fenêtres qui introduisent la lumière dans le dôme de Supergue, église située au sommet de la montagne de Turin, M. de Luc observa à 4  $\frac{1}{2}$  du soir la hauteur du mercure à 311 lignes, les degrés réduits du thermomètre qui accompagne le baromètre ou du thermomètre B étant + 9, ce qui donne  $\frac{9}{172}$  à ôter de 311 pour avoir la température commune de 310  $\frac{7}{172}$ . Un instant après il l'observa sur le pavé de l'Eglise à .... 312  $\frac{11}{172}$ , & les degrés réduits du thermomètre B à ... + 8, ce qui donne pour la hauteur corrigée 312  $\frac{1}{172}$ . Dans le même tems le thermomètre isolé ou qui n'accompagne pas le baromètre, & qui étoit suspendu dans l'intérieur du dôme, étoit à -  $\frac{1}{2}$ . Donc selon la règle ci-dessus, en supposant que le degré indiqué par le second thermomètre étoit zero, la différence de hauteur des deux stations étoit de 156 pieds 11 pouces, qui se réduisent à 156 pieds 9 pouces, en déduisant ce qu'exige le  $\frac{1}{2}$  degré au-dessous de zero qui exprimoit la chaleur de l'air; & la mesure par le baromètre, en égard à la chaleur de l'air, n'excède que de sept pouces celle qui avoit été prise au cordeau.

Le 22 Juin 1757 au pied du Fanal de Gênes, environ 20 toises au-dessus du niveau de la mer, la hauteur corrigée du mercure à 6 heures du matin étoit de 337 lignes  $\frac{12}{172}$ , le même jour à 4 heures du soir, elle

étoit de  $337 \frac{17}{12}$ . Le 23 du même mois à 9 h.  $\frac{1}{2}$  du matin de...  $338 \frac{2}{12}$ . Le même jour à 5 h.  $\frac{1}{2}$  du soir de  $337 \frac{14}{12}$ . Le 26 Juillet à 1 h. du soir de  $337 \frac{1}{12}$ . La somme de ces 5 observations donne  $1688 \frac{11}{12}$ , divisant cette somme par 5, le résultat  $337 \frac{11}{12}$  donnera le terme moyen de la hauteur du mercure dans le baromètre.

*Thermomètre en  
Hauteurs corrigées. plein air au haut  
du fanal.*

Le 22 Juin 1757,									
matin . . . . .	335	$\frac{4}{12}$	. . . . .	+	6	$\frac{1}{2}$			
Le même jour,									
soir . . . . .	335	$\frac{1}{12}$	. . . . .	+	18				
Le 23 Juin, ma-									
tin . . . . .	335	$\frac{16}{12}$	. . . . .	+	15	$\frac{1}{2}$			
Le même jour,									
soir . . . . .	334	$\frac{51}{12}$	. . . . .	+	13				
Le 26 Juillet . . . .	334	$\frac{13}{12}$	. . . . .	+	12				
Somme des cinq observations du baromètre & du thermomètre . . .	1674	$\frac{34}{12}$	. . . . .	+	65				
Terme moyen . . . .	334	$\frac{61}{24}$	. . . . .	+	13				
Hauteur par la regle . . . . .	221	pieds un pouce : ce qui ne diffère que de 22 pouces de la hauteur réelle..							

133. LORSQU'ON voudra avoir la hauteur en pieds, il suffira de multiplier la formule dont on a parlé ci-dessus par 6 & si on la multiplioit par 72, on auroit des pouces.

Dans la montagne de Saleve près de Genève, M. de Luc observa le mercure du baromètre à une station élevée de 2582 pieds 4 pouces au-dessus de la plaine où M. son pere observoit en même-tems un autre baromètre.

Dates & heures.	Baromètre inférieur.	Baromètre supérieur.	Différences des Baromètres.	Résultats par logarithmes.	Thermomètre supérieur & inférieur.	Sommes.	Hauteur par la règle.
1760, 12 Févr. 6. heur. $\frac{1}{4}$ soir.	5263 — 9	4745 — 5		2717	— 26 $\frac{1}{4}$ — 20 $\frac{1}{4}$	— 47	2589
	5272	4750	522				
12 Avril 8 heur. $\frac{1}{4}$ matin.	5192 — 1	4688 — 3		2649	— 21 — 7	— 28	2575
	5193	4691	502				
1758, 1 Octob. 10 heur. $\frac{1}{2}$ matin.	5236 — 1	4734 + 3		2648	— 9 — 15 $\frac{1}{2}$	— 24 $\frac{1}{2}$	2583
	5237	4731	506				

La premiere colonne de la gauche contient les dates des observations, la seconde les hauteurs du mercure dans le baromètre inférieur réduites en  $\frac{1}{12}$  de ligne, avec les degrés réduits du thermomètre qui l'accompagne. La troisième colonne a rapport au baromètre de la montagne & au thermomètre qui l'accompagne. Le nombre — 9 de la seconde colonne indique 9 seiziemes de ligne à ajouter à la hauteur du baromètre, qui sera 5272 vraie hauteur réduite. De même 4750 exprimera en seiziemes de ligne la hauteur réduite du baromètre supérieur. La colonne suivante contient la différence des hauteurs du mercure exprimées en seiziemes de ligne. La cinquieme colonne contient la différence de hauteur des deux lieux en pieds, n'ayant pas égard aux corrections indiquées par les thermomètres en plein air. Dans la colonne suivante on voit les degrés observés de ces thermomètres, dont la somme — 47 se trouve

à la septieme colonne. De sorte que par la regle on aura 2589 pieds.

Si l'on prend les trois résultats 2589, 2575, 2583, leur somme 7747 étant divisée par 3 donne 2582  $\frac{1}{3}$  qui differe bien peu de la véritable hauteur.

Il est aisé de conclure de ces expériences que la mesure des hauteurs par le baromètre peut être de la plus grande utilité, & que cette méthode a toute la justesse qu'on peut raisonnablement desirer.

134. Si l'on veut connoître le rapport de la densité de l'air à celle du mercure dans un lieu donné, voici comment on pourra s'y prendre. On observera le baromètre & le thermomètre qui l'accompagne, aussi bien que le thermomètre en plein air. On montera ensuite sur une coline, ou sur une tour jusqu'à ce que le mercure baisse d'une ligne dans le baromètre. On observera encore les thermomètres dont on vient de parler & l'on cherchera par la regle donnée la différence de hauteur des deux stations. Supposons que l'on trouve 80 pieds, 6 pouces, 5 lignes; on conclura que la tranche d'air qui fait équilibre avec une ligne de mercure dans un lieu moyen entre les deux stations, a 11597 lignes. C'est-pourquoi la densité de l'air sera à celle du mercure dans ce lieu comme 1 : 11597.

Supposons que la température de l'air soit celle qui est indiquée par le zero du thermomètre, & que la hauteur du mercure soit de 27 pouces dans un lieu donné. Si l'on veut sçavoir quelle est la hauteur de l'atmosphère depuis ce lieu, jusqu'à celui ou le mercure ne se tiendrait plus qu'à une ligne de hauteur, on prendra la différence entre le logarithme 0 d'une ligne & 25105450 qui est celui de 324 lignes, & la divisant par 1000, le quotient 25105 450 = 11 lieues & 3 toises indiquera la hauteur de l'atmosphère depuis le lieu donné jusqu'à l'endroit cherché, en n'ayant pas égard à la chaleur de l'air.

Mais la loi des condensations de l'air dont nous avons parlé ci-dessus, n'a certainement lieu que jusqu'à une certaine hauteur, autrement l'atmosphère seroit infinie. puisqu'une progression géométrique décroissante telle que  $\vdots A : B : C : D : \&c.$  contient une infinité de termes.

135. SUPPOSONS que la force centrifuge qui tend à éloigner les particules de l'air de la surface de la terre suive la raison des distances au centre de notre globe & que la force centripète ou l'attraction soit en raison inverse des quarrés des distances ; si nous faisons le rayon de la terre  $= r$ , & le rapport de la gravité à la force centrifuge sous l'équateur égal à celui de  $a : 1$ , à la distance  $x$  du centre, la force centrifuge sera  $= \frac{x}{r}$  & la

gravité  $= \frac{a \cdot r^2}{x^2}$ . En effet on aura  $r : 1 :: x : \frac{x}{r}$  force

centrifuge à la distance  $x$  ; &  $x^2 : r^2 :: a : \frac{a \cdot r^2}{x^2}$  force

de la gravité à la même distance  $x$ . Mais il est visible que l'atmosphère doit être terminée au point auquel ces deux forces sont égales ; car au-delà de ce point la force centrifuge dissiperoit les particules de l'air dans l'espace, à moins qu'on ne prétende que ces particules n'ont pas la même vitesse angulaire que le reste de l'atmosphère. Auquel cas négligeant ces particules, sans doute fort rares si elles existent, & les regardant comme ne faisant pas partie de notre atmosphère, nous

supposerons qu'elle est terminée au point auquel  $\frac{x}{r} =$

$\frac{a \cdot r^2}{x^2}$ . Nous aurons donc  $x^3 = ar^3$ , &  $x = r\sqrt[3]{a}$ . Si

la gravité à l'équateur est à la force centrifuge comme

289 : 1, nous trouverons  $x = r\sqrt[3]{289}$  ; de sorte que dans cette hypothèse les limites de notre atmosphère seroient éloignées du centre de notre globe de plus de six demi-diamètres terrestres.

136. SUPPOSONS que par inadvertence ou autrement on eût enfermé de l'air dans l'espace BT (fig. 104) d'un baromètre ordinaire, il est facile de trouver à quelle hauteur se soutiendra le mercure dans un tel baromètre. Soit BT  $= b$  l'espace que l'air renfermé dans BT occuperoit si le bout supérieur B étoit ouvert,  $p$  la hauteur à laquelle la pression de l'atmosphère peut soutenir

une colonne de mercure, la hauteur  $AB = a$ , la hauteur  $Al'$  à laquelle se soutiendra le mercure  $= x$ ; l'espace  $BP$  que l'air occupe après son expansion pourra être représenté par  $a - x$ . Maintenant comme la force élastique de l'air naturel  $BT$  est égale à la force comprimante, c'est-à-dire au poids de l'atmosphère  $= p$ , & que cette force diminue dans le même rapport que son expansion augmente, si nous faisons  $BP = a - x$ :

$b :: p : \frac{bp}{a-x}$ , nous aurons l'expression de la force élastique de l'air  $BP$ . Mais cette force jointe au poids de la colonne de mercure  $AP = x$  doit être équivalente au

poids  $p$ ; donc  $\frac{bp}{a-x} + x = p$ . Equation par laquelle connoissant trois des quatre quantités  $b, p, x, a$ , on trouvera facilement la quatrième.

137. ON sait que la pression de l'air fait élever l'eau dans les pompes aspirantes, & comme le mercure pèse environ quatorze fois plus que l'eau, dans les lieux où la hauteur du mercure dans le baromètre est d'environ 27 pouces 6 lignes, la pression de l'air peut élever l'eau à environ 32 pieds. Supposons que le niveau de l'eau est représenté par  $RS$  (fig. 105) & que l'eau est déjà parvenue en  $Z$ . J'appelle  $h$  la hauteur depuis le point  $Q$  jusqu'au niveau  $RS$ ,  $n$  le jeu du piston ou l'espace  $CQ$  qu'il parcourt,  $x$  la distance  $ZQ$ ,  $CZ$  sera  $= x - n$ , & la hauteur du point  $Z$  sera  $= h - x$ . Supposons que l'eau soit déjà parvenue en  $ZI$ , il est clair que l'air renfermé dans l'espace  $ZIDC$  ne peut pas avoir plus de ressort que l'air extérieur (du moins abstraction faite du poids & du frottement de la soupape  $L$ ) autrement il s'échapperoit en soulevant cette soupape. Rappelons nous maintenant que  $CQ = Dm$  représente le jeu du piston ou l'espace qu'il parcourt à chaque levée. Lorsque la base  $CD$  sera arrivée en  $Qm$ , l'air qui occupoit l'espace  $CZID$  tendra à occuper l'espace  $QmIZ$ , & l'occupera en effet si l'eau ne monte pas davantage, & alors son ressort sera à celui de l'air naturel comme  $CZ : ZQ$ . C'est pourquoi si l'action de ce ressort jointe

au poids de la colonne d'eau qui auroit pour hauteur la distance de RS à ZI équivalent à un poids  $p$  de 32 pieds d'eau en hauteur, qui représente l'effort que l'air exerce sur la surface de l'eau RS, il est évident qu'il y aura équilibre & que l'eau ne pourra plus monter. Si le poids  $p$  est plus grand que 32 pieds, l'eau retombera avant que la soupape E puisse se fermer; mais si  $p$  est  $< 32$  pieds, l'eau continuera de monter.

Rappelons-nous que  $h$  exprime la hauteur depuis le niveau RS jusqu'en Q,  $a$  le jeu du piston ou CQ,  $x$  la distance ZQ, ce qui donne CZ =  $x - n$ , & la hauteur du point Z =  $h - x$ , & appelons  $a$  le poids d'une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur. Puisque le ressort  $a$  de l'air renfermé dans l'espace CZID est à celui du même air occupant l'espace QmIZ comme DI:Im, on aura  $x : x - n :: a : \frac{a(x-n)}{x}$ , effort de l'air qui occupera l'espace QmIZ.

Si l'on ajoute cette quantité à la colonne  $h - x$  ou au poids de l'eau comprise entre ZI & SR, on aura  $\frac{a(x-n)}{x} + h - x = a - t$ , ou  $x = \frac{h+t}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{h+t}{2}\right)^2 - an\right]}$ .

Il est évident que l'eau s'arrêtera si  $t=0$ . Mais alors  $x$  est  $= \frac{h}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{hh}{4} - an\right)}$ , quantité réelle toutes les fois que  $\frac{hh}{4}$  sera plus grand  $an = 32.n$ .

De là il suit que si le carré de la moitié de la plus grande hauteur de la base du piston au-dessus du niveau de l'eau est plus grand que 32 fois le jeu du piston, il y a deux points où l'eau peut s'arrêter dans la pompe aspirante. Si le contraire arrive, les valeurs de  $x$  que l'on a en supposant  $t=0$  deviennent imaginaires; donc alors il est absurde de supposer  $t=0$ , c'est-à-dire que  $t$  ne peut alors être  $=0$  & l'eau ne peut s'arrêter : ainsi une pompe

*aspirante produira infailliblement son effet si le quarré de la moitié de la plus grande hauteur du piston au-dessus du niveau de l'eau est plus petit que 32 fois le jeu du piston.*

138. Nous avons supposé que la pompe étoit par-tout d'une grosseur uniforme, lorsqu'elle ne l'est pas, le problème n'est pas plus difficile; car pour calculer l'effort de l'air intérieur quand on suppose que l'eau n'est pas encore dans le corps de pompe  $YT$ , lorsqu'elle est en  $MN$ , par exemple, il suffit de faire la proportion suivante : l'espace  $QmVNMTQ : DCTMNV D :: a = 32 : 7$ ; ajoutant la valeur de 7 au poids d'une colonne d'eau qui a pour hauteur  $MR$ , on égalera la somme à la quantité  $a - r$  comme ci-dessus.

139. SUPPOSONS que l'eau qui est entrée par la soupape  $L$  remplisse la capacité  $QCDm$ , si l'on élève le piston cette eau se dégorgera en  $m$ . Pour connoître l'effort que soutient la puissance qui met le piston en mouvement. Remarquons que lorsque la machine est bien en train, que l'eau est parvenue à la plus grande hauteur  $Qm$ , & que le piston est en  $CD$  le plus bas qu'il est possible, il soutient 1°. le poids de l'eau  $QCDm$ . 2°. Le poids d'une colonne de 32 pieds de même base que celle du piston, qui vient de la pression de l'atmosphère sur la base  $Qm$ , tandis que la pression contraire appliquée en  $RS$  pousse le piston en haut avec une force égale à celle d'une colonne d'eau de 32. Donc l'effort effectif de la pression de l'air sur  $RS$  pour soulever le piston est  $= a - b$  en appelant  $a$  une colonne d'eau de 32 pieds, &  $b$  une colonne d'eau de la hauteur  $CR$ ; donc le piston est pressé en bas par une colonne d'eau de même base & dont la hauteur seroit  $= a + c - a + b = c + b$ , en faisant  $QC = c$ , c'est-à-dire que la charge du piston est égale au poids d'une colonne d'eau de même base & dont la hauteur est égale à la distance verticale du point où il faut élever l'eau au niveau de celle du réservoir, ce qui a lieu même dans les coups de piston suivans.

Pour passer de l'état d'équilibre à celui de mouvement, on augmentera cette force du tiers à peu-près de sa valeur; mais cette détermination n'a rien de fixe, elle dépend du frottement & de la vitesse.



La quantité d'eau que le piston élève à chaque fois est égale à  $Acpaa$ ,  $A$  étend le poids d'un pied cube d'eau,  $c$  le jeu du piston,  $p$  la circonférence du diamètre 1, &  $a$  le rayon de la base du piston.

J'appelle *pompe aspirante parfaite* celle dans laquelle l'eau est élevée jusqu'à la soupape  $E$  du tube d'aspiration dans le premier coup de piston.

140. PROBLEME. *Déterminer la longueur du tuyau d'aspiration dans une pompe aspirante parfaite.* Supposons que le diamètre du tuyau d'aspiration est le même que celui du corps de pompe, & faisons la longueur du tuyau d'aspiration  $= x$ ,  $CT = b$ ,  $CQ = n$ . Puisque le piston étant parvenu de  $CD$  en  $Qm$ , l'eau doit monter jusqu'en  $TV$ , l'air qui occupoit dans la pompe l'espace  $x + b$ , occupera l'espace  $n + b$ . Donc l'on aura  $b + n : x + b :: a : a - x$ , ou  $ba + na - bx - nx =$

$ax + ba$ , ou  $na = x(a + b + n)$  &  $x = \frac{a \cdot n}{a + b + n}$ . Si  $b$  est  $= 1$  pied,  $n = 3$  pieds, l'on aura  $x = \frac{24}{16} = 1\frac{1}{2}$  pieds 8 pouces (\*).

Si le diamètre du tube d'aspiration n'étoit pas le même que celui du corps de pompe, la solution ne seroit pas beaucoup plus difficile; car soit l'amplitude du corps de pompe  $= m$ , celle du tuyau d'aspiration étant  $= p$ , si l'on multiplie  $p$  par  $x$ ,  $px$  sera la capacité du tube

d'aspiration. Si l'on divise cette capacité par  $m$ ,  $\frac{px}{m}$  sera la hauteur que cet air pourroit occuper (dans son état naturel) dans le corps de pompe; c'est pourquoi

---

(\*) Si on connoissoit la longueur du tuyau d'aspiration, la force naturelle  $a$  de l'air, &  $b$ , on trouveroit facilement le jeu  $n$  du piston. En général trois des quatre quantités  $a$ ,  $b$ ,  $n$ , & la longueur du tuyau d'aspiration étant connues, on trouvera la quatrième par l'équation  $na = x(a + b + n)$ .

$$\begin{aligned} \text{on fera } b + n : b + \frac{p x}{m} :: a : a - x, \text{ ou } b a - b x + a n \\ - n x = b a + \frac{a p x}{m}, \text{ ou } a . n . m = x (a p + b m + m n), \\ \text{ou } x = \frac{a . n . m}{a p + b m + m n}. \end{aligned}$$

### *Du Son & de la Musique.*

141. IL est certain que les corps qu'on frappe ne deviennent sonores que par le tremoussement de leurs parties insensibles. On ne doutera point de ce frémissement pour peu qu'on applique la main sur un corps qui rend un son un peu fort. Ce mouvement de vibration des parties du corps sonore se communique aux particules contiguës de l'air environnant, celles-ci le communiquent à celles qui les suivent, & ainsi de suite jusqu'à ce que l'air renfermé dans nos oreilles étant mis en mouvement aille ébranler les fibres des nerfs acoustiques, qui sont ceux par le moyen desquels nous entendons; car ces nerfs étant agités, le fluide nerveux dont ils sont remplis remonte vers le *sensorium* & lui communique un certain mouvement auquel le Créateur a attaché la perception ou sensation du son (voyez ce que nous avons dit dans notre métaphysique sur les loix de l'union de l'ame avec le corps). Il paroît que la vitesse du son n'est pas la même dans tous les pays; mais on peut supposer sa vitesse moyenne d'environ 173 toises par seconde.

Les cordes de musique rendent des sons différens selon leur longueur, les poids tendans & leurs diamètres, & la différence des sons quant au *grave* & à l'*aigu* dépend de la promptitude & de la célérité des vibrations; de sorte qu'un son plus aigu suppose un plus grand nombre de vibrations (dans le même tems) qu'un son moins aigu ou plus grave. Si deux cordes font le même nombre de vibrations dans le même tems ont dit qu'elles sont à l'*unisson*. Si les nombres des vibrations sont comme 2 : 1, cette consonnance s'appelle l'*octave*, &c. Or la

formule  $\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{L.M}}$  qu'on a trouvée ci-dessus en parlant des cordes vibrantes, fait voir dans quel rapport sont les nombres des vibrations que peuvent faire les cordes de musique dans le même tems. Mais rien n'empêche de considérer l'air contenu dans la cavité d'une flûte comme une corde aérienne; car soit  $L$  la longueur de la flûte, son amplitude  $= b b$ , la gravité spécifique de l'air  $= N$ , celle du mercure étant  $= n$ , la hauteur du mercure dans le baromètre  $= h$ . Il est visible que  $n h b b$  exprimera le poids tendant ou la force élastique de la corde aérienne contenue dans la flûte, tandis que sa masse  $M$  sera  $= N.L.b b$ ; donc par la formule

$$\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{L.M}}, \text{ on aura } \sqrt{\left(\frac{n h . b b}{L . N L . b b}\right)} = \frac{1}{L} \sqrt{\left(\frac{n}{N}\right)},$$

& parce que pendant les différentes saisons de l'année la valeur de  $h$  est à peu-près la même, les nombres des vibrations des cordes aériennes contenues dans les flûtes sont en raison inverse des longueurs des flûtes; de sorte que plus les flûtes sont courtes, plus leur son doit être aigu, ce que l'expérience confirme.

142. MAIS un phénomène bien digne de remarque, c'est que si une corde  $A B$  (fig. 106) rend un certain son qu'on appelle *fondamental* ou *principal*, on entend encore l'octave de ce même son & même d'autres tons plus aigus. Il est vrai qu'on peut concevoir que la corde  $A C B$  se divise pour ainsi dire en deux parties égales en  $C$ , & que les parties  $A M C$ ,  $B m C$  font chacune deux vibrations, tandis que la corde totale en fait une, de sorte que la partie  $A M C$  rend l'octave de la corde totale  $A C B$ . & l'on peut concevoir de même que la partie  $A M C$  se divise aussi en d'autres parties dont chacune rend encore un son plus aigu que l'octave, & ainsi de suite. Mais il est difficile d'expliquer comment toutes ces vibrations passent dans les particules de l'air sans se confondre, & pourquoi les particules aliquotes & égales de la corde faisant leurs vibrations séparément, le son qui dépend de ces vibrations n'est pas le même?

143. Tout corps est susceptible d'un certain ébranlement dans ses parties; c'est pourquoi tous les corps peuvent produire des sons. Dans une corde, lorsqu'elle

n'est pas trop mince, on peut voir ces ébranlemens ou vibrations par lesquelles la corde tendue  $ACB$  passe alternativement dans la situation  $ACB$  &  $ANB$ , que j'ai représentées beaucoup plus sensiblement qu'elles n'arrivent en effet ; ensuite il faut observer que ces vibrations mettent l'air voisin dans une semblable vibration, qui se communique successivement aux parties plus éloignées de l'air, jusqu'à ce qu'elles viennent frapper l'organe de notre oreille ; c'est donc l'air qui reçoit de telles vibrations\*, qui transporte le son jusqu'à nos oreilles ; & quand nous entendons le son d'une corde pincée, nos oreilles en reçoivent autant de coups que la corde a fait de vibrations en même-tems. Ainsi si la corde fait 100 vibrations dans une seconde, l'oreille en reçoit aussi 100 coups dans une seconde & l'affection qui est alors produite dans l'air est ce qu'on nomme un son. Lorsque ces coups se suivent également les uns les autres, ou que leurs intervalles sont tous égaux, le son est *régulier* & tel qu'on l'exige dans la Musique ; mais quand ces coups se succèdent inégalement ou que leurs intervalles sont inégaux entr'eux, il en résulte un bruit *irrégulier*, tout-à-fait impropre pour la Musique. Quand je considère un peu plus soigneusement les sons de Musique dont les vibrations se font également, je remarque d'abord, que lorsque les vibrations, ainsi que les coups dont l'oreille est frappée sont plus ou moins forts, il n'en résulte d'autre différence dans le son, si ce n'est qu'il devient plus ou moins fort ; & c'est la différence que les Musiciens indiquent par les mots *forte* & *piano* ; mais une différence beaucoup plus essentielle est lorsque les vibrations sont plus ou moins rapides ou qu'il en arrive plus ou moins dans une seconde : ainsi quand une corde acheve 100 vibrations dans une seconde, & une autre corde 200 vibrations dans une seconde, leurs sons seront essentiellement différens entr'eux, le premier sera plus *grave* ou plus *bas*, & l'autre plus *aigu* ou plus *haut*. Voilà donc la véritable différence entre les sons graves & aigus sur laquelle roule toute la Musique qui enseigne à mêler des sons, qui diffèrent entr'eux par rapport au grave & à l'aigu, mais unis tellement ensemble qu'il en résulte une agréable *harmonie*. Or dans les sons graves il y a

moins de vibrations en même tems, que dans les sons aigus, & chaque son sur le clavecin renferme un nombre certain & déterminé de vibrations. Celui qui est marqué par la lettre C rend à peu-près 100 vibrations dans

une seconde & le son marqué par la lettre  $c$  rend 1600 vibrations dans le même tems; donc une corde qui tremble 100 fois dans une seconde donnera précisément le son C, & si elle ne trembloit que 50 fois, le son seroit encore plus bas ou plus grave. Mais à l'égard de nos oreilles il y a des limites au-delà desquelles les sons ne sont plus perceptibles; il semble que nous ne saurions plus sentir un son qui fait moins de 20 vibrations dans une seconde, à cause de la trop grande *basse*, ni un son qui feroit dans une seconde plus de 4000 vibrations à cause de sa trop grande *hauteur*; mais ces limites ne sont peut-être pas bien certaines.

144. ON a remarqué qu'en entendant un son simple de Musique, notre oreille est frappée d'une suite de coups également éloignés entr'eux, dont la fréquence ou le nombre produit dans un certain tems, cause la différence qui règne entre les sons graves & aigus; en sorte que plus le nombre de vibrations ou coups produits dans un certain tems, comme dans une seconde, est petit, plus le son est grave, & plus ce nombre là est grand, plus le son est aigu. Donc les coups que produit un son simple de Musique dans les nerfs acoustiques peuvent être représentés par une suite de points également éloignés entr'eux, comme ceux qu'on voit ici . . . . . Si les intervalles entre ces points sont ou plus grands ou plus petits, le son qu'ils représentent sera ou plus grave ou plus aigu; il n'y a point aussi de doute que l'impression d'un son simple sur les nerfs acoustiques ne soit semblable ou analogue à la vue d'une telle suite de points également éloignés entr'eux; & par ce moyen on peut représenter aux yeux la même chose que les oreilles éprouvent lorsque nous entendons un son. Si les distances entre les points n'étoient pas égales, & que les points fussent rangés confusément ce seroit la représentation d'un bruit confus contraire à l'harmonie. Cela

posé, considérons quel effet deux sons rendus à la fois doivent produire sur l'oreille; & d'abord il est clair que si ces deux sons sont égaux, ou que chacun renferme le même nombre de vibrations pour le même tems, l'oreille en sera affectée de la même manière que d'un seul son: & dans la Musique on dit que ces deux sons sont à l'unisson, ce qui est le plus simple accord, un accord étant nommé le mélange de deux ou plusieurs sons qu'on entend à la fois. Mais si les deux sons sont différens par rapport au grave ou à l'aigu il y aura un mélange de deux suites de coups dans chacune desquelles les intervalles sont égaux entr'eux, mais dans l'une plus grands que dans l'autre, celle-là répondant au son plus grave & celle-ci au plus aigu. Un tel accord de deux sons peut être représenté aux yeux par deux suites de

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
A	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	B
C	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	D
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

points rangés sur deux lignes A B & C D; & pour avoir une juste idée de ces deux suites, il faut s'appercevoir de l'ordre qui y règne, ou ce qui revient au même du rapport entre les intervalles de l'une & de l'autre ligne. Ayant numéroté les points de l'une & de l'autre ligne & mis le numéro 1 sous le numéro 1; les numéros 2 ne seront plus précisément l'un sous l'autre & encore moins les numéros 3; mais on voit qu'en haut le numéro 11 se trouve précisément au-dessus du numéro 12 d'en bas. d'où l'on connoît que le plus haut son achève 12 vibrations, pendant que l'autre n'en fait que 11; mais sans y écrire les nombres, les yeux ne découvriraient presque point cet ordre, & il en est de même des oreilles, qui découvriraient aussi difficilement l'ordre parmi les deux sons que j'ai représentés par les deux rangs de points. Mais dans cette figure

. . . . .

on découvre au premier coup-d'œil que la ligne

d'en-haut contient deux fois plus de points que celle d'en-bas , & que les intervalles dans la ligne d'en-bas sont deux fois plus grands que dans celle d'en-haut. C'est sans doute le cas le plus simple après l'unisson où l'on peut aisément découvrir l'ordre dans ces deux suites de points ; & il en est de même des deux sons représentés par ces deux lignes de points , dont l'un achevera précisément deux fois plus de vibrations que l'autre , & l'oreille s'apercevra aisément de ce beau rapport qui se trouve parmi ces deux sons pendant que dans le cas précédent le jugement est très-difficile , sinon impossible. Maintenant quand l'oreille découvre aisément un rapport qui règne entre deux sons , leur rapport est nommé une *consonnance* , & quand ce rapport est très-difficile à découvrir ou même impossible , l'accord est nommé *dissonance*. Donc la plus simple consonnance est celle où le son aigu achève précisément deux fois plus de vibrations que le son grave. Cette consonnance est nommée dans la Musique une *octave* ; tout le monde en connoît la force , & deux sons qui diffèrent d'une octave harmonient si bien & se ressemblent si fort que les Musiciens les marquent par les mêmes lettres , aussi voyons-nous souvent que les femmes chantent d'une octave plus haut que les hommes & s'imaginent pourtant entonner les mêmes sons. On peut s'assurer aisément de cette vérité sur un clavecin , & s'apercevoir avec plaisir du bel accord entre tous les sons qui diffèrent d'une octave pendant que deux autres sons quelconques ne sonnent pas si bien.

Ayant entonné le son F on y accorde aisément le son f qui est plus haut d'une octave par le seul jugement de l'oreille ; & si la corde du son f est tant soit peu trop haute ou trop basse , l'oreille en est d'abord choquée : rien n'est plus aisé que de la mettre parfaitement d'accord. Aussi voyons-nous que tout le monde passe aisément en chantant d'un son à un autre qui est d'une octave ou plus haut ou plus bas ; mais s'il faut passer du son F au son d , par exemple , un Musicien médiocre se trompera aisément s'il n'est pas secouru d'un instrument. Ayant fixé le son F , il est presque impossible d'y accorder tout-d'un-coup le son d. Quelle est donc la raison de cette différence , qu'il est si aisé

d'accorder le son F au son  $f$ , & si difficile d'y accorder le son  $d$ . Cela vient sans doute de ce que le son F & le son  $f$  sont une octave, ou que le nombre des vibrations du son  $f$  est précisément le double de celui du son F, pour appercevoir cet accord il ne s'agit que de sentir le rapport de 1 à 2, qui comme il saute d'abord aux yeux par la représentation des points dont je me suis servi auparavant, affecte les nerfs acoustiques d'une manière semblable; or on comprend aisément que plus un rapport est simple ou exprimé par de petits nombres, plus il se présente distinctement à l'entendement & y excite un sentiment de plaisir. Les Architectes observent aussi très-soigneusement cette maxime en employant par-tout dans les bâtimens des proportions aussi simples que les autres circonstances le permettent. Dans les portes & fenêtres, ils sont ordinairement la hauteur deux fois plus grande que la largeur; & par-tout ils tâchent d'employer des proportions exprimables en de petits nombres puisque cela plaît à l'entendement. Il en est de même dans la Musique où les accords plaisent lorsque l'esprit y découvre la proportion qui règne entre les sons, & cette proportion s'apperceoit d'autant plus aisément qu'elle est exprimée par de petits nombres. Mais après le rapport d'égalité qui marque deux sons égaux ou à l'unisson, la proportion de 2 à 1 est sans doute la plus simple, & c'est celle qui fournit l'accord d'une octave: de-là il est évident que cet accord est doué de beaucoup de prérogatives parmi les autres consonnances. Après cette explication de l'accord ou de l'intervalle entre deux sons que les Musiciens nomment une *octave*,

considérons plusieurs sons comme  $F, \overline{f}, \overline{\overline{f}}, \overline{\overline{\overline{f}}}$  dont chacun est d'une octave plus haut que le précédent.

Donc, puisque l'intervalle de  $F$  à  $f$ , de  $f$  à  $\overline{f}$ ; de  $\overline{f}$  à  $\overline{\overline{f}}$ , de  $\overline{\overline{f}}$  à  $\overline{\overline{\overline{f}}}$  est une octave, l'intervalle de  $F$  à  $\overline{\overline{\overline{f}}}$

sera une double octave, celui de  $F$  à  $\overline{\overline{\overline{\overline{f}}}}$  une triple octave, &c. ainsi pendant que le son  $F$  rend une vibration le son



son  $f$  en rend deux, le son  $\overline{f}$  quatre, le son  $\overline{\overline{f}}$  huit, le son  $\overline{\overline{\overline{f}}}$  seize ; d'où nous voyons que comme une octave répond au rapport de 1 à 2 ; ainsi une double octave répond à celui de 1 à 4 ; une triple octave à celui de 1 à 8 ; & une quadruple à celui de 1 à 16 ; or le rapport de 1 à 4 n'étant plus si simple que celui de 1 à 2, puisqu'il ne s'apperçoit pas si aisément qu'une simple octave, une triple octave est encore moins perceptible, & une quadruple octave encore moins ; ainsi en accordant un clavecin & ayant fixé le son  $F$ , il n'est pas si aisé d'y accorder la double octave  $\overline{\overline{f}}$  que la simple  $f$ , & il est encore plus difficile d'y accorder la triple octave  $\overline{\overline{\overline{f}}}$  & la quadruple  $\overline{\overline{\overline{\overline{f}}}}$  sans y monter par les octaves intermédiaires, ces accords sont aussi compris dans le terme de consonnance, & puisque celle de l'unisson est la plus simple on peut les ranger selon les degrés suivans.

I. Degré, l'unisson qui est indiqué par le rapport de 1 à 1.

II. Degré, octave dans le rapport de 1 à 2.

III. Degré, la double octave dans le rapport de 1 à 4.

IV. Degré, la triple octave dans le rapport de 1 à 8.

V. Degré, la quadruple octave dans le rapport de 1 à 16.

VI. Degré, la quintuple octave dans le rapport de 1 à 32.

Et ainsi de suite en tant que les sons en sont encore sensibles. Ce sont les accords ou consonnances à la connoissance desquelles nous avons été conduits jusqu'ici, & nous ne savons encore rien des autres espèces des consonnances & encore moins des dissonances dont on fait usage dans la Musique. Mais avant de passer à l'explication de celles-ci, je dois ajouter une remarque sur le nom d'octave qu'on donne à l'intervalle de deux sons dont l'un fait deux fois plus de vibrations que l'autre. On en voit la raison dans les touches prin-

cipales du clavecin, qui montent par 7 degrés avant que d'arriver à l'octave, comme C, D, E, F, G, A, H, c; de sorte que la touche c est la huitième en comptant C pour la première; mais cette division dépend d'une certaine espèce de Musique, dont la raison ne sauroit être exposée que dans la suite.

145. ON peut dire que tous les rapports de 1 à 1, de 1 à 4, de 1 à 8, de 1 à 16, que nous avons considérés jusqu'ici & qui renferment la nature d'une octave simple ou double ou triple ou quadruple, tirent leur origine du seul nombre 2; puisque 4 est deux fois 2, 8 deux fois 4, & 16 deux fois 8; ainsi en n'admettant que le nombre 2 dans la Musique on ne parvient qu'à la connoissance des accords ou consonnances, que les Musiciens nomment *octave* simple ou double ou triple &c., & puisque le nombre 2 ne fournit par sa reduplication que les nombres 4, 8, 16, 32, 64, &c. l'un étant toujours double de l'autre, tous les autres nombres nous demeurent encore inconnus. Mais si un instrument ne contenoit que des octaves comme les sons

marqués C, c,  $\overline{c}$ ,  $\overline{\overline{c}}$ ,  $\overline{\overline{\overline{c}}}$ , & que tous les autres en fussent exclus, il ne sauroit produire aucune Musique agréable, à cause de sa trop grande simplicité: introduisons donc outre le nombre 2 encore le nombre 3, & voyons quels accords ou quelles consonnances en résulteront. D'abord la proportion de 1 à 3 nous présente 2 sons dont l'un rend trois fois plus de vibrations que l'autre, en même-tems. Ce rapport est sans doute de plus aisé à comprendre, après celui de 1 à 2, & partant il fournira des consonnances fort belles, mais d'une nature tout-à-fait différente de celle des octaves. Supposons donc que dans le rapport de 1 à 3 le nombre 1 réponde au son C; puisque le nombre c est exprimé par le nombre 2, le nombre 3 nous donne un son plus haut que c, mais pourtant plus bas que le son

$\overline{c}$  qui répond au nombre 4. Le son exprimé par 3 est celui que les Musiciens marquent par la lettre g, & ils nomment l'intervalle de c à g une *quinte*; puisque dans les touches d'un clavecin celle de g est la cinquième depuis c, comme dans la suite c, d, e, f, g; donc si

le nombre 1 donne le son C, le nombre 2 donne c;  
 le nombre 3 donne g, le nombre 4 le son  $\bar{c}$ ; & puis-  
 que le son  $\bar{g}$  est l'octave de g son nombre sera deux  
 fois 3, & partant 6, & montant encore d'une octave,  
 le son  $\bar{\bar{g}}$  sera deux fois plus grand, partant 12. Tous  
 les sons donc auxquels les deux nombres 2 & 3 nous  
 conduisent en indiquant le son C par 1 sont

$$C, c, g, \bar{c}, \bar{g}, \bar{\bar{c}}, \bar{\bar{g}}, \bar{\bar{\bar{c}}}, \bar{\bar{\bar{g}}}, \&c.$$

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, \&c.$$

Delà il est clair que la raison de 1 à 3 exprime un  
 intervalle composé d'une octave & d'une quinte, &  
 que cet intervalle à cause de la simplicité de ses nom-  
 bres, doit être après l'octave le plus sensible à l'oreille;  
 aussi les Musiciens donnent-ils à la quinte le second  
 rang parmi les consonnances, & l'oreille en est si agréa-  
 blement affectée qu'il est fort aisé d'accorder une quin-  
 te; ainsi sur les violons les quatre cordes montent  
 par des quintes la plus basse étant G, la seconde  
 d, &c.; elles sont si sensibles que chaque Musicien  
 les met aisément d'accord par l'oreille seule. Ce-  
 pendant une quinte ne s'accorde pas pas si aisément  
 qu'une octave; mais la quinte au-dessus de l'octave,  
 comme de C à g étant exprimée par le rapport de  
 1 à 3 est plus sensible qu'une simple quinte comme de  
 C à G ou de c à g, laquelle est exprimée par la pro-  
 portion de 2 à 3; & l'on fait aussi par l'expérience  
 qu'ayant fixé le son C, il est plus aisé d'y accorder  
 la quinte supérieure g que la simple G. On pour-  
 roit désigner le son F par 1 & le son  $\bar{c}$  par 3,

en sorte que F, f,  $\bar{c}$ ,  $\bar{f}$ ,  $\bar{\bar{c}}$ ,  $\bar{\bar{f}}$ ,  $\bar{\bar{\bar{c}}}$ ,  $\bar{\bar{\bar{f}}}$  seroient mar-  
 qués par 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12,

où de f à  $\bar{c}$ , l'intervalle est une quinte contenue dans  
 la proportion de 2 à 3, de  $\bar{f}$  à  $\bar{\bar{c}}$ , de  $\bar{\bar{f}}$  à  $\bar{\bar{\bar{c}}}$ , il y a  
 Kk 2

aussi une quinte ; puisque la raison de 4 à 6 & de 8 à 12 , est la même que celle de 2 à 3. Delà nous arrivons à la connoissance d'un autre intervalle contenu dans le rap-

port de 3 à 4 , qui est celui de  $\overline{c}$  à  $\overline{f}$  , & partant aussi celui de  $c$  à  $f$  ou de C à F , que les Musiciens nomment une *quarte* , laquelle étant exprimée par de plus grands nombres , il s'en faut beaucoup qu'elle soit si agréable que la quinte & encore moins que l'octave. Comme le nombre 3 nous a fourni ces nouveaux accords ou consonnances de la quinte & de la quarte , avant que d'employer d'autres nombres prenons le nombre 3 encore

3 fois pour avoir le nombre 9 , qui donne le son  $\overline{\overline{g}}$  , en sorte que  $\overline{\overline{c}}$  ,  $\overline{\overline{f}}$  ,  $\overline{\overline{g}}$  ,  $\overline{\overline{c}}$  seront marqués par 6, 8, 9, 12, & prenant ces sons dans d'autres octaves , les proportions demeurant les mêmes , on aura

$$C, F, G, c, f, g : \overline{c}, \overline{f}, \overline{g}, \overline{\overline{c}}, \overline{\overline{f}}, \overline{\overline{g}}, \overline{\overline{\overline{c}}} \\ 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 32, 36, 48, 64, 72, 96.$$

D'où nous parvenons à la connoissance de nouveaux intervalles , le premier est celui de F à G contenu dans la proportion de 8 à 9 , que les Musiciens nomment une *seconde* & aussi un *ton entier*. Le second est de G à  $\overline{f}$  , contenu dans la proportion de 9 à 16 , qu'on nomme une *septieme* , & qui est d'une seconde ou d'un ton entier plus petit qu'une octave. Ces proportions étant déjà exprimées par des nombres considérablement grands , les intervalles ne sont plus comptés parmi les consonnances , & les Musiciens les nomment *dissonances*.

Si nous prenons le nombre 9 encore trois fois , pour avoir 27 , ce nombre marquera un ton plus haut que  $\overline{c}$  , & précisément d'une quinte plus haut que  $\overline{g}$  ; ce sera donc le ton  $\overline{\overline{d}}$  , & son octave  $\overline{\overline{\overline{d}}}$  répondra au nombre 2 fois 27 ou 54 , & la double octave  $\overline{\overline{\overline{\overline{d}}}}$  au nombre 2 fois 54 ou 108. Représentons ces tons , mais pris dans d'autres octaves , de la manière suivante :

C, D, F, G,  $c$ ,  $d$ ,  $f$ ,  $g$ ,  $\overline{c}$ ,  $\overline{d}$ ,  $\overline{f}$ ,  $\overline{g}$   
 24, 27, 32, 36, 48, 54, 64, 72, 96, 108, 128, 144.  
 $\overline{\overline{c}}$ ,  $\overline{\overline{d}}$ ,  $\overline{\overline{f}}$ ,  $\overline{\overline{g}}$ ,  $\overline{\overline{c}}$ .  
 192, 216, 256, 288, 384.

Où nous découvrons que l'intervalle de D à F est contenu dans le rapport ou proportion (car ici ces mots sont synonymes) de 27 à 32, & celui de F à d dans la proportion de 32 à 54 où en prenant la moitié, de 16 à 27, dont la première est nommée un *tierce mineure*, & l'autre une *sexe majeure*. On pourroit encore tripler le nombre 27, mais la Musique ne passe pas si loin & on se borne au nombre 27, résultant de 3, en le multipliant pour la seconde fois par lui-même, les autres tons de Musique qui nous manquent encore sont introduits par le nombre 5, dont nous allons parler.

146. Les principes de l'harmonie se réduisent à des nombres, comme on vient de le voir, & j'ai remarqué que le nombre 2 ne fournit que des octaves, en sorte qu'ayant par exemple fixé le ton F, nous avons été conduits aux sons  $f$ ,  $\overline{f}$ ,  $\overline{\overline{f}}$ ,  $\overline{\overline{\overline{f}}}$  : ensuite le nombre 3 fournit les tons

C,  $c$ ,  $\overline{c}$ ,  $\overline{\overline{c}}$ ,  $\overline{\overline{\overline{c}}}$ , qui diffèrent de ceux-là d'une quinte; & la répétition de ce même nombre 3, fournit encore les quintes des premières, qui sont G,  $g$ ,  $\overline{g}$ ,  $\overline{\overline{g}}$ ,  $\overline{\overline{\overline{g}}}$ , & enfin la répétition de ce même nombre 3

y ajoute encore les tons D,  $d$ ,  $\overline{d}$ ,  $\overline{\overline{d}}$ . Les principes de l'harmonie étant attachés à la simplicité, ne semblent pas permettre qu'on pousse plus loin la répétition du nombre 3, & partant jusqu'ici nous n'avons que les tons suivans pour chaque octave F, G,  $c$ ,  $d$ ,  $f$ ,

16, 18, 24, 27, 32, qui n'admettent pas certainement une Musique bien variée. Mais introduisons aussi le nombre 5, & voyons quel sera le ton qui rend 5 vibrations pendant que le ton F n'en fait qu'une; or le ton  $f$  en fait en même-tems 2, le ton  $\overline{f}$ , 4 & le ton  $\overline{\overline{f}}$ , 6. Le ton en question est donc

K k 3

entre  $\overline{f}$  &  $\overline{c}$ , & c'est celui que les Musiciens indiquent par la lettre  $\overline{a}$ , dont l'accord avec le ton  $\overline{f}$  est nommé une *tierce majeure*, & se trouve faire une consonnance fort agréable, étant contenu dans la proportion de ces petits nombres 4 & 5; de plus ce ton  $\overline{a}$  avec le ton  $\overline{c}$  fait un accord contenu dans la proportion de 5 à 6, qui est presque aussi agréable que celui-là, & qu'on nomme aussi une *tierce mineure* comme celle dont nous avons déjà parlé, contenue entre les nombres 27 & 32; puisque la différence est presque insensible à l'oreille. Ce nombre 5 étant appliqué aux autres tons G, c, d, nous donnera de la même manière leurs tierces majeures, prises dans la seconde octave au-dessus, c'est-à-dire, les sons  $\overline{h}$   $\overline{e}$  &  $\overline{fs}$ , qui étant transportés dans la première octave, nous aurons maintenant ces tons avec leurs nombres.

F, Fs, G, A, H, c, d, e, f.  
128, 135, 144, 160, 180, 192, 216, 240, 256.

147. OTEZ les tons Fs, & vous aurez les touches principales du clavecin qui, selon les anciens constituent le genre nommé *diatonique*, & qui résulte du nombre 2, du nombre 3, trois fois répété, & du nombre 5. En n'admettant que ces tons, on est en état de composer de très-belles & très-variées mélodies, dont la beauté est fondée uniquement sur la simplicité des nombres qui ont fourni ces tons. Enfin en appliquant pour la seconde fois le nombre 5, il fournira les tierces de quatre nouveaux tons A, &c. que nous venons de trouver; & partant nous aurons les sons Cs, Gs, Ds & Bs, de sorte qu'à présent l'octave est remplie précisément des mêmes qui sont reçus actuellement dans la Musique. Tous ces tons tirent leur origine de ces trois nombres 2, 3 & 5, en répliquant 2 autant de fois que les octaves le demandent; mais pour le 3 on ne le multiplie que 3 fois, & le nombre 5 deux fois seulement. Voilà donc tous les tons de la première octave, exprimés par les nombres suivans où l'on voit la composition par les nombres 2, 3 & 5.

			Diffé- rence.
C	2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 3. . . . .	384	
C <sup>s</sup>	2. 2. 2. 2. 5. 5. . . . .	400	16
D	2. 2. 2. 2. 3. 3. 3. . . . .	432	32
D <sup>s</sup>	2. 3. 3. 3. 5. . . . .	450	18
E	2. 2. 2. 2. 2. 3. 5. . . . .	480	30
F	2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. . . .	512	32
F <sup>s</sup>	2. 2. 3. 3. 3. 5. . . . .	540	28
G	2. 2. 2. 2. 2. 2. 3. 3. . . . .	576	36
G <sup>s</sup>	2. 2. 2. 3. 5. 5. . . . .	600	24
A	2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 5. . . . .	640	40
B	3. 3. 3. 5. 5. . . . .	675	35
H	2. 2. 2. 2. 3. 3. 5. . . . .	720	45
c	2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 3. . .	768	48

Pendant que le son C rend 384 vibrations, le son C<sup>s</sup>, en rend 400 en même-tems, & les autres autant que les nombres y joints marquent ; ainsi le son c rendra en même-tems 768, ce qui est précisément le double du nombre 384 ; & pour les octaves suivantes on n'a qu'à multiplier ces nombres par 2 ou par 4, ou par 8, ainsi le son c rendra 2 fois 768, ou 1536 vibrations, le son

c deux fois 1536 ou 3072 vibrations, & le son c deux fois 3072 ou 6144 vibrations. Pour comprendre la formation des sons par ces trois nombres 2, 3 & 5, il faut remarquer que les points mis entre ces nombres signifient la multiplication ; ainsi pour le son F<sup>s</sup> l'expression 2. 2. 3. 3. 3. 5 signifie 2 fois 2 fois 3 fois 3 fois 3 fois 5. Or 2 fois 2 est 4, & 4 fois 3 est 12, & 12 fois 3 est 36, & 36 fois 3 est 108, & 108 fois 5 est 540. On voit par-là que les différences entre ces tons ne sont pas égales entr'elles, & que d'autres sont plus grandes & d'autres plus petites ; c est aussi ce que la véritable harmonie exige ; mais puisque l'inégalité n'est pas considérable on regarde communément toutes ces différences comme égales, & l'on nomme le saut de chaque ton au suivant un *semi-ton* ; car l'on dit que l'octave est de cet e maniere divisée en 12 semi-tons. Plusieurs Musiciens les font aussi actuellement égaux, quoique cela soit contraire aux principes de l'harmonie ; car de cette

façon , aucune quinte ni aucune tierce n'est juste ; & l'effet en est le même , que si ces tons n'étoient pas bien accordés. Ils conviennent aussi qu'il faut renoncer à la justesse de ces accords , pour obtenir l'avantage de l'égalité de tous les semi-tons , de sorte que la transposition d'un ton à un autre quelconque ne change rien dans les mélodies ; cependant ils avouent eux-mêmes que la piece étant jouée du ton C , ou d'un demi-ton plus haut C $\sharp$  , change considérablement de nature ; d'où il suit clairement que les demi-tons ne sont pas effectivement égaux , quoique les Musiciens s'efforcent de les rendre tels , parce que la véritable harmonie s'oppose à l'exécution de ce dessein qui lui est contraire. Voilà donc la véritable origine des tons qui sont aujourd'hui en usage , & qui sont tirés des nombres 2 , 3 & 5 , si l'on vouloit encore introduire 7 , le nombre de tons d'une octave deviendrait plus grand , & toute la Musique en seroit portée à un plus haut degré.

148. LES Musiciens ont attention de donner plus de durée aux sons plus graves , & moins de durée aux sons aigus ; cependant les sons aigus doivent quelquefois avoir plus de durée & les graves moins de durée , si ceux-ci ont des rapports ou proportions plus simples , tandis que les proportions des autres sont plus compliquées.

Nous allons maintenant considérer cette théorie d'une manière un peu différente.

149. Si une corde de Musique vient à être pincée de manière qu'elle rende un son , une autre corde semblable , également tendue , propre à rendre le même son & située auprès de la première , sera aussi mise en mouvement par l'action de l'air , & rendra un son semblable à celui de la corde pincée. Cette expérience est connue depuis long-tems , en voici une autre fort intéressante : lorsqu'une corde de Musique sur-tout si elle est un peu grosse , est frappée par l'archet outre le ton principal on entend aussi l'octave du même ton , on distingue encore assez facilement la douzième & la dix-septième majeure aiguë , c'est-à-dire , l'octave aiguë de la quinte & la double octave de la tierce majeure. Cela est encore connu depuis long-tems ; mais les Musiciens modernes ont fait une expérience bien plus sub-



tile: si l'on compare deux cordes, dont l'une soit à la douzieme grave de la corde pincée & l'autre à la dix-septieme majeure grave de la même corde, on observe un certain frémissement dans les cordes, mais sans aucun son. La premiere se divise pour ainsi dire en 3 parties égales, & la seconde en 5; de sorte que les parties de ces cordes rendroient l'octave du ton principal, si elles rendoient un son. Tout le monde connoit l'échelle vulgaire des tons *ut, re, mi, fa, sol, la, si, UT* qu'on peut représenter par les nombres  $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, 2$ ; si l'on compare les sons *ut* & *re*, il est visible qu'ils sont entr'eux, comme  $1 : \frac{2}{3} :: 8 : 9$ . Les intervalles entre *ut* & *re*, *re* & *mi* sont égaux entr'eux, & on leur donne le nom de tons; mais les intervalles entre *mi* & *fa*, *fa* & *UT* sont plus petits que les premiers, on les nomme *semi-tons*; mais les autres intervalles comme *ut re*, *re mi*, sont appellés des tons.

L'intervalle composé d'un ton & d'un demi-ton, prend le nom de *tierce mineure*: tels sont les intervalles, *mi sol*, *la ut*, *re fa*; mais l'intervalle composé de deux tons, comme *UT mi*, *fa la*, *sol si*, est appellé *tierce majeure*. En général la tierce majeure d'un ton est exprimée par  $\frac{1}{2}$  de ce ton, de même le ton principal *ut* étant supposé 1, l'octave grave se trouvera en divisant 1 par 2, ou en multipliant le ton 1 par  $\frac{1}{2}$ , la double octave grave en multipliant par  $\frac{1}{4}$ , la triple octave en multipliant par  $\frac{1}{8}$ , & en montant depuis  $\frac{1}{8}$  jusqu'à 1, ou depuis *ut* jusqu'à *UT*, en supposant que *UT* est le ton principal,  $\frac{2}{3}$  fera le ton *re*,  $\frac{4}{3}$  le ton *mi* &c.; de sorte que *la* fera une *tierce mineure grave*, & *fa* la *quinte grave* par rapport au ton *UT* représenté par 1; de même 3 exprimera la douzieme *aiguë* &  $\frac{1}{7}$ , la douzieme *grave*; la dix-septieme majeure *aiguë* sera représentée par 5, & la *grave* par  $\frac{1}{5}$ , de sorte que la douzieme *aiguë* d'un ton est l'octave de la *quinte* du même ton, & la dix-septieme majeure *aiguë* est la double octave de la *tierce majeure* du même ton. L'intervalle composé de trois tons s'appelle *triton* ou *quarte superflue*; si l'intervalle est composé de trois tons & d'un demi-ton, comme *ut sol*, *fa UT*, &c. on l'appelle *quinte*, on lui donne le nom de *sexe mineure*, s'il renferme trois tons & deux demi-tons, de *sexe majeure* lorsqu'il est formé par quatre tons & un

demi-ton, comme *ut la* ; de *septieme mineure* s'il est composé de quatre tons & de deux demi-tons, comme *re UT* ; de *septieme majeure*, s'il est formé par cinq tons & un demi-ton, comme *ut fi* ; enfin il prend le nom d'octave lorsqu'il est composé de cinq tons & de deux demi-tons : tel est l'intervalle *ut UT*. Si l'on suppose que les cordes d'un instrument de Musique rendent les tons dont on vient de parler, & qu'on prenne ensuite un autre instrument dont toutes les cordes rendent l'octave des cordes correspondantes du premier, on aura une nouvelle échelle, dont les tons feront l'octave des tons correspondans de la précédente, & parce que depuis *ut* dans la premiere échelle jusqu'à *re* dans la seconde échelle ascendente il y a neuf tons, l'intervalle entre ces deux sons est appelé *none*, de même l'intervalle entre *ut* de la premiere échelle & *fa* de la seconde est appelé *douzieme* : la double octave prend le nom de *quinzieme* ; la *dix-septieme* est la double octave de la *tierce*, & la *dix-neuvieme* est la double octave de la *quinte*. Si le ton d'une échelle est rendu plus grave d'un demi-ton, il prend le nom de *bémol*, & de *dieze* s'il devient plus aigu du même intervalle.

150. Si l'on appelle *ut* le ton fondamental d'une corde, à cause que cette corde rend la *douzieme* & la *dix-septieme majeure*, on entendra aussi l'octave de *sol*, & la double octave du ton *mi*. Comme les instrumens de Musique donnent naturellement l'octave de *sol* & la double octave de *mi*, il paroît que ces tons & le ton *ut*, forment une consonnance conforme à la nature & plus parfaite : mais parce que les bornes de la voix ne permettent pas facilement de si grands intervalles, on substitue les octaves aux deux tons dont on vient de parler ; & de là naît le chant *ut mi sol*, qu'on peut regarder comme très-conforme à la nature, & parce que *ut mi* est une *tierce majeure*, ce chant prend le nom de *mode majeur*. Dans la seconde partie de l'expérience rapportée ci-dessus, on apperçoit un frémissement sans aucun son dans les cordes dont l'une seroit propre à rendre la *douzieme grave majeure* & l'autre la *dix-septieme grave majeure* de la corde pincée dont le son principal est *ut* ; de-là dérive un autre mode que les Musiciens nomment *mode mineur*. Pour comprendre la raison de cette dénomination, on doit remarquer

que la tierce mineure grave étant *la*, la tierce majeure grave sera la *bémol* ; car la tierce majeure differe de la mineure d'un demi-ton ; mais l'intervalle *UT la* est une tierce mineure ; ainsi l'intervalle *UT la* *bémol* sera une tierce majeure grave : c'est pourquoi la dix-septieme grave majeure sera la double octave de la *bémol* grave : de même la quinte grave étant *fa*, la douzieme grave sera l'octave du ton *fa* grave, & en substituant les tons aux octaves, il résultera de-là un chant conforme à la nature, *fa la* *bémol UT* qui, parce que *fa la* *bémol* est une tierce mineure, a été appelée *mode mineur*.

Le chant *fa la* *bémol UT* est appelé *mode mineur*, parce que *fa la* *bémol* est une tierce mineure, il est regardé comme moins parfait que le *mode majeur* (quoiqu'il flatte l'oreille presque aussi agréablement), parce que dans les cordes dont on a parlé ci-dessus ces tons ne se font pas entendre, quoique les parties qui pourroient les rendre éprouvent un certain frémissement qui paroît indiquer que la nature tend, si l'on peut s'exprimer ainsi, à rendre ces sortes de sons.

Tels sont les principes d'où les Orphées modernes ont déduit les loix de la composition de la Musique. A l'égard des signes dont se servent les Musiciens ils sont entierement arbitraires ; mais je ne prétends pas donner ici un traité complet d'une art dont je n'ai jamais fait mon occupation.

151. C'EST une question aussi importante que curieuse, pourquoi une belle Musique excite en nous le sentiment du plaisir ? pourquoi par exemple la tierce mineure, dans laquelle les vibrations sont dans le rapport de 5 à 6 est si agréable, tandis que les sons dont les vibrations sont dans la proportion de 6 à 7, affectent l'ame d'une maniere si désagréable. Les savans sont bien partagés la-dessus. Il y en a qui prétendent que c'est une pure bisarrierie & que le plaisir que cause la Musique n'est fondé sur aucune raison, que la même Musique peut être goûtée par quelques-uns & déplaire à d'autres ; mais bien loin que la question en soit décidée par-là, elle en devient plutôt plus compliquée ; car on veut savoir la raison pourquoi la même piece de Musique peut produire de si différens effets, puisqu'il faut convenir que rien n'arrive dans le monde sans raison ? D'autres disent que le plaisir que l'on sent en entendant une belle Musique

consiste dans la perception de l'ordre qui y regne. Ce sentiment paroît d'abord assez bien fondé & mérite d'être examiné plus soigneusement. La Musique renferme deux especes d'objets où l'on peut introduire un certain ordre. L'un se rapporte à la différence des tons, en tant qu'ils sont hauts ou bas, aigus ou graves; on doit se souvenir que cette différence est contenue dans le nombre de vibrations, que chaque ton rend en même tems. Cette différence qui se trouve entre la vitesse des vibrations de tous les tons, est ce qui est nommé proprement *l'harmonie*; donc en entendant une Musique, lorsqu'on comprend les rapports ou les proportions que les vibrations de tous les tons tiennent entr'eux, on a la connoissance de l'harmonie; ainsi deux tons qui diffèrent d'une octave excitent le sentiment de la proportion de 1 à 2, une quinte celui de la proportion de 2 à 3, & une tierce majeure celui de la proportion de 4 à 5. On comprend donc l'ordre qui se trouve dans quelqu'harmonie, quand on connoit toutes les proportions qui regnent entre les tons dont l'harmonie est composée; & c'est le jugement des oreilles qui conduit à cette connoissance. Ce jugement étant plus ou moins fin, on comprend pourquoi la même harmonie est apperçue par l'un & point du tout par l'autre, sur-tout quand les rapports entre les tons sont exprimés par des nombres un peu grands.

Mais outre l'harmonie la Musique renferme encore un autre objet susceptible d'ordre, qui est la mesure par laquelle on assigne à chaque ton une certaine durée, & la perception de la mesure consiste dans la connoissance de la durée de tous les tons & des proportions qui en naissent, comme si un ton dure deux fois, trois fois ou quatre fois plus qu'un autre. Le tambour & la timbale nous fournissent une Musique où la seule mesure a lieu, puisque tous les tons sont égaux entr'eux, & là, il n'y a point d'harmonie; comme il y a aussi une Musique où la seule harmonie a lieu, à l'exclusion de la mesure; mais une Musique parfaite contient & l'harmonie & la mesure. Maintenant celui qui entend une Musique, & qui comprend par le jugement de ses oreilles, toutes les proportions sur lesquelles, tant l'harmonie que la mesure est fondée,

a certainement la plus parfaite connoissance de cette Musique qu'il soit possible, pendant qu'un autre qui n'aperçoit ces proportions qu'en partie ou point du tout, n'y comprend rien ou en a une connoissance imparfaite. Mais le plaisir sur lequel roule notre question est encore bien différent de cette connoissance, dont on vient de parler; quoiqu'on puisse soutenir hardiment qu'une Musique produit plus de plaisir quand on en a une certaine connoissance. Car la seule connoissance de toutes les proportions qui regnent dans une Musique, tant à l'égard de l'harmonie que de la mesure, ne suffit pas encore pour exciter le sentiment du plaisir; il faut quelque chose de plus. Pour se convaincre que la seule perception de toutes les proportions d'une Musique n'est pas suffisante, on n'a qu'à considérer une Musique fort simple qui ne marche que par des octaves, où la perception des proportions est certainement la plus aisée; cependant il s'en faut beaucoup que cette Musique cause du plaisir, quoique celui qui l'entend en ait la connoissance. On dit donc que le plaisir demande une connoissance qui ne soit pas trop facile, mais qui exige quelque peine; il faut, pour ainsi dire, que cette connoissance nous coûte quelque chose. Mais à mon avis cela ne suffit pas encore: une dissonance dont la proportion consiste en des plus grands nombres, est plus difficile à être comprise, cependant une suite de dissonances mises sans choix & sans dessein ne plaira pas. Il faut donc que le compositeur ait suivi dans sa composition un certain plan ou dessein, qu'il ait exécuté par des proportions réelles & perceptibles; & alors, lorsqu'un connoisseur entend cette piece, & qu'outre les proportions il en comprend le plan & le dessein même que le compositeur a eu en vue, il sentira cette satisfaction, qui est le plaisir dont une belle Musique frappe les oreilles intelligentes. Ce plaisir vient donc de ce qu'on devine, pour ainsi dire, les vues & les sentimens du compositeur, dont l'exécution en tant qu'on la juge heureuse, remplit l'esprit d'une agréable satisfaction. C'est à peu près une semblable satisfaction qu'on ressent en voyant une belle pantomime, où on peut deviner par les gestes & les actions, les sentimens & les discours qui en sont représentés, & qui exécu-

tent outre cela un beau dessein. Dès qu'on a deviné le sens d'une énigme proposée, & qu'on reconnoit qu'il est parfaitement exprimé dans la proposition de l'énigme, on en ressent un grand plaisir ; au lieu que les énigmes plates & mal digérées n'en causent aucun. Voilà peut-être les vrais principes, sur lesquels sont fondés les jugemens sur la beauté des pieces de Musique. A ces raisons on pourroit ajouter que les concerts agréables produisent dans le fluide nerveux un mouvement doux, & dans les nerfs un ébranlement cadencé, auquel l'Auteur de notre être a attaché un certain sentiment de plaisir ; mais comme ceci ne regarde plus les mathématiques, nous renvoyons ceux de nos lecteurs qui voudront connoître plus particulièrement pourquoi certaines choses plaisent aux uns tandis qu'elles déplaisent aux autres, à ce que nous avons dit sur cette matiere dans notre Métaphysique, dans le chapitre de de la sympathie & de l'antipathie, où ils trouveront peut-être des choses qui leur feront plaisir.

### DE L'OPTIQUE.

152. J'ENTENDS ici par *Optique* la science qui a pour objet les propriétés de la lumière.

Les bornes de cet ouvrage ne permettant pas de la traiter à fonds, je me contenterai de parler de quelques questions intéressantes, pour faire mieux sentir aux commençans les avantages & la fécondité de l'analyse.

Dans le mouvement de la lumière, l'angle de réflexion est toujours égal à celui d'incidence, tandis que celui de réfraction est à celui d'incidence dans un rapport constant (\*). Ces deux vérités fondées sur l'ex-

---

(\*) Si l'on suppose qu'un rayon de lumière  $AM$  aille choquer obliquement le plan  $DMC$  (fig. 107), en décomposant la vitesse  $AM$  en  $AD = PM$  &  $AP = DM$ , il est visible que le choc sera exprimé par  $PM$  : car la vitesse horizontale  $DM = MC$  ne tend qu'à faire glisser le globule de lumière de  $M$  en  $C$ . Le ressort ou la force répulsive rendant après le choc la vitesse perdue  $MP$  ; si l'on compose cette vitesse  $MP$  avec la vitesse horizontale  $MC$ , on verra évidemment que le rayon de lumière doit

périence font, si l'on peut s'expliquer ainsi, le fondement de l'Optique. Si la lumière passe de l'air dans le verre, l'angle de réfraction est à celui d'incidence, comme 2 : 3, si elle passe de l'air dans l'eau comme 3 : 4 environ, &c. Si la lumière passoit de l'air dans l'eau sous un angle d'incidence d'environ  $90^{\circ}$ . (\*) : l'angle de réfraction seroit d'environ  $48^{\circ}. 30'$ . C'est pourquoi si la lumière passe de l'eau dans l'air sous l'angle de  $48^{\circ}. 30'$ , il doit raser la surface de l'eau; mais si l'angle d'incidence étoit plus grand que  $48^{\circ}. 30'$  le sinus de l'angle de réfraction seroit plus grand que le sinus total, ce qui est absurde. Il n'est donc pas possible que dans ce cas le rayon sorte de l'eau; aussi l'expérience apprend qu'alors le rayon est réfléchi de la surface commune de l'air & de l'eau, & qu'il reste dans cette eau.

Supposons un point N (fig. 108, 109 & 110) placé dans l'axe d'un miroir sphérique concave ou convexe MAB, de manière que le rayon incident NM, fasse un angle infiniment petit avec l'axe NC, il sera facile de trouver le point F dans lequel le rayon réfléchi par le point M rencontre l'axe. Menons du centre C le rayon CM qui sera le cathète d'incidence, & l'angle CME (qui fig. 110) est  $\angle NMG$  (son opposé au sommet), sera égal à l'angle de réflexion; MF (fig. 108 & 109) & MG (fig. 110) sera le rayon réfléchi. Puisque les droites CA, CM forment un angle très-petit, on peut supposer  $NA = NM$ . Soit maintenant  $NA = NM = D$  la distance de l'objet au miroir,  $AC = r$ ,  $FM = FA = f$ , nous aurons  $FC = f - r$ , (fig. 109) ou  $r - f$  (fig. 108 & 110),

suivre en se réfléchissant le chemin MB, de manière que l'angle AMD soit  $\angle BMC$ , & l'angle AMP  $\angle PMB$ .

(\*) On doit faire attention que l'angle d'incidence d'un rayon de lumière AM qui tombe sur une surface plane est celui que la direction de ce rayon fait avec la perpendiculaire PM, que j'appellerai le *cathète d'incidence*, & que l'angle de réflexion ou de réfraction est celui que fait le rayon réfléchi ou réfracté avec la même perpendiculaire ou avec son prolongement.

&  $CN = D - r$ , (fig. 108) ou  $= r - D$  (fig. 109), &  $= D + r$  (fig. 110). Cela posé, à cause que l'angle  $FMN$  (fig. 108 & 109) &  $NMG$  (fig. 110) est divisé en deux parties égales par la ligne  $CM$ , l'on aura pour les fig. 108 & 109 (v. Géomét. n°. 52)  $CN : CF :: MN : MF$ , ou  $\pm D \mp r : \pm f \mp r : D : f$ . Donc dans les miroirs concaves l'on

a  $f = \frac{Dr}{2D - r}$ . Mais dans le miroir convexe  $MAB$

(fig. 110),  $CN : MN :: \sin. CMN = \sin. CME = \sin. CMF : \sin. MCN = \sin. MCF$ . Mais le triangle  $PMC$  donne  $\sin. FMC : \sin. MCF :: CF : FM$ . Ainsi  $CN :$

$CF :: MN : MF$ , ou  $D + r : r - f :: D : f = \frac{Dr}{2D + r}$ .

C'est pourquoi la formule générale pour les miroirs

concaves & convexes sera  $f = \frac{Dr}{2D \mp r}$ ; mais cette

formule n'a lieu qu'autant que l'arc  $AM$  est fort petit, aussi bien que l'angle  $CNM$ .

Si le rayon incident  $NM$  (fig. 108) est parallèle à l'axe  $NA$ , c'est-à-dire, si l'objet  $N$  est situé à une distance qu'on puisse regarder comme infinie, l'angle  $NMC$  sera égal à l'angle  $FCM$ , son alterne interne, & le triangle  $CMF$  sera isocèle, & si les rayons qui se rassembleront en  $F$  ou tout près de  $F$  sont en assez grande quantité, ils pourront brûler un objet combustible situé en  $F$ .

Supposons que l'objet  $N$  est infiniment proche du

miroir, on aura  $D = \pm \infty$ , &  $f = \frac{r}{\mp \infty}$ . Dans le mi-

roir concave le signe  $-$  fait voir que l'image de l'objet est placée hors du miroir sur le prolongement de l'axe; au contraire dans le miroir convexe l'image est alors située du côté de la concavité, & cela arrive toujours

dans ce miroir, parce que  $f = \frac{Dr}{2D + r}$  est toujours une

quantité positive. Si l'on suppose  $2D < r$ ,  $2D - r$  sera



sera une quantité négative, &  $f = \frac{D \cdot r}{2D - r}$  sera aussi une quantité négative; c'est pourquoi l'image de l'objet sera derrière le miroir. Si  $D = \frac{r}{2}$ , l'on aura  $f = \infty$ .

C'est pourquoi si l'objet est situé à une distance du miroir concave égale au quart de son diamètre, l'image sera à une distance infinie. Si le miroir est convexe,  $f$  sera =

$\frac{r}{4}$ . Si dans le miroir concave l'on prend  $2D > r$ ,  $f =$

$\frac{D \cdot r}{2D - r}$  sera une quantité positive, & l'image sera située du côté de la concavité. Si  $D = r$ , l'on aura  $f = r$ , c'est-à-dire, si l'objet est situé au centre du miroir son image le confondra avec cet objet. Mais si dans le

miroir convexe on suppose  $D = -r$ , on aura  $f = \frac{r}{3}$ .

Si  $D = \infty$ , l'on a  $f = \frac{r}{2}$  dans le miroir concave; c'est la même chose dans le miroir convexe, en supposant  $D = -\infty$ . On comprend facilement pourquoi si l'œil se trouve placé au centre du miroir concave, la vision est confuse; car alors l'œil se voit de tous côtés sur la surface du miroir.

153. Si un arc de cercle QPO dont le centre est le même que celui du miroir (fig. 111 & 112), est placé devant le miroir BAD, son image opq sera aussi un arc de cercle concentrique, plus grand ou plus petit selon sa distance au centre C. De plus son image sera droite, c'est-à-dire, que la situation de l'image de l'objet sera la même que celle de l'objet, si l'objet & l'image se trouvent du même côté par rapport au centre du miroir; mais l'image sera renversée lorsque le centre sera situé entre elle & l'objet. En effet puisque l'arc OPQ est concentrique au miroir BAD, les droites OB, PA, DQ qui passent par le centre C, & sur lesquelles sont situées les images o, p, q des points O, P, Q sont égales entr'elles; c'est pourquoi D, qui dans la formule générale représente la longueur de ces droites, sera une quantité constante, aussi bien que r; & partant f sera aussi une quantité constante, c'est-à-

dire les droites  $oB$ ,  $pA$ ,  $qD$  sont égales : ce qui ne peut être à moins que les arcs  $opq$ ,  $OPQ$ ,  $BAD$  ne soient concentriques. Il est donc visible que l'image & l'objet étant placés du même côté par rapport au centre (fig. 112), l'image & l'objet auront la même situation, puisque tous les points de l'image sont situés dans le même demi-diamètre qui passe par les points analogues de l'objet : mais si l'image est au-delà du centre relativement à l'objet (fig. 111), à cause que les droites sur lesquelles se trouvent les images de toutes les parties de l'objet, passent nécessairement par le centre du miroir, les lignes qui viennent d'un point situé au-dessus de l'axe qui passe par le milieu de l'objet, vont se rencontrer au-dessous de cet axe, après avoir passé par le centre & réciproquement ; par conséquent si quelqu'une de ces droites qui sont situées au-dessus de l'axe, part de la partie supérieure de l'objet, qui par conséquent est aussi située au-dessus de l'axe, son image sera située au-dessous du même axe, puisqu'elle doit se trouver sur une ligne qui passe par le centre & au-delà du centre. Il n'est pas moins évident que l'image étant concentrique au miroir, doit être d'autant plus petite qu'elle est située plus près de son centre, & au contraire elle fera d'autant plus grande qu'elle sera plus éloignée du centre. Ce qu'on vient de dire fait voir aussi que dans le miroir convexe, l'image d'un objet concentrique au miroir doit être aussi concentrique au même miroir ; car cette image & l'objet sont au-delà du centre du miroir ; & parce que l'image s'approche du centre du miroir d'autant plus qu'on éloigne davantage l'objet : elle devient de plus en plus petite. Dans le miroir concave l'image est droite, & sa grandeur augmente si l'objet va de la surface du miroir au quart du diamètre ; elle décroît ensuite & prend une situation renversée lorsque l'objet s'approche du centre. Enfin elle croît de nouveau & reste renversée si l'objet s'éloigne davantage du centre.

Il n'est pas difficile de comprendre que l'image doit être, d'autant plus petite, tout d'ailleurs étant égal, que le rayon du miroir est plus petit. Au reste, ce que l'on vient de dire ne peut avoir lieu exactement pour les objets d'une figure quelconque, à moins qu'on ne les suppose assez petits pour que leur largeur puisse

être considérée comme un arc concentrique au miroir. En effet, si les objets n'ont pas une figure sphérique concentrique au miroir, leurs images paroissent d'autant plus difformes que leur surface est plus grande & le rayon du miroir plus petit. Si, par exemple, l'on présente une ligne droite à un miroir sphérique dans une situation perpendiculaire à l'axe du miroir, son image sera curviligne; car les points de cette ligne étant inégalement distants du miroir, leurs images seront aussi représentées dans des distances inégales; mais ces inégalités ne sont pas dans un même rapport.

154. LA formule précédente est très-propre à nous faire découvrir les propriétés des miroirs plans; car en suppo-

sant  $r = \infty$ , la formule  $f = \frac{D r}{2 D - r}$  devient  $f = -$

D. de-là il suit que dans les miroirs plans l'image est autant éloignée au-delà du miroir que l'objet l'est en deçà, & il est évident qu'elle est toujours placée dans une situation droite. Puisque dans les miroirs sphériques les images des différents points de l'objet sont situées sur une ligne droite qui passe par le centre & par ces points, & qui est par conséquent perpendiculaire à la surface du miroir; il est visible que dans le miroir plan, les images de tous les points de l'objet sont situées sur une perpendiculaire menée de chacun de ces points à la surface du miroir. Enfin, puisque les perpendiculaires menées des extrémités de l'objet au miroir sont parallèles entr'elles, il est évident que l'image de l'objet doit avoir les mêmes dimensions que cet objet. Dans un miroir plan situé horizontalement, les objets droits paroissent renversés, & au contraire si le miroir est incliné, les objets paroissent inclinés du côté opposé. Si le plan du miroir fait un angle de 45 degrés avec l'horison, les objets situés horizontalement paroissent verticaux, & les objets verticaux paroissent dans une situation horizontale; ce qui vient de ce que toutes les parties de l'objet sont représentées derrière le miroir, & celles qui sont les plus près de la surface antérieure du miroir, sont aussi représentées plus près derrière le miroir, tandis que les parties les plus éloignées sont aussi représentées plus loin derrière le miroir.

155. Soit maintenant un objet O (fig. 113) donné de position, & B A I une surface sphérique réfringente, dont le rayon soit A K & supposons que le sinus de l'angle d'incidence est au sinus de l'angle de réfraction comme  $p$  est à  $q$ , par le point O & le centre K menons la ligne indéfinie O K. Soit O I le rayon incident infiniment proche de l'axe O A, & menons du point K au point I le cathète d'incidence K I; il est visible que la ligne K G perpendiculaire sur le rayon incident O I, fera le sinus de l'angle d'incidence K I G. C'est pourquoi faisant la proportion  $p : q :: K G : x$ , la quantité  $x$  sera le sinus de l'angle de réfraction. Donc si avec le rayon K H =  $x$  on décrit du point K un arc de cercle auquel on mène du point I une tangente I H qui aille rencontrer l'axe A O en P, P I ou son prolongement représentera le rayon réfracté, K I P sera l'angle de réfraction & la ligne K H le sinus de cet angle: & parce que la même construction a lieu pour les autres rayons infiniment proches de l'axe O A, ces rayons seront réfractés de manière qu'ils seront tous dirigés vers le point P, qui sera par conséquent l'image ou le foyer.

Soit maintenant O A = O I = D, le rayon de sphéricité K I =  $\pm r$ , si l'objet est situé du côté de la convexité on fera ce rayon =  $+r$ , A P = I P =  $f$ ; la construction dont nous venons de parler donnera  $p : q ::$

K G : K H, d'où l'on tire  $K G = \frac{p \cdot K H}{q}$ . Mais à

cause de l'angle A O I infiniment petit, l'arc I A peut être regardé comme une ligne droite perpendiculaire à l'axe O A; de sorte que les triangles rectangles O A I, O K G sont sensés semblables aussi bien que les triangles P A I, P K H. Donc on aura les proportions suivantes

O K : O I :: K G : A I =  $\frac{O I \times K G}{O K}$ , & K H : A I :: P K

: P I = P A. Donc en faisant le produit des extrêmes égal à celui des moyens, divisant par K H & substituant la valeur de A I, on trouvera P A =  $\frac{O I \times K G \times P K}{O K \times K H}$ .

Donc en substituant les valeurs algébriques, il viendra

$$f = \frac{D p r}{D p - q(D + r)} = \frac{D p r}{D(p - q) - r q} \text{ pour les sur-}$$

faces convexes ; mais pour les surfaces concaves ,

$$\text{on aura } f = \frac{D p r}{D(q - p) - r q} = \frac{D p r}{q(D - r) - D p}.$$

Si la lumière passe de l'air dans le verre , on pour-  
ra faire  $p = 31$  &  $q = 20$  ; c'est pourquoi dans le pre-

mier cas ,  $f$  sera  $= \frac{31 D r}{11 D - 20 r}$  ; mais dans le second cas ,

il vient  $f = \frac{31 D r}{-11 D - 20 r}$  . Si nous supposons deux

milieux homogènes d'une étendue immense, l'un d'air  
& l'autre de verre , de manière que la surface du verre  
soit sphérique & convexe du côté de l'air & qu'un ob-  
jet lumineux s'éloigne de cette surface dans l'air à  
l'infini en suivant une ligne perpendiculaire à cette  
surface , on pourra facilement déterminer la position de

l'image. En effet si dans la formule  $f = \frac{31 D r}{11 D - 20 r}$

on suppose la valeur de  $D$  plus petite que  $\frac{20 r}{11}$  & plus

grande que zero ,  $f$  sera une quantité négative ; donc  
l'image sera hors du verre : car la valeur positive de  $f$   
désigne la distance de la surface réfringente par rap-  
port à une image située au delà de cette surface par  
rapport à l'objet. Cette image sera toujours droite &  
pourra s'éloigner à l'infini de la surface réfringente. Si

la valeur de  $D$  est entre  $\frac{20 r}{11}$  &  $\infty r$  ,  $f$  sera toujours

une quantité positive , l'image sera située dans le verre  
dans une situation renversée , elle s'approchera en-  
suite de la surface réfringente jusqu'à la distance de

$$\frac{31 r}{11}.$$

11

Si la surface qui sépare les deux milieux tourne sa  
L l 3

concavité à l'air, alors on a  $f = \frac{31 D r}{-11 D - 10 r}$ , & quelle que soit la grandeur de la distance  $D$ ,  $f$  sera une quantité négative, de manière que l'image située hors du verre sera toujours droite : il est facile de voir ce qui doit arriver lorsque  $D$  croît depuis zero jusqu'à  $\infty r$ .

156. DANS l'usage des verres il y a ordinairement deux réfractions, l'une à l'entrée, l'autre à la sortie. Soit  $O$  la position de l'objet (fig. 114) sur l'axe  $OP$  d'un verre convexe des deux côtés, qu'on appelle *lentille*, & soient  $C$  &  $K$  les centres des surfaces sphériques qui forment celle de la lentille, on pourra trouver le point  $F$  dans lequel le rayon  $OI$  infiniment proche de l'axe  $OA$  va rencontrer cet axe après deux réfractions. Soit  $OA = D$ ,  $CB = R$ ,  $KA = r$ ,  $FB = x$ ,  $PB = z$ ,  $P$  étant le point dans lequel le rayon incident  $OI$  iroit rencontrer l'axe après la première réfraction. Soit  $AB = e$  l'épaisseur de la lentille,  $CD = m$ ,  $KG = n$ ,  $p$  le sinus d'incidence &  $q$  le sinus de l'angle de réfraction dans l'entrée ; il est visible que nous aurons la proportion

$$p : q :: KG = n : KH = \frac{n q}{p} ; \text{ on aura de même } q : p ::$$

$$CD = m : CE = \frac{m p}{q} . \text{ D'ailleurs à cause des triangles rectangles semblables } OAI, OKG, \text{ on aura } OG = OK : OA :: GK : AI, \text{ c'est-à-dire } D + r : D :: n : AI = \frac{D n}{D + r} . \text{ De même à cause des triangles semblables } PAI, PKH, \text{ on trouvera } PA = z + e : PH = z + e - r :: AI = \frac{D n}{D + r} : KH = \frac{n q}{p} . \text{ Donc en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, nous aurons un équation d'où l'on tirera } z = \frac{D e q + e q r + D p r - D e p}{D p - D q - q r} .$$

D'un autre côté les triangles semblables  $PCD, PBT$  donnent  $PD = z + R : PB = z :: CD = m : BT =$

$\frac{m\zeta}{\zeta+R}$ . Enfin à cause des triangles semblables FCE, FBT, on aura la proportion  $FC=x+R:FB=x::CE=\frac{p^m}{q}:BT=\frac{m\zeta}{\zeta+R}$ , d'où l'on tire  $\zeta =$

$\frac{pRx}{qx+qR-px}$ . Substituant dans cette équation la valeur de  $\zeta$  trouvée ci-dessus, il viendra, toute réduction faite  $x = (DpqRr + Deq^2R - DepqR + eq^2rR) : (Dp^2R - DpqR - pqrR - Dep^2 - Dpqr + 2Depq - Dep^2 + Dp^2r - eq^2r + epqr) (*)$ .

Si l'on suppose  $p=31$  &  $q=20$ , la formule précédente devient  $x =$

$\frac{620DrR - 220DeR + 400erR}{341DR + 341Dr - 620rR - 121De + 220er}$  : & si on suppose  $e=0$ , c'est-à-dire si on néglige l'épaisseur du verre, il viendra  $x = \frac{20DrR}{11DR + 11Dr - 20rR}$  :

enfin si on suppose  $r=R$ , on aura  $x = \frac{10Dr}{11D - 10r}$ .

Si la lentille de verre est supposée également convexe des deux côtés & qu'un objet lumineux assez petit situé d'abord en A, s'éloigne à l'infini en suivant la direction de l'axe AO, il est évident par la formule  $x =$

$\frac{10Dr}{11D - 10r}$ , que D étant supposée  $=0$ , l'image de l'objet sera droite & se confondra avec cet objet, elle s'éloignera du verre à l'infini en allant du même côté que l'objet, ce qui arrivera lorsqu'on aura  $D = \frac{10r}{11}$ .

Dans les autres valeurs de D, depuis  $D = \frac{10r}{11}$

(\*) Les deux points indiquent une division.

jusqu'à  $D = \infty r$ , la valeur de  $x$  est positive & décroissante, l'image sera renversée & située du côté opposé à l'objet, elle reviendra de l'infini jusqu'à une distance du verre  $= \frac{10r}{11}$ , & les rayons qui la formeront sortiront du verre d'abord parallèles, puis convergents de plus en plus.

Si la lentille est *plano-convexe*, on pourra supposer  $R = \infty$ , & alors on trouve  $x = \frac{20DrR}{11DR + 11Dr - 20rR}$   
 $= \frac{20Dr}{11D - 20r}$ .

Si la lentille est également concave des deux côtés, on doit changer le signe du rayon  $r$  pour avoir  $x = \frac{20Dr}{11D + 10r}$ . Mais si la lentille est *plano-concave*, il

viendra  $x = \frac{-20Dr}{11D + 20r}$ . Enfin si la lentille est con-

vexe d'un côté & concave de l'autre on pourra supposer un des rayons négatifs, de sorte qu'en donnant le signe  $-$  à  $R$  & négligeant l'épaisseur de la lentille, on

trouvera  $x = \frac{20DrR}{11DR - 11Dr - 20rR}$ .

157. ON peut supposer dans la pratique qu'un objet est infiniment éloigné à l'égard d'une lentille, lorsque sa distance est 1000 fois plus grande que le rayon de sphéricité. Ainsi si dans la formule  $x = \frac{10Dr}{11D - 10r}$ , on

suppose  $r = 10$  pouces &  $D = 10000$ , on trouvera  $x = 9.102$  pouces; mais en faisant  $D = \infty$ , il vient  $x = 9.091$  pouces de manière qu'il ne s'en faut que d'un centième de pouce environ que l'image ne soit au même point, soit qu'on suppose l'objet à une distance mille fois plus grande que ne l'est le rayon de sphéricité, ou qu'on suppose l'objet à une distance infinie.

158. Le *Télescope astronomique* est composé d'une lentille PQ de laquelle l'œil doit être très-proche, & qu'on



nomme *oculaire* (fig. 115) ; cette lentille est convexe de deux côtés ou seulement d'un seul côté. Elle est située de manière que son foyer  $o$  concourt avec celui du verre  $MN$ , qu'on nomme *objectif* ; mais ce foyer commun doit se trouver entre les deux verres. Cette construction fait voir que les rayons qui viennent d'un point  $O$  d'un objet  $OB$  très-éloigné, après avoir été réfractés à travers le verre objectif, se rassemblent au foyer  $o$  où ils peignent l'image du point  $O$ . Mais les rayons qui viennent d'un objet  $OB$  fort éloigné doivent être considérés comme parallèles, & d'ailleurs on considère aussi le point  $O$  comme placé dans la ligne droite qui passe par le centre des verres, qu'on appelle à cause de cela *axe* du télescope. Maintenant nous pouvons supposer que l'image du point  $O$  est un objet situé au foyer de l'oculaire  $PQ$  ; c'est pourquoi les rayons qui représentent cet objet doivent sortir parallèles de l'oculaire, & ces rayons sont d'autant plus denses que le foyer de l'oculaire est plus court que celui de l'objectif. Ainsi ces rayons doivent peindre au fond de l'œil une image d'autant plus vive que la surface de l'objectif sera plus grande ; puisque le nombre des rayons admis est proportionnel à cette surface. Il est encore évident que dans chaque distance de l'oculaire, pourvu néanmoins que l'œil se trouve dans la direction des rayons parallèles ou à peu-près parallèles qui sortent de l'oculaire, l'image du point qu'un faisceau a formée au foyer de l'objectif, sera également claire. D'un autre côté les rayons qui partent du point  $B$  doivent former l'image de ce point en  $b$  auprès du foyer  $o$ , pour sortir ensuite parallèles de l'oculaire ; mais cependant d'autant plus inclinés à l'axe que la courbure de cet oculaire est plus grande. Pour que l'œil puisse voir toute l'image  $ob$ , il doit être placé au foyer  $F$  qui est le concours de tous les faisceaux que forment les rayons qui partent de tous les points de l'objet  $OB$ , qui paroît renversé, parce que son image  $ob$  a une situation opposée à celle de cet objet ; c'est pourquoi le *champ* du télescope, c'est-à-dire, l'espace que l'œil convenablement situé en  $F$  peut voir, dépend surtout de la grandeur de l'image  $ob$  ; puisque l'œil peut voir tous les points dont l'image se trouve dans le foyer ou

très-près du foyer de l'oculaire. D'un autre côté si l'objet s'approche de l'objectif, son image s'en éloignera ; de sorte qu'il faudra augmenter la distance de l'oculaire afin que l'image se trouve toujours placée à son foyer. C'est pourquoi la distance de l'objectif & de l'oculaire doit changer lorsque la distance de l'objet change. De même si celui qui fait usage d'un télescope est myope, c'est-à-dire a la vue courte & l'œil trop convexe, il est nécessaire de diminuer la distance qu'il y a entre l'oculaire & l'objectif, de manière que l'image  $ob$  de l'objet se trouvant entre l'oculaire & son foyer, les rayons qui tombent sur la lentille oculaire en sortent un peu divergens ; car la figure de l'œil myope les fera assez converger & réunira les rayons de chaque point de l'image sur un point situé au fond de l'œil, où se trouve la rétine qui n'est qu'une expansion du nerf optique.

Nous avons dit que les objets paroissent renversés dans les télescopes astronomiques ; mais en ajoutant deux autres lentilles, qu'on nomme aussi *oculaires*, l'objet paroît droit, & l'on a une lunette d'approche propre à faire appercevoir les objets terrestres (fig. 116.). Les quatre lentilles ont un axe commun & le foyer de chacune concourt ordinairement avec ceux des autres entre lesquelles elle se trouve.

159. LA force des *microscopes* dépend des mêmes principes. Soit  $MN$  (fig. 117) une lentille convexe de deux côtés, placée de manière que son foyer se confonde avec le point  $O$  de l'objet  $OB$  ; les rayons qui partent de ce point & qui traversent la lentille  $MN$  en sortent parallèles, & forment au fond d'un bon œil une image vive. Le point  $B$  du même objet est assez proche de l'axe pour qu'on puisse le regarder comme situé au foyer ; de sorte qu'il envoie des rayons qui entrent dans l'œil sensiblement parallèles, mais d'autant plus inclinés à l'axe que la distance du foyer est plus petite ; C'est pourquoi si l'œil est placé au point  $o$  de l'axe par lequel passe le rayon principal  $BC$  (c'est celui qui passe par le centre de la lentille), l'objet  $OB$  sera vu distinctement sous l'angle  $BoO$ . Supposons maintenant que les objets ne sont vus d'une manière claire s'ils ne sont éloignés de l'œil d'environ 7 à 8 pouces, & que  $ob$  représente cette distance, on jugera que cet objet

est placé en  $cb$ , & la grandeur apparente sera augmentée dans le rapport de  $oc : oO$  (\*). C'est pourquoi la grandeur apparente des objets qu'on considère à travers une lentille dépend aussi de la conformation de l'œil. On fait aussi des microscopes avec de très-petits globes de verre : en effet si dans la formule générale dont on a parlé ci-dessus on fait  $p = 3$  &  $q = 2$ , ce qui a lieu à peu-près dans le passage de l'air dans le verre, on trouvera en faisant encore l'épaisseur  $e$  du verre  $= 2r$ , on trouvera dis-je  $x = \frac{r}{2}$ ; c'est-à-dire si un objet est placé dans l'axe d'une petite sphère de verre à la distance d'un quart de son diamètre, les rayons de lumière après avoir traversé la sphère en sortiront parallèles; c'est pourquoi non-seulement on appercevra cet objet clairement, mais on le verra d'autant plus grand qu'il sera plus près de l'œil.

Il y a d'autres microscopes composés de deux lentilles convexes (fig. 118) dont la lentille objective  $MN$  a un foyer plus court. Un peu au-delà de cette lentille on place l'objet  $OB$ , afin que son image soit éloignée & grossie à proportion : on fait ensuite tomber le foyer de l'oculaire sur cette image afin qu'on puisse voir l'objet distinctement. Cette construction fait voir que la distance de l'image de l'objet par rapport à l'objectif varie beaucoup par un petit déplacement de l'objet. Enfin la grandeur apparente de l'objet change à proportion que l'image  $ob$  s'approche de l'objectif & qu'elle diminue. Par les principes, ci-dessus on peut estimer l'augmentation apparente des objets vus à travers un télescope ou un microscope. L'extrémité  $B$  d'un objet (fig. 115) est vue par un faisceau  $FP$  de rayons parallèles, & l'extrémité  $O$  par le faisceau  $KF$ ; ainsi le télescope fait voir l'objet sous l'angle  $PFK$ ; & parcé que l'image  $ob$  est située au foyer de l'oculaire  $PQ$ , les rayons qui partent du point  $b$  doivent sortir de l'ocu-

(\*) Lorsque rien ne s'oppose au jugement que nous portons sur la grandeur d'un objet éloigné, nous l'estimons par l'angle optique, c'est-à-dire, par l'angle que font deux rayons visuels menés de l'œil aux extrémités de l'objet.

laire parallèles au rayon principal  $bK$  ; ainsi l'angle  $PFK = bKo$ , & parce que le rayon  $BD$  ne souffre aucune réfraction, un œil situé en  $D$  verroit sans télescope, l'objet  $OB$  sous l'angle  $BDO = bDo$ . C'est pourquoi l'angle sous lequel on voit un objet par le moyen du télescope, est à celui sous lequel on le verroit sans télescope comme l'angle  $bKo : bDo$ . Mais en prenant  $bo$  pour rayon,  $oK$  sera la cotangente de l'angle  $bKo$ , &  $oD$  la cotangente de l'angle  $bDo$  ; donc les cotangentes des angles  $bKo$ ,  $bDo$  sont entr'elles comme  $oK : oD$ , & leurs tangentes sont comme  $oD : oK$ . Et parce que les grandeurs apparentes des objets, sur-tout éloignés, dépendent principalement des angles sous lesquels on voit leurs demi-diamètres, le demi-diamètre d'un objet vu à travers un télescope est au demi-diamètre du même objet vu sans télescope, comme la longueur du foyer de l'objectif est à celui de l'oculaire ; de sorte que les grandeurs apparentes des objets, sont en raison directe des longueurs des foyers des objectifs, & en raison inverse de celles des oculaires.

Il est évident encore que s'il s'agit d'un objet fort éloigné vu sous un petit angle, d'un degré par exemple, ou moindre, les distances de cet objet par rapport à l'œil du spectateur, sont en raison inverse des sinus des angles sous lesquels on les voit, ou en raison inverse des angles optiques ; car les petits angles sont proportionnels à leurs sinus, aussi-bien qu'à leurs tangentes.

160. SUPPOSONS que l'ouverture de l'objectif restant la même, on employe successivement plusieurs lentilles oculaires, le même objet paroîtra d'autant plus obscur que le foyer de l'oculaire sera plus court. La raison en est évidente ; car les faisceaux de rayons parallèles de quelle couleur qu'ils soient, qui se coupent dans l'œil, forment une espèce de cône dont la base est sur l'oculaire & le sommet dans l'œil (\*) ;

(\*) Supposons qu'ayant fait un trou de la grosseur d'une plume à écrire au volet d'une fenêtre, on introduise dans une chambre obscure un rayon de soleil, si l'on intercepte ce rayon, en lui présentant une des faces  $QR$  d'un prisme triangulaire de verre (fig. 139), tellement que son axe soit perpendiculaire à celui de ce faisceau,

or cet angle est d'autant plus grand que le foyer de l'oculaire est plus court ; c'est pourquoi les rayons entrent dans l'œil plus ou moins dispersés & peignent l'image de l'objet au fond de l'œil d'une manière moins régulière lorsque cet angle est trop grand. D'un autre côté l'ouverture de l'objectif restant la même, l'obscurité est d'autant plus grande que la densité de la lumière est moindre ; de sorte que l'obscurité suivra la raison de son aire , c'est-à-dire que l'obscurité sera comme les quarrés des diamètres apparens, ou en raison des quarrés des longueurs des foyers des oculaires : puisque les demi-diamètres apparens suivent la raison inverse des longueurs des foyers des oculaires lorsque l'objectif ne varie pas. Avec un peu d'attention il est

alors l'image blanche D ( qu'on verroit sans l'interposition du prisme ) se change en une figure lumineuse FC placée plus haut sur la muraille blanche LK , oblongue , arrondie par les deux bouts , & composée de sept couleurs , *rouge , orangé , jaune , verd , bleu , pourpre , violet*. Cette expérience fait voir que la couleur blanche qui se peignoit en D avant l'interposition du prisme est un assemblage ou mélange des sept couleurs dont nous venons de parler. Le rayon rouge désigné par *r* est celui qui s'écarte le moins de sa direction primitive ; l'orangé désigné par *o* s'écarte un peu plus ; le jaune désigné par *j* s'écarte encore plus , & ainsi de suite jusqu'au violet ( indiqué par *v* ) qui est le plus réfrangible. Ce sont les gouttes de pluie , qui en tombant d'un nuage exposé au soleil , produisent en séparant les rayons de la lumière , les belles couleurs de l'arc en ciel. Les corps qui absorbent certains rayons , qui ne réfléchissent ou qui ne transmettent qu'une espèce de rayons , comme les rouges , par exemple , doivent paroître rouges ; tandis que ceux qui absorbent tous ou presque tous les rayons , excepté les bleus , paroissent bleus , &c. Cependant les rayons de la même couleur ont des nuances & ne sont pas également réfrangibles. Mais si l'on sépare le rayon rouge , par exemple , pour le faire passer par un second prisme , il demeurera de la même couleur , ce qui prouve que cette couleur lui est naturelle , & qu'elle ne vient pas du prisme.

aisé de comprendre que les rayons parallèles  $Mm$  (fig. 120) qui traversent une lentille  $NP$  ne vont pas tous se réunir au même point  $F$  ; mais qu'il y en a plusieurs qui vont rencontrer l'axe en  $r$  ; de manière que le foyer a une petite longueur  $vr$ . Ainsi l'image de chaque point de l'objet  $OB$  se peint sur chaque point de la ligne  $vr$ , ce qui rend la vision un peu confuse. On remédie à cet inconvénient, en diminuant l'ouverture de l'objectif par le moyen d'un *diaphragme*, c'est-à-dire d'une surface plane, noire & opaque, percée d'un trou rond : car le diaphragme absorbe les rayons superflus & ne laisse passer que ceux qui peuvent former un foyer assez petit pour que la vision n'en soit pas troublée. On a soin de peindre en noir la surface interne du télescope afin d'absorber les rayons qui étant entrés avec trop d'obliquité, pourroient être réfléchis vers l'oculaire par la surface du télescope. Il y a encore une autre cause d'imperfection, je veux parler de la différente réfrangibilité des rayons (\*) ; car la lumière est composée de sept rayons rouge, orangé, jaune, verd, bleu, pourpre, violet. Mais ces couleurs ont des nuances, c'est-

(\*) La figure 121 fait voir que l'image d'un objet  $SQ$  peinte au fond de l'œil, occupe un espace  $qrs$ , d'autant plus grand que l'angle optique ou son opposé au sommet  $qps$  est plus grand : or c'est principalement par cet angle qu'on estime la grandeur des objets un peu éloignés. La vision sera confuse si l'image de l'objet se peint au fond de l'œil d'une manière irrégulière, ce qui arrive lorsque l'angle optique est trop grand, parce que les rayons qui partent des différens points de l'objet ne peuvent pas par les réfractions qu'ils souffrent en traversant les humeurs de l'œil, allet se réunir justement sur la *rétine*, qui tapisse le fond de l'œil, & peindre convenablement les points, mais ils se réunissent en-deçà, ou bien leur point de réunion est au delà de la surface de cette rétine, que je suppose être l'organe de la vue, quoiqu'il y ait des Physiciens très habiles qui donnent cette fonction à la *choroïde* qui est une membrane noire recouverte en partie par la rétine ; mais ceci regarde la Physique.

à-dire que tous les rayons rouges ne se réfractent pas également, de manière que le sinus de réfraction étant exprimé par 1, dans le passage de l'air dans le verre, celui d'incidence des rayons rouges varie depuis 1.54 jusqu'à 1.5425; celui des rayons orangés depuis 1.5425 jusqu'à 1.544; celui des rayons jaunes depuis 1.544 jusqu'à 1.54667; celui des verts depuis 1.54667 jusqu'à 1.55; celui des bleus depuis 1.55 jusqu'à 1.55333; celui des pourpres depuis 1.55333 jusqu'à 1.55555; & enfin celui des violets depuis 1.55555 jusqu'à 1.56. Si dans la formule ci-dessus, on suppose  $e=0$ ,  $r=R$  &

$D=\infty$ , on aura  $x = \frac{qr}{2p-2q}$ , si l'on fait  $q=1$ ,

& successivement  $p=1.54$  pour les rayons rouges, puis

$p=1.56$  pour les violets, on aura  $x = \frac{qr}{2p-2q} =$

0.9259  $r$ , pour les rayons rouges &  $x=0.8928 r$  pour les violets. La différence 331 entre les co-efficiens de  $r$ , est la vingt-huitième partie du plus grand; donc lorsque l'objet est à une grande distance, la longueur du spectre coloré formé par la différente réfrangibilité de la lumière est le  $\frac{1}{28}$  de la longueur du foyer de la lentille; & parce que la lumière est la plus dense, & la moins séparée qu'il est possible vers le milieu F du foyer, on peut supposer que l'image des objets blancs tels que sont les autres, est située en F, & que dans un télescope les limites de la vision confuse occasionnée par la différente réfrangibilité des rayons sont de part & d'autre du vrai lieu de l'image de l'objet éloignées à  $\frac{1}{28}$  environ de la longueur du foyer de l'objectif. Mais à cause des triangles semblables  $\triangle C D$ ,  $\triangle P N$ , on a  $C D : D \nu :: P N : \nu N$ ; donc  $D C = \frac{1}{28} . P N$ ; c'est à dire le diamètre  $C N$  des franges colorées qui entourent l'image F d'un point fort éloigné, est  $\frac{1}{28}$  de celui de l'ouverture de l'objectif. Ces franges, ou iris, ou nébulosités rendent confuses les images des objets, & c'est pour diminuer cette confusion qu'on diminue les ouvertures des objectifs (\*); mais comme par ce moyen on perd

(\*) L'Ingénieur Dollond ayant pris du verre blanc

de la lumière, & par conséquent de la clarté dans l'image, il faut régler les ouvertures des objectifs, de sorte qu'il y entre suffisamment de lumière, que les images soient nettes, sans iris sensibles, ce qu'on peut déterminer par expérience, selon la bonté des verres dont

d'Angleterre dont on se sert pour les télescopes ordinaires, il en fit un objectif MN (fig. 122) plan concave, le foyer de cet objectif pour un télescope de trois pieds est de 12. 6 pouces. La concavité qui étoit tournée du côté de l'oculaire recevoit la convexité antérieure d'une lentille convexe de deux côtés faite d'un verre dont la force réfrangible étoit différente (le *flintglass* est un verre qu'on fait en Angleterre, qu'on a voulu imiter en France à cause de son utilité pour la construction des télescopes, mais dont on n'a pu encore trouver la véritable composition : dans ce verre le rapport moyen du sinus d'incidence au sinus de réfraction est celui de 1. 598 : 1, mais dans le verre Anglois ordinaire *crownglass*, ce rapport est égal à celui de 1.54 : 1), & dont le foyer étoit de 8. 9 pouces ; ainsi l'objectif de cette lunette est composé de deux verres qui ont des réfractions différentes ; de manière que l'une des réfractions corrige l'autre, comme cela arrive dans les humeurs de l'œil, & les couleurs ne se séparent pas. Or quoique la lumière qui traverse cet objectif ne se décompose pas en différentes couleurs, il s'en fait cependant une petite séparation lorsqu'elle traverse les oculaires, mais les iris ne sont sensibles que vers les bords des lentilles & non vers le milieu. Quelquefois les rayons rouges, d'autres fois les jaunes ou les bleus se font remarquer dans ces sortes de télescopes ; néanmoins on observe les objets d'une manière très-distincte, on les voit sous un grand champ ; car dans ces sortes d'instrumens, le rayon de l'oculaire peut être plus court & l'ouverture de l'objectif plus grande que dans les télescopes ordinaires, à cause que les couleurs ne se séparent pas dans l'objectif, & l'œil n'est point fatigué par une longue observation. Ces sortes de télescopes dont les objectifs sont composés de différens verres, de manière que la lumière qui les traverse ne se décompose pas en couleurs, sont connus sous le nom de *lunettes achromatiques*.

on



on se sert. On peut même placer le foyer F entre les foyers des rayons jaunes & orangés, point qu'on trouve en faisant dans la formule des foyers des verres,  $p = 31$  &  $q = 20$ . La raison en est que les rayons pourpres, violets, & même les rayons bleus, & les rayons rouges situés vers  $r$  sont assez foibles à moins que la lumière ne soit très-vive, de sorte qu'au lieu d'un  $\frac{1}{17}$  P N on peut substituer une quantité plus petite, peut-être même  $\frac{1}{15}$  P N.

161. A l'égard de la proportion qu'il doit y avoir entre la longueur du foyer de l'objectif & celle de l'oculaire, elle varie beaucoup selon les circonstances de la perfection des verres & la lumière de l'objet. Nous ajouterons seulement ici les dimensions que nos meilleurs Ouvriers donnent aux lunettes ordinaires.

*Pour une Lunette à quatre verres.*

Longueur du foyer des objectifs.	Diamètre de l'ouverture des objectifs.	Longueur du foyer des oculaires.	Diamètre du diaphragme au foyer de l'objectif.	Augmentation des diamètres apparents des objets.
1 pied.	4 lign. $\frac{1}{2}$	16 lign.	4 lign.	9 fois.
2	6 $\frac{1}{2}$	22	5 $\frac{1}{2}$	13
3	9	26	7 $\frac{1}{4}$	17
4	11	28	9	21
5	12	30	10	24
6	13	31	10 $\frac{1}{2}$	28
7	14	34	11	30
8	15	36	11 $\frac{1}{2}$	32

Cette table suppose que les objectifs sont bons, sans être des plus excellens; car ceux-ci pourroient supporter des oculaires d'un foyer plus court, & des ouvertures plus grandes à l'objectif aussi-bien qu'au diaphragme du foyer.

*Pour les Lunettes Astronomiques.*

Longueur du foyer des ob- jectifs.	Diamètre de l'ouverture des objectifs.		Longueur du foyer de l'ocu- laire.		Augmenta- tion des dia- mètres appa- rens des ob- jets.
pieds.	pouces.	lignes.	pouces.	lignes.	environ
1	0	6 $\frac{1}{2}$	0	8	20 fois
2	0	9	0	10	28
3	0	11 $\frac{1}{2}$	1	0 $\frac{1}{2}$	34
4	1	1	1	2 $\frac{1}{2}$	40
5	1	2 $\frac{1}{2}$	1	4	44
6	1	4	1	6	49
7	1	5 $\frac{1}{2}$	1	7 $\frac{1}{2}$	53
8	1	6 $\frac{1}{2}$	1	8 $\frac{1}{2}$	56
9	1	8	1	9 $\frac{1}{2}$	60
10	1	9	1	11	63
11	1	10	2	0	66
12	1	11	2	2	69
14	2	0 $\frac{1}{2}$	2	3	75
16	2	2	2	5	79
18	2	4	2	7	85
20	2	5 $\frac{1}{2}$	2	8 $\frac{1}{2}$	89
25	2	8	3	0	100
30	3	0	3	3 $\frac{1}{2}$	109
35	3	3	3	7	118
40	3	6	3	10	126
45	3	8	4	0 $\frac{1}{2}$	133
50	3	10	4	3	141

Lorsque les objectifs sont excellens, on peut leur donner des ouvertures plus grandes, & des oculaires d'un foyer plus court. C'est ainsi qu'un objectif excellent de 34 pieds, travaillé par Campani, porte aisément un oculaire de deux pouces & demi de foyer, & une ouverture de quatre pouces de diamètre : alors il amplifie 163 fois les diamètres apparens des objets célestes qui conservent une clarté suffisante.

S'il est question d'un microscope à trois verres, l'oculaire doit être d'un pouce de foyer, & d'environ 9 lignes de diamètre ; le verre du milieu placé à huit lignes de dis-

tance de l'oculaire, doit avoir 18 lignes de foyer, & un pouce de diamètre. On y peut ajuster différentes lentilles objectives de rechange, par exemple, de 6, de 4, de 2, de 1 lignes de foyer; cependant les ouvertures de ces lentilles doivent être très-petites & assujetties à la bonté des verres. Leur distance à l'oculaire peut être d'environ six pouces (\*).

(\*) La première espèce de télescope, qu'on appelle *Lunette de Hollande*, ou *Lunette de Gallilée* (c'est celle qui a été inventée la première, vers l'an 1609, & qui a été seule en usage pendant près de quarante ans) a pour oculaire un verre concave ou plan-concave PQ (fig. 123), placé entre l'objectif MN & son foyer o, de manière que les axes des deux verres concourent en une même droite Ao, & leurs foyers en un même point o.

Par cette construction il est visible 1°. que parce que la surface de l'objectif peut être beaucoup plus grande que l'ouverture de la prunelle, il peut tomber sur l'objectif une quantité de rayons partis d'un même point d'un objet, beaucoup plus grande que celle qui pourroit entrer dans l'œil. 2°. Que l'objet étant comme infiniment éloigné, les rayons incidens & parallèles (représentés ici par AD, & par ses parallèles), qui par la réfraction faite en traversant l'objectif MN, convergeroient au point o, redeviennent parallèles après avoir traversé l'oculaire; mais que comme l'oculaire a été placé vers la pointe o, du cône des rayons réunis par l'objectif, & que les rayons sont fort denses vers cette pointe, ces mêmes rayons sont fort denses en sortant de l'oculaire. 3°. Que par conséquent, si au sortir de l'oculaire, ils sont reçus dans un œil d'une vue excellente, ou dans un œil presbyte, ils doivent y former une image du point de l'objet d'où ils sont partis, laquelle est d'autant plus vive, que le faisceau des rayons sortans de l'oculaire est plus dense qu'il n'étoit en rencontrant l'objectif, & que l'ouverture de l'objectif est plus grande que celle de la prunelle.

Pour ce qui regarde les points B de l'objet OB, qui sont situés hors de l'axe Ao du télescope, il est clair qu'ils envoient des rayons parallèles, (représentés ici par CD, Mm 2

*De l'intensité de la lumière qui traverse des milieux diaphanes.*

162. Supposons qu'on ait un flambeau & une chandelle, qu'on regarde le flambeau à travers un milieu dia-

& par ses parallèles) que l'objectif tend à réunir au point  $b$ , proche du point  $o$ , & qui rencontrant l'oculaire  $PQ$ , en sortent sensiblement parallèles & très-denses; de manière qu'un œil presbyte ou un œil d'une vue excellente, en doit recevoir une image très-vive du point  $B$ : mais parce qu'au sortir de l'oculaire, le faisceau qui forme cette image, diverge du faisceau qui forme celle du point  $o$ , un même œil ne peut recevoir en même tems ces deux images, à moins que la prunelle ne soit assez ouverte & assez proche du concours  $F$  des directions de ces deux faisceaux; d'où il suit qu'en regardant un objet par le moyen de ce télescope, on voit un nombre de ses parties, d'autant plus grand, que l'œil est plus proche de l'oculaire, & que l'ouverture de la prunelle est plus grande. Et parce que l'ouverture de la prunelle est naturellement fort petite, & qu'elle se rétrécit involontairement à proportion de la lumière qui y entre, il est clair que le champ de ces sortes de télescopes est d'autant plus petit que l'objet est plus lumineux, & que l'oculaire est d'un plus grand foyer. Enfin parce que la nature de la lumière ne permet pas de mettre des oculaires d'un aussi petit foyer qu'on veut, qu'au contraire les foyers des oculaires doivent être plus longs, à proportion de la longueur des foyers des objectifs, il suit que le champ de ces sortes de télescopes est d'autant plus petit que le télescope est plus long. C'est cet inconvénient qui en a aboli l'usage pour les objets fort éloignés, & qui par conséquent demandent de longues lunettes: on n'en fait plus gueres de cette espèce, que ceux qui doivent être fort courts, pour ne pas trop grossir les objets, tels que sont ceux qu'on nomme vulgairement *Lorgnettes d'Opéra*.

On voit encore par la construction de ce télescope, que les objets y doivent paroître droits: car le faisceau  $c$  des rayons qui font voir l'extrémité  $B$  de l'objet qui est au-

phane & qu'on éloigne la chandelle ou qu'on l'approche de l'œil jusqu'à ce que la chandelle & le flambeau paroissent également lumineux, on pourra juger de l'intensité de la lumière du flambeau.

dessous de l'axe  $AK$ , est aussi reçu par l'œil dans une direction  $cF$ , qui vient de dessous l'axe.

Parlons maintenant des *télescopes catadioptriques*. Un *télescope catadioptrique* a la propriété de détourner les faisceaux de rayons partis de l'objet, qui s'étant réfléchis sur la concavité d'un miroir sphérique, convergent pour former une image  $f$  (fig. 124.) de cet objet sur l'axe ou près de l'axe du miroir & du même côté que l'objet, ce qui l'empêche d'être vue directement par le moyen d'un ou de trois oculaires; car il faudroit que le spectateur plaçât sa tête entre l'objet & l'image, ce qui empêcheroit la lumière de l'objet de parvenir au miroir en assez grande quantité, & assez près de l'axe.

Pour éviter cet inconvénient, on place un petit miroir plan  $mH$ , incliné à l'axe du miroir sphérique de 45 degrés; ce miroir plan renvoie en  $o$  la pointe du cône des rayons réfléchis où est l'image, & on ajuste un ou trois oculaires dans la ligne  $oF$ , selon que l'on veut voir cette image renversée ou droite; pour cet effet, on perce le côté  $MN$  tuyau du télescope.

Le principal avantage de ce télescope, qu'on appelle *Newtonien*, c'est de faire le même effet que les télescopes à réfraction, quoiqu'il soit beaucoup plus court que ceux-ci; ce qui vient de ce que l'image formée par l'objectif, n'en est éloignée dans le miroir sphérique, que du quart de l'axe de sphéricité (l'objet étant supposé à une distance infinie), tandis qu'elle est éloignée du verre également convexe du demi-axe de sphéricité; de ce que cette image ne se trouve pas placée entre l'objectif & les oculaires, comme dans les télescopes astronomiques; mais surtout de ce qu'un même miroir objectif peut supporter des oculaires de foyers fort différens entr'eux, & même d'un foyer extrêmement petit; ce qui fait qu'un même *Télescope Catadioptrique* équivaut à plusieurs *Lunettes à réfraction* de

Soit la premiere distance de la chandelle dans laquelle le flambeau & cette chandelle paroissent avoir la même force  $= a$ , la seconde  $= b$ , l'intensité de la lumiere dans le premier cas sera à l'intensité de la lumiere dans le second cas comme  $b^2 : a^2$  ; car plus la

différentes longueurs, parce que ces dernieres ne peuvent gueres être bonnes, qu'en leur donnant des oculaires dont les foyers ayent certains rapports avec ceux des objectifs ; & les limites de ces rapports sont assez étroites.

Dans l'usage de ce télescope, on voit que le miroir plan  $mH$  doit être mobile, pour faire tomber les images des objets au foyer de l'oculaire, puisque cette image s'éloigne du miroir objectif à mesure que l'objet s'en approche. Il faut aussi que l'oculaire puisse couler le long du tuyau  $MN$  du Télescope, en même tems que le miroir plan  $mH$  se meut en-dedans de ce tuyau, afin que cet oculaire ait son foyer placé au sommet du cône des rayons détournés par le miroir plan  $Hm$ .

On voit encore que les myopes doivent rapprocher un peu le miroir  $Hm$ , afin qu'en plaçant l'image entre l'oculaire & son foyer, les rayons sortent de l'oculaire en divergeant autant qu'il est nécessaire pour la leur faire voir distinctement.

Il y a encore une autre espece de télescope Catadioptrique, moins simple, & propre à voir les objets terrestres ainsi que les objets célestes, on l'appelle *Grégorien*. On présente à un objet un miroir sphérique-concave  $AB$  (fig. 125) & un peu au-delà de l'image  $F$ , qui s'en forme sur l'axe  $OF$  de ce miroir, on pose un autre miroir sphérique-concave  $CD$ , d'un foyer plus court, & d'une ouverture beaucoup plus petite, mais dont l'axe est dans la même droite que celui du premier miroir  $AB$  : l'image  $F$  est à l'égard du miroir  $CD$ , comme un objet placé entre son foyer  $G$ , & son centre  $E$  ; c'est pourquoi il s'en forme sur le même axe une seconde image  $H$ , laquelle est d'autant plus éloignée au-delà du centre  $E$ , que la premiere image  $F$  est plus près du foyer  $G$  du petit miroir ; mais en approchant ce petit miroir de l'image  $F$  ou en l'en

chandelle doit être éloignée pour trouver la force de la lumière réfractée plus l'intensité de sa lumière sera diminuée. Ainsi le savant Bouguer a trouvé que les distances  $a$  &  $b$  de la chandelle doivent être comme 1 à 15.5

écartant, on porte la seconde image  $H$  à la distance qu'on veut. On a coutume de la placer un peu en deçà du miroir  $AB$ , qu'on perce vers son milieu  $I$ , afin que l'image  $H$  puisse être vue à l'aide d'un oculaire  $PQ$ ; & il est évident que cette image doit paroître droite. Car elle est renversée à l'égard de l'image  $F$ , laquelle est elle-même renversée à l'égard de l'objet.

Lorsque l'objet est fort lumineux, on peut, pour aggrandir la seconde image, la faire tomber vers  $O$  au-delà du miroir  $AB$ , & placer en  $O$  le foyer d'un oculaire  $PQ$ , afin que les rayons qui tendent à former l'image vers  $O$ , tombant sur cet oculaire, en sortent parallèles, & soient reçus ensuite sur un autre oculaire placé au-delà du point  $O$ , qui les fasse converger en un point où il faut mettre l'œil.

On peut voir que dans ces deux espèces de télescopes le petit miroir placé dans l'axe du grand, arrête nécessairement tous les rayons parallèles à l'axe, qui tomberoient sur le milieu du miroir objectif; de sorte qu'il est indifférent qu'en cet endroit le miroir soit percé, ou non.

Les désavantages de ces télescopes sont, qu'ils ont peu de champ; qu'ils sont difficiles à diriger vers les objets; qu'ils demandent des précautions extraordinaires, tant dans leur construction que dans leur usage; qu'ils sont d'une très-grande dépense, & très-faciles à gâter.

M. Cassegrain a un peu perfectionné le télescope Grégorien en faisant le petit miroir convexe au lieu de le faire concave; ce qui fait que les rayons devenant moins convergents font paroître l'objet plus grand, & que le tube peut être plus court. Les Astronomes préfèrent communément la lunette astronomique à deux verres à celle qui en a plus; 1°. par ce qu'elle est capable d'un plus grand champ; 2°. qu'elle peut supporter un oculaire d'un plus court foyer, & qu'elle grossit davantage les objets; 3°. qu'elle est plus courte; 4°. qu'il y a moins de perte de lumière à cause qu'il n'y a que deux verres à traverser.

lorsqu'il regardoit le flambeau à travers 16 lames de verre commun dont l'épaisseur étoit de 9. 5 lignes. C'est pourquoi les intensités de la lumière réfractée & non réfractée étoient comme 1 : 240 : de sorte que la lumière

Les grands télescopes qui grossissent 100 fois ou plus ne sont pas bons pour les objets terrestres, mais seulement pour les astres ; parce que la lumière des objets terrestres plus sensible que celle des astres, se trouve alors trop dispersée dans les larges images que forment les objectifs. D'ailleurs cette lumière qui rase la terre est continuellement détournée par les vapeurs grossières qui flottent dans l'air, d'où résulte un tremblement dans les parties de l'image qui paroît mal terminée.

L'expérience a fait voir que les images formées par réflexion n'étoient pas à beaucoup près si sujettes à être confuses que celles qui sont formées par la réfraction. On conçoit en effet que puisque les rayons, après s'être séparés par la réfraction, vont en s'écartant de plus en plus, les différens faisceaux qu'ils forment doivent se distinguer de plus en plus par leurs couleurs. Mais dans la réflexion, la séparation des rayons parallèles ne se fait pour ainsi dire que dans le point d'incidence, ou que dans l'intervalle compris entre le point d'incidence & le point de réflexion. Après la réflexion ces rayons très-peu séparés sont encore sensiblement parallèles, ce qui fait qu'on ne peut appercevoir cette séparation de rayons : il arrive seulement que les faisceaux de rayons réfléchis sont tant soit peu plus gros qu'auparavant. On ne doit donc pas appercevoir des iris dans les télescopes catadioptriques, mais seulement un peu de confusion dans les images, causée en partie par ce renflement de faisceaux, & en partie par la sphéricité des miroirs. D'où il suit qu'on peut donner une ouverture beaucoup plus grande aux miroirs objectifs des télescopes, qu'aux verres objectifs de même foyer, ce qui doit rendre les images par réflexion, beaucoup plus vives, & par conséquent distinctement visibles à l'aide d'une lentille d'un foyer fort court : elles peuvent donc paroître très-grandes sans cesser d'être claires, avantages qu'on ne peut se procurer avec des télescopes par réfrac-



qui traverse 16 lames de verre formant une épaisseur de 9. 5 lignes, perd les  $\frac{11}{14}$  de sa force. On a de même trouvé que la lumière qui traverse une masse d'eau de mer de dix pieds de longueur perd les  $\frac{1}{2}$  de sa force.

tion, à moins qu'ils ne soient d'autant plus longs (comme les Tables ci-dessus le font voir,) & par conséquent d'autant plus incommodes à manier.

Dans l'usage des télescopes catadioptriques Newtoniens on se sert de différens oculaires, selon la lumière de l'objet que l'on veut voir, & selon la grandeur dont on veut que son diamètre apparent soit augmenté. Voici les dimensions qu'on peut donner aux parties de ce télescope, pour faire un bon effet.

Longueur du foyer du mi- roir concave,	Diamètre de l'ou- verture du miroir.		Longueur moyen- ne du foyer de l'ocu- laire.	Augmentation des diamètres apparens des objets.
pieds.	pouces.	lignes.	lignes. centiemes.	environ
$\frac{1}{2}$	0	11	2. 00	36 fois
1	1	6	2. 39	60
2	2	6	2. 83	102
3	3	3	3. 13	138
4	4	1	3. 37	171
5	4	10	3. 54	202
6	5	7	3. 73	232
7	6	3	3. 88	260
8	6	11	4. 01	287
9	7	7	4. 13	314
10	8	2	4. 24	340
11	8	9	4. 34	365
12	9	4	4. 44	390

A l'égard du petit miroir plan *mH* (fig. 124) il doit être ovale, & il coupe sous un angle de  $45^\circ$  l'axe *Ao'* du cône *Do'D* de rayons incidens parallèlement à l'axe : ses dimensions dépendent de l'espace que tous les rayons réfléchis occupent à l'endroit où on doit poser le miroir, pour faire usage de l'oculaire, dont le foyer est

163. PROBLÈME. • *Trouver la loi que suit la diminution de la lumière qui traverse un milieu diaphane.* Concevons un corps diaphane ABPT (fig. 128) terminé par des surfaces parallèles, & divisé en tranches AD, CF, &c. de la même épaisseur. Il est visible que ces tranches ont la même force pour affaiblir ou pour absorber la lumière. Si on appelle  $a$  l'intensité de la lumière qui pénètre la surface AD & qu'on suppose que la lumière absorbée par

la première tranche est  $= \frac{a}{b}$ , la lumière qui pénétrera la seconde tranche CF sera représentée par  $a - \frac{a}{b} = a \cdot \left( \frac{b-1}{b} \right)$ . La lumière qui sera absorbée par la seconde tranche sera donc représentée par la formule  $a \cdot \left( \frac{b-1}{b^2} \right)$ . Donc la lumière qui pénétrera la troisième tranche sera  $= a \cdot \left( \frac{b-1}{b} \right) - a \cdot \left( \frac{b-1}{b^2} \right) = a \cdot \left( \frac{b-1}{b^2} \right)^2$ .

le plus court. M. de la Caille de l'optique duquel nous avons tiré presque toute cette note, avoit un pareil télescope, dont le foyer du miroir objectif étoit de 2 pieds: le petit miroir avoit près de 7 lignes dans sa plus grande largeur, & 5 dans sa plus petite.

Il y a encore quelques instrumens ingénieux dont plusieurs Lecteurs seront bien aises de trouver ici la description. *La chambre obscure portable* est une boîte BACDGF B (fig. 126) qu'on met sur une table, on adapte une lentille convexe au couvercle AB de la boîte; & les rayons qui viennent de l'objet PQ après avoir été réfléchis par le miroir plan SE, traversent la lentille & vont peindre l'objet sur le fonds de la boîte en  $p'q'$  dans une situation renversée. De sorte que l'on peut peindre cet objet sur le fond de la boîte.

*La lanterne magique* ne diffère pas beaucoup de la chambre obscure dont ont vient de parler: car l'objet PR (fig. 127) se place entre la chandelle L & la lentille convexe AB; de cette manière l'image  $rp$  de l'objet se peint sur le mur opposé.

On trouvera de même que l'intensité de la lumière qui aura traversé la troisième tranche sera  $= \frac{a.(b-1)^3}{b^3}$ .

Et en général le nombre des tranches étant  $m$  l'intensité de la lumière sera  $= \frac{a.(b-1)^m}{b^m}$ . De sorte que les décroissemens de l'intensité de la lumière suivent une progression géométrique dont la raison est  $\frac{b-1}{b}$ .

Si les décroissemens de la lumière, qui comme nous venons de le voir suivent une progression géométrique, sont représentés par les ordonnées  $Bb$ ,  $Dd$ ,  $Ff$ , &c. & qu'on prenne les épaisseurs des tranches égales, il est clair que la courbe  $bpfh$  sera un logarithmique que j'appellerai *courbe de réfraction*, par le moyen de laquelle on pourra mesurer l'intensité de la lumière correspondante à chaque tranche. On sait que la sous-tangente de la logarithmique est constante; c'est pourquoi chaque milieu diaphane doit avoir une sous-tangente particulière. Si nous appellons  $b$  cette sous-tangente, l'ordonnée  $y$ , & l'abscisse  $x$ , nous aurons  $L.y = \frac{x}{b}$

ou  $b.L.y = x$ . De sorte que connoissant  $b$  & l'intensité  $y$  de la lumière, on trouvera l'épaisseur  $x$  du corps diaphane que la lumière a dû traverser pour acquérir l'intensité  $y$ . De même étant donnée l'épaisseur  $x$ , on aura  $L.y = \frac{x}{b}$ , c'est-à-dire qu'on trouvera le logarithme de l'intensité de la lumière & par conséquent l'intensité elle-même.

Soit l'ordonnée  $Bb = a$ ,  $Ff = y$ , l'abscisse  $mB = c$  &  $mF = c + x$ , on aura  $b.L.a = c$ , &  $b.L.y = c + x$ ; & de-là  $b(L.y - L.a) = x$ , ou  $b = \frac{x}{L.y - L.a}$ ,

ou  $b = \frac{x}{L.a - L.y}$ , en n'ayant pas égard aux signes.

On pourra donc trouver la sous-tangente, étant donnée l'épaisseur  $x$  & les intensités de la lumière  $a$  &  $y$  correspondantes aux points  $B$  &  $F$ ; or il est visible qu'il y a

toujours une raison constante entre la différence des logarithmes de deux ordonnées également éloignées, & la portion de l'axe interceptée.

Un corps est plus diaphane qu'un autre, lorsqu'ayant une plus grande épaisseur il n'absorbe cependant pas plus de lumière que l'autre. Si les épaisseurs des deux corps qui absorbent la même quantité de lumière sont entr'elles comme 1 : 3, l'un sera trois fois plus diaphane que l'autre. De sorte que les transparences suivent la raison des grosseurs lorsque la quantité de lumière absorbée est la même. Soit une sous-tangente = B, deux ordonnées A & g, la partie de l'axe comprise

entre ces ordonnées = X, l'on aura  $B = \frac{X}{L.A - L.y}$

Soit une autre sous-tangente = b, l'abscisse = x, les

ordonnées a & y, nous aurons  $b = \frac{x}{L.a - L.g}$ . Pour

comparer les transparences il est nécessaire que les intensités de la lumière aient été diminuées à travers les deux milieux dans la même raison, c'est-à-dire qu'on

doit avoir  $\frac{A}{g} = \frac{a}{y}$ , ou  $L.A - L.g = L.a - L.y$  ;

ainsi l'on aura  $B : b :: X : x$ . Mais les transparences sont comme X : x donc elles sont aussi comme les sous-tangentes B & b. M. Bouguer a trouvé que l'intensité de la lumière qui traversoit une épaisseur d'air de 7469 toises diminuoit dans le rapport  $\frac{16}{17100}$ . On aura donc  $x = 7469$  toises,  $a = 2500$ ,  $y = 1681$  ; & par conséquent la sous-tangente b de l'air sera  $= \frac{7469}{0.1711711} = 43678$ . La sous-tangente de l'eau marine se trouvera aussi facilement par l'expérience dont nous avons parlé ci-dessus ; car en faisant  $x = 10$  pieds = 1.666 toises,  $a = 5$ ,  $y = 3$ , b sera = 7. 5. les transparences de l'eau marine & de l'air sont donc entr'elles :: 7. 5 : 43678 :: 1 : 5823. Ainsi l'air est 5823 fois plus transparent que l'eau marine.

On peut par-là trouver facilement quelle doit être l'épaisseur d'une tranche d'air qui pût affoiblir la lumière autant qu'une tranche d'eau marine de dix pieds. Car l'on a  $b = 43678$  toises, & si l'on fait  $a : y :: 5 : 3$ .

pour avoir  $x = b(L. a - L. y) = b(L. 5 - L. 3) = 9682$  toises, on aura l'épaisseur cherchée.

164. L'opacité des corps consiste en ce que la quantité de lumière qu'ils transmettent n'est pas suffisante pour être apperçue par l'œil ; de sorte qu'à proprement parler il n'y a aucun corps qui soit absolument opaque. Cette théorie s'accorde très-bien avec la nature de la courbe de réfraction ; car l'axe de la logarithmique est son asymptote, ainsi les ordonnées de cette courbe ne peuvent jamais s'évanouir, c'est-à-dire l'intensité de la lumière qui traverse un milieu quelconque ne peut être réduite à zéro.

M. Bouguer a trouvé qu'un corps composé de 80 lames de verre ne laissoit passer aucune lumière sensible, de sorte que ce corps étoit parfaitement opaque, tandis que 16 lames de 9. 5 lignes d'épaisseur ne laissoient passer que  $\frac{1}{125}$  de lumière.

165. PROBLÈME. Trouver dans quel rapport la lumière doit être diminuée pour qu'un corps devienne opaque. Si nous supposons  $a = 240$ ,  $y = 1$ ,  $x = 9. 5$  lignes, nous aurons la sous-tangente  $b = \frac{240^2}{1.1111} = 4.988$  lignes. l'épaisseur des 80 lames dont nous avons parlé ci-dessus étoit de 47. 5 lignes que je suppose  $= x$ , pour avoir 4.988 (L. 240 — L.  $y$ ) = 47. 5, d'où l'on tire  $\frac{27.5}{4.988} - L. 240 = -L. y = -7.1446388$ . Le nombre correspondant à ce logarithme est  $= 0.000001389$  ; c'est pourquoi nous avons  $a : y :: 240 : 0.000001389 :: 1720662420 : 1$ . Si la lumière du Soleil est diminuée dans ce rapport, c'est-à-dire, si sa densité 1 se change en  $\frac{1}{1720662420}$ , on ne pourra plus l'appercevoir, & le corps à travers lequel la lumière souffrira un tel affoiblissement deviendra opaque.

166. PROBLÈME. Mesurer les décroiffemens de la lumière lorsqu'elle traverse un milieu diaphane qui n'est pas partout également dense. Le milieu  $abch$  (fig. 128 & 129) peut être comparé avec le milieu  $ABPT$ , en divisant ce premier milieu en tranches  $tcqp$ ,  $qNxP$ , &c. dont les masses respectives soient égales aux masses des tranches  $MP$ ,  $LN$ , &c. du second milieu homogène. Mais alors les épaisseurs  $cq$ ,  $qN$  ne seront pas égales entr'elles, & les ordonnées  $ba$ ,  $Nn$ , &c. ne seront pas non plus égales aux ordonnées correspondantes de la

logarithmique *b f.* Décrivons une autre courbe *Q S* dont les ordonnées *b Q*, *N z*, &c. représentent les masses d'air comprises entre les ordonnées *a b* & *n N*, *n N* & *M q*, &c. ; il est visible que l'aire *b Q S c* représentera la masse d'air contenue entre l'ordonnée *b a* & l'ordonnée *c h*. Ayant mené *M R* parallèle à *n z* & infiniment proche de cette seconde ligne, *n m* exprimera le décroissement de la lumière *n N*, décroissement qui dépend de la densité de l'air *N z*, & de l'épaisseur *N q* que la lumière traverse ; ainsi *n m* sera comme *y z d x*, en faisant *n N = M q = y*, *N z = q R = z*, *N q = d x*, parce que nous supposons *b N = x* ; ou en supposant que *a* est une quantité connue par l'expérience, *n m* sera  $= d y = \frac{y z d x}{a^2}$ . Menons la tangente

*n V* à la ligne de réfraction *a c*, nous aurons la sous-tangente  $N V = \frac{y d x}{d y}$ . Mais  $\frac{a^2}{z} = \frac{y d x}{d y} = N V$  ; donc

les sous-tangentes de la ligne de réfraction doivent être en raison inverse des densités. Mais dans l'air les densités sont en raison inverse des dilatations du moins sensiblement & auprès de la surface de la terre ; donc dans la ligne de réfraction de l'air ; les sous-tangentes suivent les rapports des dilatations de l'air.

Puisque  $\frac{a^2 d y}{y} = z d x$ , il est évident qu'étant donnée la courbe des densités *Q z S*, on peut construire la courbe de réfraction *a n c*, & réciproquement. Si nous supposons avec M. Mariotte que les densités de l'air suivent la raison des poids comprimants, la densité correspondante au point *N* sera proportionnelle à l'aire *b Q z N = S. z d x*, aussi-bien qu'à l'ordonnée *N z = z*. Donc on aura  $S. z d x = b z$  ; & en

différentiant,  $z d x = b d z$ , d'où l'on tire  $d x = \frac{b d z}{z}$ ,

& en intégrant,  $x = b L. z$  ; ainsi la courbe des densités est une logarithmique dont la sous-tangente est *b*, quantité que l'expérience doit déterminer (v. le n°. 134).

De plus  $\frac{a^2 dy}{y} = z dx = b dz$  ; donc  $a^2 L. y = b z$ , &  $\frac{a^2}{b} L. y = z$ . De ce que  $\frac{a^2 dy}{y} = z dx$  ou  $a^2 L. y = S. z dx$ , il suit que les logarithmes des intensités de la lumière correspondants à différentes hauteurs de l'atmosphère, sont proportionnels aux masses d'air que la lumière traverse.

### *Théorie des forces Physiques.*

167. POUR bien comprendre la théorie que nous allons développer, il est nécessaire d'avoir quelque connoissance de la loi de continuité. La loi de continuité dont il est ici question, consiste en ce que chaque quantité, qui d'une grandeur passe à une autre grandeur, doit passer par toutes les grandeurs intermédiaires de même genre.

Les mouvemens des corps se font dans des lignes continues & non-interrompues. Les planètes & les comètes se meuvent dans des orbites continues, les rétrogradations se font peu à peu & non par sauts ; le jour vient peu à peu par l'aurore, & la nuit est précédée du crépuscule, qui est une lumière qui diminue peu à peu en passant par tous les degrés intermédiaires entre ce qu'on appelle jour & ce qu'on nomme nuit. Le diamètre du Soleil monte sur l'horison & descend au-dessous non par un saut, mais par un mouvement continu. De même les corps qu'on lance en l'air se meuvent dans des lignes continues. Tous les mouvemens qui dépendent de la cause de la gravité, de l'élasticité, de la force magnétique observent la loi de continuité comme les forces qui les produisent. La force de la gravité suit à peu près ( dans les distances un peu considérables ) la raison renversée des quarrés des distances, c'est-à-dire qu'elle diminue d'autant plus que le quarré de la distance augmente, de manière, par exemple, que si à la distance de la Lune, cette force est exprimée par 1, à une distance double ou à la distance exprimée par 2, cette force qui pousse les corps vers la terre sera quatre fois

plus petite ou sera un quart de ce qu'elle étoit à la première distance, & à une distance triple elle sera neuf fois plus petite. La gravité dépend donc des distances & comme les distances ne peuvent changer par saut, la force de la gravité doit changer en passant par tous les degrés intermédiaires. Nous voyons pareillement que la force de l'aimant dépend des distances par une loi continue qui n'est jamais interrompue; la force élastique ou du ressort dépend de l'inflexion comme dans les lames élastiques ou à ressort, ou bien elle dépend de la distance comme dans les parties de l'air comprimé dont le ressort augmente selon une certaine loi continue, à proportion que les parties se rapprochent davantage. Dans les mouvemens naturels les changemens de direction se font peu à peu, & il n'y a aucun angle rigoureux dans les corps; mais leurs pointes présentent une courbure qu'on apperçoit par le moyen du microscope. Cette courbure se trouve dans les angles des bords des rivières, dans les feuilles des arbres & les branches, les pointes des cristaux que forment les sels, &c.

168. IL y a cependant des cas dans lesquels cette loi paroît n'être pas observée: cela arrive lorsque le commencement de la seconde grandeur est éloigné d'un certain intervalle du commencement de la première. Ainsi en considérant le jour comme un intervalle entre le lever & le coucher du Soleil, le jour précédent dans certains tems de l'année, diffère du jour suivant de plusieurs secondes, & il paroît qu'il se fait un saut sans qu'il y ait un jour intermédiaire qui diffère moins du jour précédent; mais ces jours conçus ainsi ne forment pas une série ou suite continue. Si l'on imagine un parallèle de la terre sur lequel soient situés sans interruption tous les lieux qui ont une même latitude géographique, tous ces lieux auront des jours dont les commencemens & les fins coulent continuellement jusqu'à ce qu'on revienne au même lieu dont le jour précédent est placé au premier terme de cette série & le suivant au dernier terme de la même série. Les grandeurs de ces jours coulent continuellement sans aucun saut, & c'est nous (en omettant les jours intermédiaires) & non pas la nature, qui faisons le saut.



169. IL y a des gens qui objectent le cas où un homme tenant une pierre dans sa main lui communique tout-à-coup une vitesse finie en un instant. Mais il est visible qu'il n'y a point ici de vitesse finie produite dans un instant indivisible. Il faut un tems fini (quoique fort court) pour que les esprits animaux acquièrent une vitesse finie, se répandent dans les nerfs & les muscles & tendent les fibres ; c'est pourquoi pour pouvoir donner une vitesse finie à la pierre, nous retirons la main & retenant la pierre pendant un certain tems, nous accélérons continuellement son mouvement. Lorsqu'on tire un canon le mouvement ne se communique au boulet que successivement ; car la poudre ne s'enflamme & l'air ne se dilate que successivement ; ainsi le fluide igné (non plus que l'air) ne peut par son élasticité, agir sur le boulet qu'en lui communiquant successivement le mouvement & ce mouvement fini doit passer par tous les degrés intermédiaires. On peut voir encore clairement cette succession dans le mouvement qu'un ressort communique à un globe qu'il pousse. Plus l'élasticité est grande, plutôt, mais jamais dans un instant indivisible, la vitesse est produite dans le globe. Lorsqu'on ôte le bouchon qui fermoit un orifice fait vers le fonds d'un vase, quelque adresse que l'on ait, le mouvement du bouchon est successif & non instantané, & l'eau acquiert aussi sa vitesse successivement, quoique dans un petit intervalle de tems. En effet la pression de l'eau a besoin de tems pour produire son effet, & ne peut produire une vitesse finie que dans un tems fini, si court qu'on veuille le supposer.

170. AJOUTONS à ce qu'on vient de dire que quand il s'agit d'une continuité, il doit y avoir une limite commune qui divise ce qui suit de ce qui précède, limite qui, considérée comme limite, doit nécessairement être indivisible : c'est ainsi qu'un même point sépare les deux parties d'une même ligne : c'est ainsi qu'un seul & même instant indivisible sépare le tems futur du tems passé, & il ne sauroit y avoir deux instans contigus ; mais entre un instant & un autre instant il doit y avoir un tems, une durée divisible à l'infini. Dans une même ligne il ne peut y avoir deux points immédiatement contigus ; car ils se confondroient & ne fe-

roient qu'un seul & même point ; de sorte qu'entre deux points quelconques d'une même ligne, réellement différens, il y a toujours une petite ligne divisible à l'infini. Bien plus, dans ce genre de quantités dans lesquelles il ne sauroit y avoir deux grandeurs ensemble, on voit avec plus d'évidence qu'il ne peut y avoir de saut d'une grandeur à l'autre ; car dans l'instant que le saut devroit se faire & la suite être interrompue par un accession momentanée, il devroit y avoir deux grandeurs différentes, dont l'une fût la dernière de la série précédente & l'autre la première de la série suivante. Cela se voit encore plus clairement dans ces états de choses dans lesquels d'un côté il doit toujours y avoir un état, tandis que d'un autre côté la chose ne sauroit avoir deux de ces états à la fois.

171. ET c'est la raison pour laquelle le mouvement local ne sauroit se faire que par une ligne continue. En effet si la ligne du mouvement étoit interrompue en quelque endroit, le moment où le mobile se trouve au premier point de la seconde ligne seroit postérieur ou antérieur au moment auquel il se trouve dans le dernier point de la ligne antérieure, où ces deux momens seroient le même ? Dans les deux premiers cas il y auroit entre ces deux instans, un tems divisible à l'infini pendant lequel le corps ne seroit nulle part ; & dans le second cas le corps se trouveroit à la fois dans deux lieux différens.

172. IL se présente contre ce raisonnement une difficulté ; car il paroît qu'on peut en conclure que la création & l'annihilation d'une chose sont impossibles ; puisque selon notre raisonnement, à l'instant auquel une chose est créée elle devroit joindre ensemble deux états incompatibles, l'être & le non être, & à l'instant de son annihilation, elle devroit avoir en même-tems l'existence & la non-existence. La réponse est facile : le rien n'a aucune véritable propriété, il est exclus immédiatement par l'être, & une suite d'états dont chacun est rien n'exige aucun terme qui la termine ; c'est pourquoi au premier & au dernier instant du tems qu'une chose est supposée durer, elle existe, & ne joint pas ensemble l'existence & la non-existence. Mais si une chose qui

a une certaine densité & qui a duré pendant une heure, doit durer la seconde heure avec une densité double, au moment qui sépare la première heure de la seconde il y auroit à la fois une densité double & une densité simple, ce qui est absurde.

173. Si les choses sont ainsi, il est évident que lorsqu'un corps va frapper un autre corps en mouvement, le choc doit se faire de manière qu'il ne se fasse point de saut dans la communication du mouvement. On sait par les loix du mouvement dont on a parlé ci-dessus qu'un corps sans ressort qui, avec seize degrés de vitesse va frapper un autre corps égal & aussi sans ressort, mu dans le même sens avec quatre degrés de vitesse, doit lui en communiquer six degrés, de manière qu'après le choc les deux mobiles doivent avoir chacun dix degrés de vitesse; mais selon la loi de continuité la vitesse du corps choqué ne peut pas passer de quatre à dix degrés dans un instant indivisible & par un saut; il faut donc que dans le choc le mouvement ne se communique pas dans un instant, mais peu à peu. D'un autre côté si la surface antérieure du corps choquant atteignoit avec seize degrés de vitesse la surface postérieure du corps choqué, à l'instant du contact mathématique les surfaces devroient aller avec la même vitesse, c'est-à-dire chacune avec 10 degrés de vitesse & il se feroit un saut; il paroît donc qu'il n'y a point de vrai contact mathématique, mais seulement un contact Physique, qui consiste en ce qu'entre les corps qui se choquent, il y a à l'instant du contact un petit espace, quoiqu'insensible, entre leurs surfaces; mais s'il y avoit un contact mathématique, il n'y auroit dans le moment de ce contact aucun espace entre les corps qui se choquent. Les corps agissent donc les uns sur les autres sans parvenir au contact mathématique, & le seul contact Physique a lieu dans la nature: ainsi lorsque dans la suite nous parlerons du contact, ou du choc des corps, nous entendrons toujours le contact Physique, à moins que nous ne nommions expressément le contact Mathématique. Mais comment un corps pourra-t-il agir sur un autre corps & lui communiquer du mouvement sans le toucher mathématiquement? C'est ce que nous expliquerons dans la suite

après avoir développé la nature des forces attractives & répulsives.

174. QU'ON ne dise pas que quand la vitesse du corps choquant dont on vient de parler passe de 16 degrés à 10 degrés, les 10 degrés subsistent & que les 6 sont anéantis, & qu'ainsi il n'y a pas de saut dans la durée des 10 premiers degrés, & que dans l'anéantissement le saut ne répugne pas, puisqu'on n'a pas en même-tems l'être avec le non-être, l'existence avec la non-existence ; car les 16 degrés de vitesse du corps choquant ne sont pas une chose composée de 16 choses réellement distinctes dont 10 restent après le choc & 6 sont détruites par le choc ; mais ce sont une seule & simple détermination à exister dans des points de l'espace éloignés d'un certain intervalle comme, par exemple, de 16 toises, & cela après un certain tems déterminé, d'une minute, par exemple.

175. ON doit cependant faire attention que la loi exacte de continuité n'a pas lieu dans les choses qui ne sont pas continues, mais qui sont l'assemblage de plusieurs grandeurs séparées. Cela arrive dans les bâtimens qui croissent comme par sauts par l'accession de nouvelles pierres, ou de nouvelles pièces de bois ; mais la loi de continuité est cependant observée dans les mouvemens des parties primitives de ces pierres & de ces pièces de bois. Dans l'accroissement des plantes & des corps animés, les nouvelles accessions de matière observent aussi la loi de continuité dans les mouvemens & vitesses ; mais dans la grandeur des plantes & des corps animés la nature affecte une continuité du moins apparente, continuité que nous observons dans la série des substances à commencer par les corps inanimés, passant ensuite aux végétaux, de là à quelques demi-animaux immobiles ; ensuite aux animaux de plus en plus parfaits par degrés jusqu'aux singes si semblables à l'homme. Mais il est visible qu'entre deux espèces voisines, il pourroit y avoir encore une infinité d'autres espèces qui différeroient moins entr'elles que ces deux là, & qu'ainsi il n'y a dans cette progression qu'une continuité affectée & apparente, mais non pas exacte.

Il y a des arcs de courbe, ainsi qu'on l'a vu dans la

premiere partie de cet ouvrage (courbes transcendentes n°. 4) qui sont composés de points séparés les uns des autres, & qui ne forment pas une courbe continue, mais qui ont l'apparence d'une telle courbe: ainsi la loi de continuité est observée dans ce cas là, du moins en apparence; mais elle est exactement observée dans les mouvemens & les vitesses des corps, ce qui suffit pour la théorie que nous nous sommes proposés de développer (\*).

(\*) La loi de continuité peut servir à trouver le rapport suivant lequel la vitesse de l'eau décroît dans les tuyaux. Soit un tuyau A V T D (fig. 130) partagé en six parties égales aux points B, C, G, F, M, & imaginons que les vitesses à l'origine A & aux points suivans B, C, &c. sont désignées par les ordonnées de la courbe *am*. Supposant  $AB = x$ ,  $Bb = y$ , je fais  $y = a + bx + cx^2 + Dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6$ . Pour connoître les coefficients  $a, b, c, \&c.$  je remarque qu'en supposant  $x = 0$ , l'on doit avoir  $y = a = Aa$ ; mais  $x = AB$  donne  $y = Bb$ ,  $x = AC$  donnant  $y = Cc$ , &c. Connoissant donc les ordonnées  $Aa, Bb, \&c.$  on aura l'équation de la courbe cherchée. Supposons que la hauteur de l'eau dans le réservoir est constamment d'un pied, & que le tuyau AVTD est de 16 lignes de diamètre, & prenons  $AB = 30$  pieds que je représenterai par 1, c'est-à-dire, que je ferai l'unité de mesure = 1; ainsi l'abscisse AB sera = 1, l'abscisse AC = 2, &c. Cela posé, supposons que notre tuyau est composé de plusieurs pieces, de maniere qu'on puisse le terminer en B, C, G, &c. L'expérience apprendra que dans une minute de tems la quantité d'eau écoulée (exprimée en pouces cubes), lorsque la longueur du tuyau est = AB, AC, &c. est respectivement égale à 2778, 1957, 1587, 1351, 1178, 1052; ainsi que le rapporte M. Bossut dans son *Hydrodynamique*. Mais si l'on employoit en A un tuyau très-court, de 3 pouces, par exemple, la quantité d'eau seroit de 6330. Ces dépenses, qui sont comme les vitesses, étant liées par la loi de continuité, nous aurons les équations  $6330 = a$ ;  $2778 = a + b + C + D + e + f + g$ ;  $1957 = a + 2b + 4c + 8D + 16e + 32f + 64g$ ;  $1587 = a + 3b + 9c +$   
 N n 3

*De l'existence des forces attractives & répulsives.*

176. TOUTES les fois qu'un corps inanimé s'approche d'un autre corps sans l'action d'une cause extrinsèque qui puisse produire ce mouvement, il y a ce qu'on appelle *attraction*. Dans plusieurs occasions on observe que les corps tendent les uns vers les autres, sans qu'on puisse assigner aucune impulsion matérielle qui produise cette tendance; & celui qui voudroit bannir l'attraction de la Physique devroit faire voir que les corps ne s'approchent jamais qu'en vertu d'une impulsion, impulsion qu'il faudroit prouver par des expériences ou des observations, ou enfin par un raisonnement démonstratif tiré de la nature des causes physiques dont l'existence est reconnue & sans avoir recours à des suppositions ou des fictions; appuyées sur des pures possibilités; mais aucun mortel jusqu'ici n'a donné de telles preuves contre l'attraction.

Les parties des corps sont adhérentes entr'elles & s'attirent mutuellement. Cette attraction ne dépend pas de la pression de l'air environnant; car dans la machine de Boyle (\*), après avoir pompé l'air, les corps solides ne perdent pas leur fermeté. Elle ne dépend pas non plus de l'action de ce fluide qu'on nomme *ether*, ni de ce fluide que les Cartésiens appellent *matière subtile* & dont ils ne sauroient démontrer l'existence; car si

$27D + 81e + 243f + 729g; 1351 = a + 4b + 16c + 64D + 256e + 1024f + 4096g; 1178 = a + 5b + 25c + 125D + 625e + 3125f + 15625g; 1052 = a + 6b + 36c + 216D + 1296e + 7776f + 46656g;$  par le moyen desquelles on tâchera de déterminer les inconnues  $b, c, D, \&c.$ ; car  $a = 6330$ . C'est pourquoi en substituant ces valeurs, l'équation  $y = a + bx + cx^2 + Dx^3 + ex^4 + fx^5 + g.x^6$ , fera connoître à peu-près la vitesse  $y$  en un point quelconque  $x$  du tuyau DTVA, (voyez les courbes algébriques n°. 3).

(\*) C'est une machine par le moyen de laquelle on ôte presque tout l'air d'une espèce de cloche de verre qu'on nomme *réipient*; on appelle cela *faire le vuide de Boyle*.

cela étoit un tel fluide comprimeroit aussi les parties de l'air les unes contre les autres & rendroit l'air solide.

177. LA ténacité des fluides , la rondeur que leurs gouttes affectent , prouvent suffisamment qu'il y a une attraction entre leurs parties.

Les corps solides attirent les fluides & ceux-ci attirent réciproquement les corps solides : l'attraction est donc une propriété universelle puisqu'on l'observe soit dans les corps solides , soit dans les corps fluides.

178. Qu'on prenne deux miroirs de verre blanc , polis , bien nets & secs , qu'on applique l'un des miroirs sur l'autre ; si l'on veut ensuite séparer l'un de l'autre , on sentira une certaine résistance qui vient de la force avec laquelle ces miroirs s'attirent l'un l'autre , & ce n'est pas l'air qui produit cette attraction , comme on peut s'en convaincre en faisant l'expérience dans le vuide de Boyle. Si l'on prend de longs cheveux d'enfant , auxquels on suspende des lames très-minces de parchemin , de cuir , de bois , de fer de la longueur d'un pied , d'une demie-ligne de largeur dans une longue cloche de verre , afin d'empêcher l'agitation de l'air , qu'on approche ensuite extérieurement tels corps que l'on voudra de la cloche , ces lames s'en approcheront. On peut aussi observer les effets de l'attraction en appliquant les surfaces polies & nettes des métaux & demi-métaux , comme l'argent , le bronze , le fer , le plomb , l'étain , le zinc , le bismut , le régule d'antimoine , &c.

179. NON-SEULEMENT les corps s'attirent dans le contact , mais encore lorsqu'ils sont éloignés d'un certain intervalle ; car si entre les miroirs dont on a parlé ci-devant , on place un fil de soie tel qu'il est produit par le ver à soie , en liant avec ce fil à de grands intervalles l'un des miroirs , alors quoique ces miroirs soient distans entr'eux de toute la grosseur du fil , on éprouve néanmoins une force d'attraction considérable , & cela a lieu en prenant des miroirs fort épais à l'égard desquels on ne doit pas soupçonner que les parties comprises entre les intervalles des fils puissent se toucher. On peut aussi au lieu de deux miroirs em-

ployer des plaques de métal polies, seches, nettes & épaisses, si l'on veut, d'un ou deux pouces.

180. PRENONS un corps opaque quelconque  $aSb$  (fig. 131) terminé par un tranchant  $S$ , tel qu'un métal, une pierre, ou même un verre transparent, si l'on fait passer dans une chambre obscure & bien fermée des rayons solaires à travers un petit trou fait au volet de la fenêtre, & qu'on leur présente le tranchant  $S$  à une certaine distance, le rayon le plus proche en sera fortement attiré & se dirigera vers  $D$ , le rayon voisin en est moins attiré & se dirige vers  $e$ , le suivant est encore moins attiré, le rayon  $Eh$  parvient en  $h$  sans se détourner de son chemin (\*). Non-seulement l'attraction a lieu, mais encore la répulsion qui commence à une plus grande distance, de sorte que le rayon qui fuit se dirige vers  $i$ , le rayon suivant plus éloigné de  $S$  étant moins repoussé, parvient en  $k$ , tandis que le plus éloigné conservant sa direction va en droite ligne en  $L$ . Cette attraction & cette répulsion de la lumière est très-sensible lorsqu'on prend deux tranchans d'acier opposés & qu'on les fait approcher peu à peu, jusqu'à qu'il n'y ait plus qu'un petit intervalle.

LA rondeur des gouttes de la pluie qui tombe à travers l'air, la rondeur des gouttes d'huile qui nagent dans l'eau prouvent aussi démonstrativement la force attractive qui regne entre les parties de tous les fluides. Pareillement lorsque deux gouttes se touchent ou sont prêtes de se toucher, elles se portent l'une vers l'autre pour n'en faire qu'une (on peut l'observer sur-tout si ce sont deux gouttes de mercure fort petites posées sur du papier ou sur un miroir de verre) : or ce mouvement ne peut venir de l'action d'un fluide environnant, puisqu'un tel fluide, remplissant les angles que forment les gouttes avant leur réunion, devrait plutôt empêcher cette réunion. De petites gouttes placées sur un plan vernissé ou sur une feuille de chou & qui ont une figure fort ronde s'applatissent si on les pose sur un plan plus dense & plus attirant.

(\*) L'inflexion de la lumière auprès des pointes de métal, de bois, de verre, n'est ni augmentée ni diminuée lorsqu'on électrise fortement ces pointes (nous verrons dans la suite ce que c'est que l'électricité) ; cet effet ne vient donc d'aucune atmosphère électrique.



181. METTEZ une très-petite goutte de mercure sur du papier, faites-la toucher par un morceau de crystal, il enlèvera cette goutte qui quittera le papier. Approchez cette goutte enlevée d'un autre très-petite placée sur le même papier, celle-ci s'attachera à la première pour en former une plus grosse qui sera élevée par le crystal. Mais si vous approchez la goutte adhérente au crystal, d'une goutte de mercure assez grosse pour ne pouvoir être enlevée par la force attractive du crystal, alors la petite goutte plus attirée par la grosse goutte que par le crystal, abandonnera celui-ci pour se réunir à la grosse goutte.

182. REMPLISSEZ de mercure par voie de succion un tube de verre fort étroit, posez-le horizontalement, il en restera une petite portion dans le tube, qui ne tombera pas, même en élevant le tuyau; mais si vous approchez obliquement ce tube du vis-argent contenu dans un vase, tout ce qui est contenu dans le tuyau s'écoulera, à cause de l'attraction du mercure du vase plus forte que celle du verre.

Plongez en partie un tube de verre fort étroit (de ceux qu'on nomme capillaires) dans l'eau d'un vase, cette eau montera dans le tube beaucoup plus haut que le niveau de la surface de l'eau du vase. Si sur la surface extérieure d'un tuyau capillaire, vous laissez tomber une goutte d'eau, elle descendra le long du tube; s'il est incliné elle parviendra à son orifice inférieur ou l'attraction de la surface interne la fera monter avec rapidité dans l'intérieur de ce tube, & cela arrive dans le vuide de *Boyle* comme dans l'air.

Qu'on prenne un morceau de sapin qu'on vient de tremper dans l'eau, qu'on le mette en équilibre dans l'air à l'aide d'une romaine & qu'on en approche un vase plein d'eau par-dessous, l'eau attirera ce sapin de manière que si la surface qui touche l'eau est d'un pouce quarré, il faut ajouter de l'autre côté de la romaine un poids de cinquante grains pour rétablir l'équilibre.

183. C'EST la force avec laquelle les parties des deux fluides s'attirent qui produit ce qu'on nomme *coagulum*: de l'esprit d'urine très-subtil mêlé avec l'alcool (c'est-à-dire l'esprit de vin rectifié au dernier degré) produit

subitement un corps solide semblable à la glace. L'alcool de vin mêlé avec le blanc d'œuf ou avec la sérosité du sang produit un coagulum.

Faites dissoudre quelque sel dans l'eau, mettez une goutte de cette dissolution sur un verre plan un peu chaud, afin que l'eau s'évapore lentement, alors vous pourrez voir par le moyen du microscope les parties salines d'abord petites, s'approcher peu à peu les unes des autres, se joindre ensemble pour former des cristaux dont la grandeur croît continuellement.

L'eau, le vin, le vinaigre de vin & de biere, les huiles des plantes qu'on tire par expression, &c. & d'autres liqueurs, étant versés séparément dans un vase de verre net & sec sont attirés par les côtes & s'élèvent vers eux, leur surface étant concave & plus abaissée vers le milieu.

C'est par l'attraction que l'huile monte dans le coton d'une lampe, la même cause fait monter l'eau dans les fils de laine & dans les draps suspendus, & M. Petit a prouvé que cet effet a aussi lieu dans le vuide de Boyle.

184. NON-SEULEMENT il existe une force d'attraction entre les corps, on observe aussi qu'ils se repoussent. Nous avons rapporté ci-dessus une expérience dans laquelle un corps tranchant repousse la lumière. Les parties des corps séparées par la fermentation, la combustion, l'effervescence imitent l'air qui est composé de parties qui se repoussent. Les huiles grossières & l'eau se repoussent mutuellement & ne se mêlent pas, à moins que le principe acide ou le phlegme ne commencent à dominer dans ces huiles. Certains insectes par les pieds desquels il transpire une certaine huile, marchent sur l'eau sans s'enfoncer. Les plumes des oiseaux aquatiques repoussent l'eau qui ne les mouille pas.

On sait que la rosée ne tombe pas sur les métaux polis, mais qu'elle en est repoussée. Avec les poils de certains animaux, comme les chevaux, les boucs, on fait des étoffes qui résistent à la pluie qu'elles repoussent.

Le cnivre fondu jetté dans l'eau en est repoussé avec une grande violence au grand péril des assistants.

Nous pourrions rapporter bien d'autres exemples d'at-

tractions & de répulsions ; mais ceux que nous venons d'indiquer sont plus que suffisants pour convaincre tout homme non prévenu qu'il existe dans la nature des forces , soit répulsives soit attractives. Il nous reste à parler de leur cause & des loix qu'elles suivent.

185. LES Collecteurs des actes de *Leipsick* comprennent enfin en 1710, qu'on ne peut expliquer par la compression d'un fluide environnant les effets que les Attractionnaires attribuent à l'attraction, & qu'il faut les rapporter à un principe propre aux corps mêmes. Ce principe selon eux consiste dans des atmosphères invisibles qui pénètrent la substance des corps, & se répandent autour de leur surface. » Il'existe sans doute ( dit le » suivant Auteur des Institutions Newtoniennes, seconde » édition, pag. 251, ) de pareilles atmosphères. C'est » par elles que deux objectifs de télescope sont soutenus l'un au-dessus de l'autre sans se toucher ; c'est par » elles qu'une aiguille sèche, un très-petit globule de » mercure, surnagent à la surface de l'eau, en faisant » dans ce fluide, & tout à l'entour de ces corps un » creux proportionné à leur étendue ou diamètre «.

Nous sommes bien éloignés d'attribuer les effets dont nous venons de faire mention à de pareilles atmosphères, dont l'existence n'est nullement prouvée. (Il ne s'agit pas ici des attractions qu'on pourroit attribuer à l'électricité ou à la force magnétique, nous en parlerons dans la suite). Car d'où viennent ces atmosphères ? quelle est leur origine, leur nature ? Comment agissent-elles ? d'où tirent-elles leur force ? quelle cause les retient autour des corps ? ont-elles du mouvement, & d'où leur vient-il ? si elles n'en ont point, comment opèrent-elles ? Voilà des questions auxquelles je ne crois pas qu'on puisse répondre quelque chose de raisonnable, & capable de faire impression sur un homme sensé & un peu instruit.

Disons-nous qu'il y a dans les corps un principe interne qui les pousse les uns vers les autres, ou qui les repousse selon les différentes occasions, puisqu'on n'a pu jusqu'ici trouver aucune matière qui produise cet effet ? J'aimerois autant dire qu'il y a un principe interne qui produit l'irritabilité des fibres

d'un corps animé, qui assimile les alimens aux corps des animaux, qui les nourrit & les fait croître, qui régénère la peau des plaies, unit les vaisseaux ensemble, reproduit dans certains animaux des animaux entiers par le moyen des parties coupées, qui produit la végétation des semences, & ce qu'on appelle la vie des plantes, &c. Quel pourroit-êre ce principe interne ? d'où tire-t'il son origine ? quelle est sa nature ? qui peut prouver son existence ?

186. Les espaces célestes dans lesquels les planètes & les comètes font leurs révolutions sont un vuide presque parfait, puisque les planètes ni les comètes ne trouvent aucune résistance sensible dans leurs mouvemens de la part du milieu ou espace qu'elles traversent, quoique les comètes se meuvent du Nord au Midi, du Midi au Nord, d'Orient en Occident, &c. D'où il suit que l'attraction qui retient les corps célestes dans leurs orbites, ne peut être l'effet de l'impulsion d'un fluide quelconque (\*).

(\*) Un fluide quelconque ne peut agir sur les corps d'une manière proportionnelle à leur masse, puisqu'il ne peut pas choquer deux parties dont l'une seroit au-dessous de l'autre ; cependant nous savons que dans le vuide de Boyle les corps pesans ou légers descendent avec la même vitesse, preuve certaine que toutes leurs parties sont poussées par une cause qui produit le même effet sur chacune d'elles. Cette cause n'est donc pas un fluide, pas même un fluide discret, c'est-à-dire, un fluide dont les parties ne se toucheroient pas immédiatement & mathématiquement les unes les autres, fluide par le moyen duquel un Physicien moderne prétend vainement expliquer la cause de l'attraction : car un tel fluide seroit perdre beaucoup de mouvement aux planètes.

En effet, soit  $t$  la terre transportée dans son orbite  $tBD$  (fig. 132), si comme on le prétend dans ce système, il y a un fluide discret qui tend de tous côtés, vers le soleil  $S$ , & qui retient la terre dans son orbite en la poussant continuellement vers cet astre, & l'empêchant de suivre la tangente  $tA$ , il est visible que le fluide  $At$ ,  $a$  doit pousser les corps terrestres vers la terre & être la cause de leur pesanteur. La terre choque donc à chaque instant le fluide discret qui tend

Qu'on cherche tant qu'on voudra, qu'on imagine des fluides de toutes les espèces, élastiques ou non élastiques, on ne prouvera l'existence d'aucun qui puisse produire les phénomènes des attractions & des

vers le soleil & le choc se fait selon la tangente  $\tau A$ , c'est-à-dire, dans la direction  $\tau A$ ; donc la terre doit continuellement perdre de son mouvement, ce qui n'est pas. Qu'on ne dise pas que le fluide  $a\tau$  répare le mouvement détruit par le fluide  $A\tau$ ; car quand on supposeroit que ces fluides ont des vitesses égales mais opposées, il s'ensuivroit que leurs efforts mutuels se détruiraient si la terre étoit en repos; mais elle perdra de son mouvement si elle se meut dans le sens  $\tau A$ , parce qu'alors allant contre la direction du fluide  $A\tau$ , elle doit éprouver beaucoup de résistance, de manière que sa vitesse après le choc de l'un & de l'autre fluide doit être plus petite qu'auparavant. Mais pour mieux éclaircir ce point, supposons une seule particule de la terre choquée par un seul atôme du fluide qui va selon la direction  $A\tau$ , tandis qu'elle est choquée en même-tems par un pareil atôme du fluide qui va selon la direction  $a\tau$ , & soit supposée la vitesse de la particule terrestre, dont on vient de parler, selon la direction  $\tau A$ , exprimée par l'unité, la vitesse des atômes choquans, étant si l'on veut, exprimée par 100 (on peut employer un nombre plus grand si celui-là ne plaît pas, le raisonnement sera toujours le même), supposons de plus que la particule terrestre choquée est de même masse que chacun des atômes choquans. Par les loix du mouvement, après le choc de l'atôme  $a$ , la particule terrestre aura une vitesse exprimée par la somme des deux mouvemens 100 & 1 de l'atôme & de la particule terrestre, divisée par la somme des masses; ainsi en supposant que la particule terrestre & l'atôme sont représentés chacun par l'unité de masse, ce mouvement sera  $= \frac{101}{2}$ , & considérant l'atôme & la particule terrestre, comme ne faisant plus qu'une même molécule, cette molécule aura un mouvement  $= 101$ . L'atôme  $A = 1$ , qui a, en sens contraire, un mouvement  $= 100$ , choquera cette molécule avec une vitesse  $= 100$ , & après le choc

Tome V.

\*

répulsions, & qui en même-tems ne fasse aucune résistance du moins sensible aux mouvemens des planètes & des comètes. Au contraire tout nous porte à croire que l'attraction & la répulsion dépendent d'une loi immédiate de la nature, par laquelle le Créateur auroit établi que les particules des corps s'attireroient ou se repousseroient d'une manière dépendante de la distance qu'il y auroit entr'elles. 1°. On ne peut sans absurdité nier que le grand Être ait pu établir une telle loi. 2°. Un grand nombre de phénomènes qu'on a rapportés ci-dessus. 3°. La loi de continuité, qui ne permet pas qu'un corps qui va en choquer un autre, arrive jusques à lui avec toute sa vitesse & qu'il y ait un contact mathématique, prouvent suffisamment que les corps agissent les

la vitesse commune sera  $= \frac{101-100}{1} = \frac{1}{1}$ ; c'est-à-dire, que la particule terrestre n'aura plus que le tiers de la vitesse qu'elle avoit; de sorte qu'à chaque instant la terre perdrait les  $\frac{2}{3}$  de son mouvement annuel, ce qui est contre l'observation. De plus que deviendront les atômes choquans après le choc? resteront-ils unis à la terre? dans ce cas comme chaque particule de la terre doit être choquée à chaque moment par un atôme égal, autrement la pesanteur des corps ne sauroit être proportionnelle à la masse, notre globe seroit déjà d'un volume immense & il croîtroit continuellement, ce qui est encore contre l'observation. Dira-t-on que les atômes du fluide choquant sont élastiques & ont un ressort qui les fait réfléchir? d'où vient ce ressort? d'ailleurs en se réfléchissant ils seroient choqués de nouveau par ceux qui les suivent, & il y auroit une confusion inexprimable dans ces chocs continuels & réitérés. D'un autre côté quelle preuve a-t-on qu'il existe dans la nature une si grande quantité d'atômes en mouvement, & que ces atômes ont leur direction vers notre système comme vers un centre?

Le système du fluide discret dont on vient de parler suppose de l'imagination dans celui qui l'a trouvé; mais nous demandons des preuves & non une pure hypothèse, qui, même en l'admettant, ne pourroit satisfaire, aux phénomènes de la nature.

uns sur les autres, qu'ils s'attirent & se repoussent sans se toucher mathématiquement. Dieu a donc voulu qu'à telle distance une particule de matiere en attirât une semblable, & qu'à une distance différente il y eût une répulsion au lieu d'une attraction. Cherchons maintenant s'il est possible, selon quelles loix les corps s'attirent ou se repoussent.

187. J'en remarque d'abord que si une particule de matiere que je désignerai par  $a$  (fig. 133) attire ou repousse, la particule  $b$  égale, celle-ci à son tour doit attirer ou repousser la particule  $a$ . Car par la même raison que  $a$  attire ou repousse  $b$ ,  $b$  doit aussi attirer ou repousser  $a$ ; de sorte que l'attraction & la répulsion doivent être réciproques entre les parties de la matiere, & par conséquent entre les corps composés de ces particules.

En second lieu, si l'on suppose la particule  $c$  égale & située tout auprès de la particule  $a$ , de maniere qu'on puisse sans erreur assignable, considérer les lignes  $cb$ ,  $ab$  comme coincidentes & n'en faisant qu'une, il est visible que chacune des particules  $a$ ,  $c$  exerçant une égale force d'attraction sur la particule  $b$ , celle-ci doit s'approcher deux fois plus vite des particules  $a$ ,  $c$  que les particules  $a$  &  $c$  ne s'approchent de  $b$ . Ainsi l'attraction (& il en est de même de la répulsion) est proportionnelle à la masse attirante, c'est-à-dire, qu'une masse attire par toutes ses parties, & l'attraction est la somme des attractions de toutes les parties; de même l'attraction est proportionnelle à la masse attirée, puisque toutes les parties de cette masse sont attirées. Mais il peut se faire que l'attraction d'une masse double ne soit pas double de celle d'une masse sous-double; parce que les parties attirées de cette masse étant inégalement distantes des parties attirantes d'une autre masse, l'attraction de chaque partie ne sera pas la même. Ainsi quand on dit que l'attraction est proportionnelle aux masses attirantes & aux masses attirées, cela doit s'entendre dans le sens qu'on vient de l'expliquer. Cependant s'il s'agit des globes supposés parfaits & homogènes, il est démontré (68) qu'en supposant aussi que l'attraction suive la raison renversée des quarrés des distances, c'est-à-dire qu'en supposant que l'attraction soit d'autant plus

petite que le carré de la distance est plus grand, ces globes s'attirent de la même manière que si toute leur matière étoit réunie à leur centre.

188. LORSQU'IL s'agit des grandes distances l'attraction suit à peu-près la raison inverse ou renversée des carrés des distances. En effet il est visible que la Lune ne peut tourner autour de la Terre à moins qu'elle ne soit attirée vers la Terre. Ainsi si  $T$  (fig. 134) représente la Terre,  $A$  représentant la Lune, il est évident que si rien ne pouvoit la Lune vers la Terre, la Lune suivroit la tangente  $AB$  de son orbite, mais au contraire si la Lune est poussée par deux forces l'une selon  $AB$  (c'est la force tangentielle), l'autre selon  $AM$  (c'est la force avec laquelle la Terre attire la Lune, force qui agit continuellement), par l'action composée de ces forces, la Lune décrira l'arc  $Am$ , qu'on peut, si l'on veut, considérer comme la diagonale du parallélogramme  $ABmM$ . Or les Géomètres démontrent que la ligne  $Bm$ , ou son égale  $AM$  qui exprime l'attraction de la Terre est à peu-près de 15 pieds, lorsqu'il s'agit d'un arc  $Am$  décrit par la Lune dans une minute de tems. En effet la Lune faisant sa révolution en 27 jours 7 heures 43 minutes à peu-près, si on réduit tout en minutes, & qu'après avoir multiplié la longueur de la circonférence d'un grand cercle de la Terre par 60 (parce que le rayon de l'orbite lunaire est à peu-près 60 fois plus grand que celui de notre globe), on divise le produit par le nombre des minutes du tems de la révolution lunaire, on aura l'arc  $Am$  décrit dans une minute. Maintenant ayant tiré les cordes  $Am$ ,  $mb$ , & l'ordonnée  $mM$ , il est visible (par la propriété du triangle rectangle), que  $AM = mB$  est égale au carré de la corde  $Am$  ou de l'arc  $Am$  qui se confond sensiblement avec cette corde, divisé par  $Mb = Ab$ , car ces quantités diffèrent fort peu l'une de l'autre. Si l'on fait cette division on trouvera environ 15 pieds au quotient. Mais auprès de la Terre un corps décrit dans une seconde par la force de l'attraction de la Terre un espace d'environ 15 pieds, & selon ce qu'on a dit ci-dessus (115), le même corps décroiroit dans une minute ou 60 secondes, un espace 3600 fois plus grand, parce que les espaces parcourus par la cause de la gravité (c'est la même chose



chose que l'attraction) sont auprès de la Terre dans le rapport des quarrés des tems, & que 3600 est le quarré de 60, 1 étant le quarré de 1. Or en considérant l'orbite lunaire comme un cercle, ce qui est permis ici, son rayon sera à peu-près 60 fois aussi grand que celui de la Terre; donc les espaces que la Lune & un corps situé auprès de la surface de la Terre parcouroient en allant vers le centre de la Terre, suivent à peu-près la raison inverse des quarrés des distances par rapport à ce centre. Ainsi dans les grandes distances l'attraction suit à peu-près la raison inverse des quarrés des distances.

189. LA même chose n'a pas lieu dans les petites distances. Car nous avons remarqué ci-devant (180) que certains rayons de lumière (fig. 131) étoient attirés & les autres repoussés. Le rayon  $Eh$  n'est ni attiré ni repoussé non plus que le rayon  $EL$ , mais tous ceux qui sont entre ces deux-là sont repoussés, tous ceux qui passent entre le tranchant  $S$  & le rayon  $Eh$  étant attirés. Donc dans les petites distances la répulsion peut succéder à l'attraction. Mais il y a un point mitoyen, auquel il n'y a ni attraction ni répulsion. D'un autre côté parce que les corps ne parviennent pas au contact mathématique par les principes de la loi de continuité (173); il doit y avoir une répulsion par rapport aux rayons  $Ex$  qui iroient raser le tranchant  $S$ ; mais ces rayons étant en petit nombre, ils ne pourront faire une impression suffisante sur les yeux pour être apperçus. Il doit aussi y avoir entre les rayons  $Ex$  &  $ED$  un point dans lequel il ne se fasse ni attraction ni répulsion, & s'il y a un rayon qui passe par ce point, il doit suivre sa direction sans se détourner à droite ni à gauche; mais parce qu'un seul rayon ne peut suffisamment ébranler l'organe de la vue, on ne l'appercevra pas. Cependant dira-t-on peut-être, on apperceoit le rayon  $Eh$  qui est un rayon simple. Le rayon  $Eh$  est un rayon composé de plusieurs autres dont celui du milieu ne change pas de direction, tandis que les collatéraux de droite & de gauche changent de direction, mais d'une manière insensible, ce qui n'a pas lieu par rapport au rayon qu'on supposeroit passer entre les rayons  $Ex$  &  $ED$ .

190. POUR se former une idée plus claire de la loi  
Tome V. O o

des forces attractives & répulsives, ou plutôt de la force unique naturelle avec laquelle les corps agissent les uns sur les autres & qui selon les distances devient attractive ou répulsive, supposons une courbe  $DEFGHKMOQSTV$  (fig. 135) rapportée à la ligne  $AR$  que nous appellerons l'axe de la courbe, de manière qu'en menant des perpendiculaires (à cet axe) terminées à la courbe, telles que  $ag, br, hd$ , &c. que nous appellerons ordonnées, & prenant le point  $A$  pour l'origine des abscisses  $Aa, Ab, Ad$ , &c. comprises entre l'origine  $A$  & les différentes ordonnées, les points de matière situés à des distances exprimées par ces abscisses s'attirent ou se repoussent avec une force désignée par les ordonnées correspondantes. Mais pour distinguer les répulsions des attractions, nous supposerons que les ordonnées  $ag, r, \&c.$  (\*) élevées au-dessus de l'axe & que nous appellerons ordonnées positives, désignent les répulsions, tandis que les ordonnées  $hd, il$ , &c. menées en sens contraire, c'est-à-dire en-dessous de l'axe (& qu'on nommera ordonnées négatives), indiquent les attractions. Cela posé, puisque dans les grandes distances, l'attraction suit à très-peu-près, la raison renversée des quarrés des distances, nous pourrions supposer que l'arc  $TPV$  a des ordonnées  $po, sv$ , &c. qui diminuent comme les quarrés des abscisses  $AO, Av$  augmentent; mais parce que les corps ne peuvent pas parvenir au contact immédiat, la répulsion doit devenir d'autant plus grande que les corps se rapprochent davantage, afin d'empêcher le contact mathématique en détruisant la plus grande vitesse naturelle que les corps puissent acquérir. Il pourra donc se faire que très-près du contact, à la distance désignée par  $Aa$ , la répulsion exprimée par  $ag$  soit excessivement grande & la répulsion ira encore en augmentant lorsque l'abscisse sera plus petite que  $Aa$ , de manière que les corps éprouvant

(\*) On doit imaginer une infinité d'ordonnées dont chacune correspond à un point de la courbe, les unes positives, les autres négatives; de manière qu'il n'y ait aucun point de la courbe qui n'ait son ordonnée.

des répulsions qui vont toujours en croissant excessivement, elles les empêcheront de parvenir au contact mathématique avec un autre corps ; mais aux points  $E, G, I, L, N, P, R$  les ordonnées positives & négatives étant égales à zéro il n'y aura ni répulsion ni attraction. Entre le point  $E$  & le point  $G$ , la courbe n'ayant que des ordonnées négatives, deux points de matiere situés l'un en  $A$  & l'autre en  $i$  s'attireront avec une force  $il$ , ainsi ils s'approcheront l'un de l'autre par un mouvement qui ira toujours croissant jusqu'à ce que leur distance soit représentée par  $AE$  ; car dans tous les points compris entre  $G$  &  $E$ , la force attractive désignée par l'ordonnée correspondante, pousse ces points l'un vers l'autre ; ainsi au point  $h$ , la force  $hd$  se communiquant à la vitesse avec laquelle les corpuscules s'approchoient déjà l'un de l'autre, augmentera cette vitesse. Lorsque la distance sera égale à l'abscisse  $AE$ , l'attraction sera  $= 0$ , cependant les points continueront de s'approcher en vertu du mouvement acquis ; mais la force répulsive venant à agir continuellement retardera d'abord, arrêtera ensuite le mouvement & enfin repoussera les points qui se rapprocheront par la force attractive comme la première fois, & se repousseront ensuite, de manière qu'ils feront des oscillations en s'approchant & en s'éloignant alternativement : mais si la distance  $AG$  est insensible, les oscillations seront insensibles, & l'on ne pourra les observer.

Si deux points de matiere se trouvent à la distance  $Am$  correspondant à un arc  $GHI$  répulsif, ils se repousseront & parviendront à la distance  $AI$  avec une force égale à celle qui est représentée par la somme des forces répulsives correspondantes à la partie  $mI$  de l'axe, c'est-à-dire avec une force représentée par l'espace  $mnHI$  (\*). Passant ensuite à une distance plus

(\*) Si on conçoit que chaque ordonnée située entre  $m$  &  $I$  a une largeur infiniment petite, la somme de ces ordonnées ou la somme des forces répulsives correspondantes à  $mI$ , sera représentée par l'espace  $mnHI$ , compris entre la partie de l'axe  $mI$ , l'ordonnée  $mn$  & l'arc  $nHI$ .

grande que  $AI$ , ils s'attireront mutuellement ; mais si l'espace ou l'aire  $IKL$  est moindre que  $mnHI$ , la force qui tendra à les faire approcher ne pourra pas détruire tout leur mouvement répulsif, ils passeront dans un nouvel arc répulsif  $LMN$ , & ensuite dans l'arc attractif suivant. Si l'aire comprise entre cet arc & l'axe est plus grande que la force accumulée de répulsion avec laquelle les corpuscules ou points matériels ont franchi la distance  $AN$ , ils ne pourront franchir cet arc ; mais ils seront attirés de nouveau l'un vers l'autre. Si cette aire est justement égale au mouvement de répulsion qu'ils avoient à la distance  $AN$ , lorsqu'ils seront arrivés en  $P$ , ce mouvement se trouvant entièrement détruit, les corpuscules s'arrêteront à cette limite. Si cette aire est moindre que le mouvement dont on vient de parler, les corpuscules franchiront la distance  $AP$  entreront dans l'arc répulsif  $PQR$ , & ensuite dans l'arc attractif  $RSTV$ . On voit par là qu'il y a deux especes de limites, j'appelle *limite de cohésion*, celle dans laquelle la distance augmentant, la force attractive tend à rapprocher les points, & *limite de non-cohésion*, celle dans laquelle la distance venant à augmenter la force répulsive agit pour éloigner davantage les points.

191. DE ce qu'on vient de dire il semble suivre que deux points de matiere ne peuvent parvenir à un contact immédiat & mathématique & que par conséquent les élémens des corps ou leurs parties primitives sont indivisibles & simples. On pourroit cependant dire que les élémens ou les parties primitives dont les corps sont composés ont une très-petite étendue, & que les loix de la répulsion n'ont lieu qu'entre ces élémens & non entre les particules mêmes de l'assemblage desquelles résultent ces mêmes élémens ; de maniere qu'entre ces élémens & non entre les particules mêmes de l'assemblage desquelles résultent ces mêmes élémens, il y a seulement des forces attractives & non des forces répulsives. Il est vrai que si on supposoit qu'une particule située au milieu d'un élément fût anéantie, les autres particules étant supposées séparées par cette opération s'approcheroient par leur force attractive & se choqueroient de maniere que la loi de continuité seroit violée ; mais on peut répondre,

1°. que cela ne peut se faire naturellement, & qu'il ne s'agit ici que des effets naturels. 2°. Que si on supposoit aussi que Dieu détruisit la force répulsive, la même loi de continuité seroit violée dans le choc des corps. 3°. Que rien n'empêche de dire que Dieu ait établi deux espèces de cohésion, l'une entre les élémens des corps, & l'autre bien différente entre les particules mêmes de ces élémens.

Il faut cependant convenir qu'il est difficile de prouver que les premiers élémens de la matière sont étendus & divisibles; car il n'existe aucune partie de matière, qu'on la suppose simple, déterminée ou indéterminée qui exige l'existence d'autres parties voisines & hors d'elle; ainsi rien n'empêche de dire que les élémens des corps ne se touchent pas, qu'ils sont placés à certaines distances les uns des autres & retenus par des forces attractives qui les empêchent de s'éloigner, tandis que les forces répulsives les empêchent de s'approcher les uns des autres (\*).

(\*) Les anciens Scholastiques, au lieu de donner l'explication & la cause d'un effet ou d'un phénomène, disoient souvent qu'un tel effet étoit produit par une cause intrinsèque propre à un tel corps, sans prouver d'ailleurs l'existence de cette cause: & c'est ce qu'on appelle une *qualité occulte*.

Quelqu'un pourroit objecter contre la théorie qu'on vient d'établir, que les forces mutuelles avec lesquelles nous faisons agir les corps les uns sur les autres, sont des qualités occultes, & qu'elles établissent une action entre des corps éloignés les uns des autres. Mais nous ne prétendons pas qu'un corps agisse sur l'autre par une force qui lui soit particulière, nous voulons dire seulement que Dieu en créant cet univers visible, a voulu que les corps fussent déterminés à s'approcher ou à s'éloigner les uns des autres, selon qu'ils se trouvoient plus ou moins distants. Ce sont ces déterminations qui sont les effets de la loi des forces répulsives & attractives que les corps exercent les uns sur les autres. Or, ces déterminations ne sont pas des qualités occultes: chacun comprend ce que c'est que s'approcher, s'éloigner, ou rester dans la même place. Ainsi la loi des forces

192. PARMI les Phénomènes qu'on peut expliquer par les principes de l'attraction, on doit compter celui des tubes capillaires qui a tant exercé les Physiciens modernes. Si l'on plonge un tube capillaire de verre dans

que nous admettons ne peut être mise au rang des qualités occultes, ou des qualités & des propriétés dont on n'a aucune idée distincte. D'ailleurs je voudrais bien qu'on me dit de bonne-foi si l'on comprend bien comment un corps pourroit agir sur un autre corps & lui communiquer du mouvement par un contact mathématique, & comment par le moyen d'un tel contact le mouvement peut passer d'un corps dans un autre. Si l'on dit que cela est ainsi, j'avoue que je n'ai pas assez de pénétration pour le comprendre, & qu'il n'est pas probable que le même mouvement qui n'est qu'une modification d'un corps, puisse devenir la modification d'un autre corps. Si l'on dit que lorsqu'un corps en choque un autre, Dieu pour éviter que les corps ne se pénétrent, c'est-à-dire, n'occupent le même lieu, détruit une partie du mouvement dans le corps choquant & qu'il en donne au corps choqué; pourquoi ne vaudroit-on pas aussi que pour éviter la pénétration, aussi bien que pour maintenir la loi de continuité, Dieu détruise du mouvement dans le corps choquant avant qu'il touche immédiatement & mathématiquement le corps choqué.

On auroit tort aussi de prétendre avec le savant Euler que la force d'inertie est incompatible avec l'attraction, & qu'un corps qui est doué de la force d'inertie ne peut avoir en même-tems la force attractive, comme un corps qui est déjà teint d'une certaine couleur, ne peut pas en même-tems avoir d'autres couleurs. Car, un corps est susceptible de plusieurs forces partielles, il est susceptible de la force d'inertie & de la force attractive, & ces deux forces ne s'excluent pas mutuellement. En effet, un corps A résiste à son changement d'état par son inertie, mais cela n'empêche pas qu'il ne puisse attirer un autre corps B par la force attractive. Cela n'empêche pas non plus qu'il ne puisse être attiré par un autre corps; parce que le corps A n'est pas attiré vers le corps B par un principe ou force intrinsèque au corps

l'eau, il prend la place d'un égal volume de fluide; mais parce que les parties du verre ont plus de densité & de force attractive que celles de l'eau, les particules d'eau qui se trouvent précisément au-dessous du

A. Supposons un corps A en mouvement ou en repos, l'inertie empêche-t-elle qu'on ne puisse le tirer par l'action d'une cause extrinsèque, d'une corde, par exemple? je ne crois pas que personne ose le dire. Mais un corps qui a une couleur déterminée ne peut avoir en même-tems une couleur différente comme cela est évident; aussi l'on ne peut comparer la force d'inertie aux couleurs des corps, ni prétendre que comme une couleur exclut l'autre dans le même corps, la force d'inertie exclut la force attractive. Il faudroit pour cela que la force d'inertie fût la collection de toutes les forces que peuvent avoir les corps, ce qui n'est pas.

J'avoue qu'il y a encore beaucoup de choses inconnues dans la loi des forces que nous admettons, comme le nombre des intersections de la courbe des forces avec son axe, la forme & la grandeur des arcs intermédiaires repulsif & attractif. Ce sont là des choses qui surpassent de beaucoup les forces de l'intelligence humaine, & dont l'Etre suprême semble s'être réservé la connoissance. Mais cela ne détruit pas ce que nous avons déjà avancé, & l'on ne doit pas rejeter ce qui est clair à cause de ce qui est obscur.

En comparant cette théorie avec les Physiques les plus accréditées & les plus estimées en France, on conviendra sans peine que la théorie des forces attractives & répulsives, donne une facilité admirable pour expliquer des phénomènes dont on ne sauroit rendre aucune raison satisfaisante, en admettant l'impulsion immédiate & mathématique.

Qu'on ne dise pas que dans cette théorie des forces que nous admettons, on commet le saut que nous voulons éviter, & que le passage de l'attraction à la répulsion se fait par un saut: ceux qui feroient une telle objection ne comprendroient nullement en quoi consiste cette fameuse loi de continuité de laquelle nous avons parlé ci-dessus. Le saut que nous voulons éviter par cette théorie, consiste en ce que l'on passeroit d'une grandeur à l'autre,

tube sont attirées vers le haut plus qu'elles ne l'étoient quand au lieu du verre il n'y avoit que de l'eau ; ainsi la colonne d'eau qui répond à l'ouverture du tube est soulevée par l'attraction du tube , de maniere qu'elle

sans passer par les quantités intermédiaires. Cela n'arrive pas dans notre théorie, selon laquelle en prenant une force répulsive si petite que l'on voudra, & une force attractive quelconque déterminée, il y a toujours entr'elles toutes les forces répulsives moindres jusques à zéro où l'on a une détermination à conserver l'état précédent de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite ; & ensuite depuis zéro jusque à la force attractive déterminée dont on vient de parler, succèdent des forces attractives intermédiaires. C'est ainsi qu'on va de la force répulsive  $mn$  à la force attractive  $il$ , en passant par les forces répulsives intermédiaires qui se trouvent entre  $m$  &  $G$ , où la force répulsive est zéro ; depuis  $G$  jusques en  $i$  on trouve les forces attractives intermédiaires qui empêchent le saut dont il est parlé dans l'objection. On ne peut pas dire non plus que l'on passe du dernier degré de répulsion au premier degré d'attraction immédiatement & par un saut ; car on passe par un degré intermédiaire zéro dans lequel il n'y a ni attraction ni répulsion. Mais je demande s'il y a un degré d'attraction premier ou dernier, s'il y a une ordonnée  $mn$  si petite qu'elle soit qui soit la première ou la dernière ou la plus petite d'un arc répulsif ? Etant donnée une force répulsive si petite qu'elle soit, étant donnée une ordonnée si petite qu'on voudra, il y en a toujours de plus petites à l'infini sans aucune dernière. Ainsi celui qui se représente un dernier & un premier terme dans les grandeurs des lignes, dans la force, dans la vitesse, celui-là, dis-je, ne comprend nullement en quoi consiste la loi de continuité que nous admettons dans la nature.

Quelqu'un pourra peut-être penser que notre courbe des forces (fig. 135) est trop compliquée, irrégulière & composée de parties qui n'ont aucune connexion, aucun rapport entr'elles. Il y en a même qui prétendent que l'attraction & la répulsion sont des forces de différens genres, qu'il vaut mieux n'en admettre que d'une espèce, & expliquer la répulsion par une attraction moindre.



ne peut plus faire équilibre avec les autres colonnes d'eau voisines, à moins qu'en devenant plus longue l'excès de sa hauteur ne compense sa légèreté. Il est donc nécessaire que cette colonne monte dans le tube

Quoique la courbe des forces soit composée de plusieurs arcs, néanmoins elle est continue, ses différentes parties sont très-bien liées entr'elles & leur figure dépend du rapport qu'il y a entre les ordonnées & les abscisses. Quand à ce qui regarde la répulsion & l'attraction, en admettant que les forces soient de différens genres, on ne peut pas conclure qu'elles n'ont pas lieu dans la nature; puisque les phénomènes démontrent leur existence. Mais il n'est pas plus facile de prononcer que l'attraction & la répulsion appartiennent à différens genres de forces, que de faire voir que le mouvement vers l'orient & le mouvement vers l'occident sont de genres différens. Les quantités négatives & positives étant du même genre, & les attractions & les répulsions pouvant être regardées comme des quantités, dont les unes sont positives & les autres négatives, on doit conclure que la répulsion & l'attraction sont des forces du même genre.

Nous avons démontré ci-dessus que les globes homogènes & dont les parties s'attirent en raison renversée des carrés des distances, s'attirent aussi dans le même rapport inverse des carrés des distances entre leurs centres. C'est à cause de cette perfection ou de cette propriété que le savant Maupertuis a pensé que l'Auteur de la nature avoit choisi cette loi de préférence à toute autre.

Mais quand il s'agit des loix de la nature, les causes finales ne peuvent pas être d'un grand secours. Quel est le mortel qui connoît toutes les fins que l'Etre suprême a pu se proposer en créant cet univers visible? d'ailleurs cette loi par l'effet de laquelle les globes s'attiretoient en raison inverse des carrés des distances qu'il y a entre leurs centres, n'est d'aucun usage dans la nature; puisqu'il n'y a aucun globe parfait dans le monde. La terre est hérissée des montagnes, son tissu est composé de couches de différentes natures, qui n'ont pas par-tout la même densité, & nous pouvons conclure par analogie que la même chose

& s'éleve au-dessus du niveau des autres. Soit BG (fig. 136) un tube de verre plongé dans l'eau du vase SV jusqu'en E, une particule d'eau A, par exemple, placée au-dessous de ce tube est attirée par la masse

a lieu dans les planètes & les comètes. On fait aussi que la Terre, Jupiter, & toutes les planètes qui tournent sur un axe doivent être un peu aplaties; ainsi cette détermination des Géomètres ne peut avoir lieu exactement pour les corps célestes, en supposant même que les élémens de la matiere s'attirent selon la loi qu'admet Maupertuis.

Mais pourquoi, dira-t-on peut-être, les montagnes & les édifices n'attirent-ils pas les corpuscules qui voligent dans l'air? cela vient de ce que l'attraction de la terre est si grande respectivement à celle des plus hautes montagnes, qu'il est bien difficile de s'apercevoir des effets de celle-ci. (Voyez ce que nous avons dit sur l'attraction dans nos Institutions Mathématiques, seconde édition.)

La théorie qu'on vient de développer dans ce chapitre, nous paroît être la véritable clef de la Physique & de la Chymie. Nous nous contenterons pour le présent d'en faire quelques applications, nous réservant d'en faire voir l'usage dans différentes questions que nous traiterons dans la suite.

Les eaux raréfiées par la chaleur du soleil se levent en forme de vapeurs jusqu'à la région supérieure de l'air, & elles ne s'arrêtent que quand elles sont parvenues à un air de même densité & de même pesanteur; là elles composent des nuages qui prennent mille figures bizarres. Bientôt par l'action des vents ou du froid qui condense ces vapeurs & leur fait occuper un moindre espace, elles perdent leur forme, se réunissent en gouttes, ou en flocons de neige & retombent sur la terre sous la forme de pluie, de neige ou de grêle. La plus grande partie de la pluie coule des montagnes & des lieux élevés, dans les rivières & les fleuves qui la transportent à la mer où elle se convertit de nouveau en vapeurs: une partie s'insinue dans la terre & de-là dans les semences & les racines des plantes. La même eau entre dans la composition de corps bien différens: une partie passe dans le corps de la plante, l'autre partie sert à la

du verre plus qu'elle ne l'étoit par l'eau dont le tube a pris la place ; c'est la même chose pour toutes les autres particules d'eau situées au-dessous de B dans l'étendue de la sphère d'attraction du verre que je suppose s'étendre jusqu'en grand A.

composition des feuilles, du fruit, des fleurs. La même eau sert à former le chêne, le sapin & le pin, arbres si utiles à la navigation, le hêtre, les ormes, le cèdre, l'érable, le tilleul qui est l'ornement des promenades publiques, & toutes les espèces d'arbres qu'on voit sur la surface de la terre. Dans la même plante, la même pluie entre dans la composition de parties bien différentes. La forme de la racine du lin, par exemple, diffère beaucoup du corps de la plante. Les ouvriers l'éparent la membrane qui recouvre la tige, & après, l'avoir travaillée de mille manières, ils en tordent les fibres en de longs fils dont on fait différentes toiles si utiles aux hommes. Ces toiles devenues inutiles par un long usage, sont mises dans l'eau & battues avec des marteaux de bois jusques à ce que réduites en un espèce de pulpe, on en puisse faire du papier : ce papier étant jeté dans le feu, une partie se change en une poussière subtile tandis que l'autre se dissipe en fumée. Tels sont les effets admirables qui résultent du changement de situation, de force attractive & repulsive dans les parties de la matière.

Mais parcourons rapidement les divers changemens de la nature selon les différentes températures du ciel. Toutes les parties de notre globe changent continuellement de situation par rapport au soleil, reçoivent ses rayons tantôt plus tantôt moins obliques, tantôt plus tantôt moins long-tems ; ce qui fait que presque toute la nature change alternativement de face. En automne les moissons se dessèchent, les fruits mûrissent, les campagnes se dépouillent peu à peu de leur agréable verdure & les arbres de leurs feuillages qui garantissoient les troupeaux & les hommes des ardeurs de la canicule. En hiver la neige & le froid engourdissent la nature, les fleuves, la mer même peut porter des fardeaux, & les eaux, qui auparavant n'étoient accessibles qu'aux vaisseaux, porrent des camps & des armées. A cette horrible saison succède l'agréable printemps ; la nature semble se déri-

Considérons maintenant l'eau qui est dans le tube B jusqu'en C, en supposant l'espace CB de la même longueur que BA ou que la sphère d'activité du verre, il est visible que si l'on prend une particule *a* à la moi-

der, les neiges disparaissent, les champs produisent de nouvelles herbes, les arbres se couvrent de feuilles, les animaux ne se plaisent plus dans leurs étables ni le laboureur au coin de son feu.

*Nec stabulis jam gaudet equus nec arator igne.*

La terre prend une face plus riante & l'année se passe à travers les ardeurs de l'été.

Il est certain que selon la figure, la masse, la force attractive, la force répulsive des particules des corps, la nature doit produire un nombre infini d'effets différens. Cependant les Physiciens ne sont pas d'accord touchant la nature des premiers principes des corps. Les uns prétendent que la matière est homogène & de même nature dans tous les corps. Les autres soutiennent que la différence des parties primitives de la matière constitue la différence des métaux, des pierres, des arbres &c; mais nous reprendrons cette question dans la Physique lorsque nous traiterons de la nature des corps, nous contentant pour le présent de rapporter une expérience dont le genre humain peut retirer une grande utilité.

Il est certain que le sel marin & le sel de tartre sont de telle nature qu'ils attirent puissamment les vapeurs sulfureuses & plusieurs exhalaisons pernicieuses : cette vertu peut être d'un grand secours dans certaines occasions. Plusieurs ouvriers, comme par exemple, ceux qui s'occupent à fondre le plomb, traitent des matières nuisibles qui laissent évaporer des corpuscules pernicioeux à la santé. Si ces ouvriers ont alors l'attention d'approcher de la bouche & des narines un linge mouillé dans une dissolution de l'un des sels dont on vient de parler, ils pourront éviter le danger de la vapeur. C'est pour la même raison qu'on conseille de se servir de vinaigre blanc contre les exhalaisons pestilentielles. Il seroit utile à ceux qui travaillent dans les mines & les autres lieux infectés de vapeurs mortelles, de faire usage de cette propriété du sel marin & du sel de tartre, pour di-

tié de l'intervalle AB, & une particule  $c$  à la moitié de l'intervalle CB, ces deux molécules seront également attirées, l'une par le tube BC, à la distance Ba, l'autre par le verre CD à la distance Cc :

minuer au moins le danger auquel ils sont exposés. Nous renvoyons à la *Statique des Végétaux* de l'illustre M. Hales ceux qui voudront en savoir davantage sur cette matière.

Supposons que l'on admette une loi unique d'attraction en raison inverse sous doublée des distances  $x$ , ou exprimée par

$\frac{a}{xx}$ , au point de contact la vitesse seroit  $= \infty$  si elle avoit

été finie à une distance sensible. Donc un corpuscule de matière en arrivant au point de contact auroit une vitesse infinie. Mais la vitesse est égale à l'espace E divisé par le tems T ; ainsi en supposant l'espace E fini, de 100 toises, par exemple, le tems T seroit  $= 0$  : c'est-à-dire, que le mobile parcoureroit un espace fini dans un instant indivisible, ce qui est absurde ; puisque le mouvement étant successif, quelle que soit la vitesse, le mobile sera plutôt arrivé au milieu de l'espace qu'il parcourt qu'à la fin. Si l'on vouloit que l'attraction fût

composée de deux parties  $\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^4}$ , ce qui pourroit peut-

être avoir lieu, du moins à peu près pour la force qui pousse la lune vers la terre & les planètes vers le soleil,  $b$  étant une quantité qu'on ne peut déterminer que par les observations ; dans le contact, la force seroit infinie aussi bien que la vitesse ; ainsi cette loi si elle existe dans certaines distances, n'a certainement pas lieu dans les petites. Ceux qui ont voulu exprimer la loi d'attraction par une formule semblable à

celle-ci  $\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x^3}$ , n'ont pas fait attention qu'elle auroit

l'inconvénient de celles dont on vient de parler ; de plus si l'on prend pour positives les distances  $x$  en allant vers la droite, les distances prises du côté de la gauche seroient

négatives, & alors la formule deviendrait  $\frac{A}{x^2} - \frac{B}{x^3}$ , ou

car l'attraction du verre comprise dans la longueur  $Cc$ , étant détruite par celle de la partie inférieure égale  $CB$ , la particule  $c$  est dans le même état par rapport à la partie  $CD$  du tube, & à la même distance que la particule  $a$  par rapport  $BC$ ; ainsi elle est également attirée par le verre  $CD$  de bas en haut. Il en est de même de toutes les particules d'eau comprises dans l'espace  $AB$ , comparées avec celles qui sont dans un espace égal  $CB$ . Il est donc visible qu'il y a deux tubes de verre ou deux portions de tube  $BC$  &  $CD$  qui agissent en même-tems pour élever l'eau & dont chacune est égale à la longueur de la sphère d'attraction du verre. A l'égard des parties du tube qui sont au-dessus du point  $D$  elles n'ont aucune force effective, parce que l'attraction des parties supérieures est anéantie par celles qui sont immédiatement au-dessous.

Mais il y a une troisième cause d'élévation qui vient de la partie  $GE$  du tube qui est hors de l'eau & qui agit à la surface de l'eau intérieurement de bas en haut pour soulever les molécules voisines de l'eau. Il faut convenir cependant que la partie  $EB$  du tube qui est au-dessous du niveau de la surface de l'eau agit également en sens contraire; mais on doit faire attention que celle-ci a pris la place d'un tube d'eau qui agissoit aussi dans l'état naturel, de sorte que la nouvelle attraction additionnelle qui vient de la partie  $EG$  du tube n'est pas toute détruite par la partie inférieure; car les parties situées à la surface de la liqueur, ont, il est vrai de bas en haut, une attraction toute nouvelle qui n'existoit pas avant que le tube de verre y fût plongé, mais elles ont de haut en bas une attraction dont une partie existoit déjà; puisqu'il y avoit de l'eau à la place du verre. Avec un peu d'attention il est aisé de voir que cette nouvelle cause équivaut à un tube d'eau qui seroit placé au dessus de celle du vase & qui auroit le même diamètre que le tube de verre. En effet imaginons que le tube  $FED$  tant au-dedans qu'au-dehors de l'eau soit converti en un tube d'eau. Cette

ce qui revient au même, à des distances égales, mais opposées l'attraction seroit différente, ce qui est absurde.

hypothèse ne change rien à l'égalité & à la destruction des forces opposées EF, ED; mais alors tout se passe au-dedans du vase, comme dans l'état naturel; donc le tube de verre qui faisoit le même effet étoit équivalent à un tube d'eau qui auroit été placé au-dessus du niveau du vase.

Soit  $a$  l'attraction totale d'un petit tube de verre BC d'une longueur égale à la sphère d'activité du verre,  $b$  l'attraction du tube d'eau de même longueur; alors, selon ce que nous avons dit ci-dessus, les particules d'eau placées sous le tube de verre sont attirées par la partie BC, plus qu'elles ne l'étoient quand il y avoit de l'eau à la place du verre, de la quantité  $a - b$ , c'est la différence des attractions du verre & de l'eau. Nous avons encore remarqué qu'il y a aussi une semblable portion de verre CD qui doit produire le même effet & dont par conséquent la force est exprimée par  $a - b$ ; de sorte que vers l'extrémité du tube il y a une force  $2a - 2b$  qui souleve les molécules de l'eau & les pousse vers l'intérieur du tube. Il y a de plus au-dessus de la surface de l'eau une attraction de verre  $= a$ , tandis qu'il y a au-dessous une attraction contraire  $= a - b$ . Retranchant celle-ci de l'attraction  $a$ , il restera  $+b$  qu'il faut ajouter à la force  $2a - 2b$ , le résultat  $2a - b$  exprime la force totale que le verre exerce sur l'eau du vase pour la faire monter dans le tube. Il est donc évident que l'eau monteroit encore en supposant que  $2a$  fût  $> b$ , c'est-à-dire que  $a$  fût un peu plus grand que  $\frac{1}{2}b$ , ou la densité du verre un peu plus de la moitié de celle de l'eau; aussi l'expérience apprend que les tuyaux de plume, quoique plus légers que l'eau, font cependant monter ce fluide.

Lorsqu'un tube ne fait que toucher l'eau, son action est toujours exprimée par la formule  $2a - b$  comme quand le tube est à la surface de l'eau; car les attractions des deux parcelles de verre BC, CD ont lieu sans aucune déduction; puisque n'ayant pas pris la place de l'eau, comme dans l'autre cas elles forment une nouvelle action qu'il faut considérer en entier & qui est  $= 2a$ ; mais aussi la colonne capillaire d'eau qui est dans le tube est poussée en sens contraire par l'attraction de toutes les molécules d'eau situées au niveau du

vase; & cette action  $b$  qui a lieu sur cette colonne n'a pas de même lieu sur les autres. Donc la force qui tend alors à élever l'eau est  $= 2a - b$ .

Quelqu'un pensera peut-être que si la sphère d'attraction du verre est très petite, par exemple, d'un quart de ligne, il ne doit monter dans le tube que la valeur d'un quart de ligne d'eau. Cela arriveroit véritablement si l'attraction du verre ne faisoit simplement que diminuer la pesanteur des parties voisines & leur donner la facilité de monter dans le tube; mais le verre exerce dans cet espace d'un quart de ligne une action beaucoup plus forte que le poids d'un quart de ligne d'eau; ainsi ce quart de ligne d'eau en cédant à l'attraction du tube soulèvera toute l'eau dont il est chargé & par son adhérence entraînera les parties qui la suivent.

On pourra demander encore pourquoi un tube plus épais ne fait pas monter l'eau plus qu'un tube mince, cela vient de ce que les seules parties du verre très-proches de l'embouchure peuvent agir efficacement pour faire monter l'eau dans le tube. Les autres parties qui ne sont pas extrêmement voisines de la lumière du tube, quoiqu'elles soient allégées ou soulevées par l'attraction, ne recevront qu'une impression, qui communiquée à toutes les parties de l'eau du vase, se dispersera dans toute son étendue & ne produira aucun effet sensible.

Le savant M. de Lalande ayant fait rapporter au feu de lampe deux branches capillaires, qui s'ouvroient l'une & l'autre dans une troisième branche comme on le voit dans la fig. 137, & qui faisoient entr'elles un fort petit angle, observa qu'en plongeant dans l'eau les deux branches  $AB$ ,  $AC$  jusques en  $E$ , l'eau s'élevoit jusqu'en  $F$  à la même hauteur à laquelle la branche  $AB$  seule pouvoit la soutenir. Cela vient de ce que la partie  $A$ , c'est-à-dire, le sommet de l'angle des deux branches & toutes les parties environnantes agissent en sens contraire de haut en bas sur la colonne d'eau  $AF$ , & détruisent visiblement une partie des attractions qui avoient lieu vers  $B$  &  $C$ , de manière qu'il ne reste que la valeur de l'attraction d'un seul tube.

Si l'on plonge dans du mercure un tube qui ait une densité moindre de plus de moitié que celle du fluide, celui-ci



celui-ci au lieu de s'élever restera au-dessous du niveau. Les partisans de l'attraction disent qu'alors les particules du mercure, moins attirées par le verre qu'elles ne l'étoient par un égal volume de mercure, doivent avoir moins de légèreté qu'auparavant & monter moins haut. Le pere Gerdil qui a fait un livre entier pour prouver l'incompatibilité de l'attraction avec les phénomènes des tubes capillaires, assure que le mercure bien loin de monter dans un tube d'or, à peine arrive jusqu'au niveau, & que même il ne parvient pas au niveau lorsque le tube n'a qu'un tiers de ligne de diamètre : mais il convient que le frottement du mercure & la résistance qu'il oppose à la désunion de ses parties, est la véritable cause qui l'empêche de monter. Si l'on graisse l'intérieur d'un tuyau capillaire avec du suif ou de l'huile, l'eau n'y monte pas, ce qui vient d'une espèce de force répulsive qui éloigne l'eau du suif ou de l'huile.

Il est aisé de comprendre que selon la nature du verre dont on se sert, & des liqueurs différentes dans lesquelles on plonge les tubes capillaires, l'ascension doit être différente, c'est-à-dire, que différentes liqueurs ne doivent pas monter à la même hauteur dans le même tube capillaire, & que la même liqueur ne doit pas monter à la même hauteur dans des tubes capillaires de même diamètre faits de matières différentes ; parce que l'attraction de ces tubes doit être différente.

Soit  $D$  le diamètre du tube,  $c$  la hauteur à laquelle le fluide est élevé dans le tube capillaire,  $a$  l'attraction de la matière du tube,  $b$  celle des parties du fluide,  $p$  la circonférence d'un cercle dont le diamètre  $= 1$ ,  $D.p$  sera la circonférence d'un cercle dont le diamètre  $= D$ . Si donc on multiplie  $2a - b$  par  $D.p$ , le produit  $D.p.(2a - b)$  désignera la force qui élève le fluide dans le tube capillaire ; mais cette force sou-

tient une colonne de fluide représentée par  $\frac{c p D^2}{4}$  ;

donc on aura l'équation  $D.p(2a - b) = \frac{c p D^2}{4}$ ,

D'où l'on tire  $c = \frac{4(2a-b)}{D}$  ; & parce que  $2a - b$

est une quantité constante lorsqu'on employe le même fluide & des tubes de même matière, les hauteurs auxquelles le fluide doit s'élever dans les tubes capillaires suivent la raison renversée des diamètres de ces tubes. Si  $2a - b$  est  $= 0$ , l'on aura  $c = 0$  ; si  $b$  est  $> 2a$ , le fluide descendra au-dessous du niveau, comme il arrive dans le mercure, par rapport aux tubes de verre. Nous reprendrons cette matière dans notre Physique.

193. Les phénomènes du flux & du reflux de la mer s'expliquent avec la même facilité par les principes de l'attraction. Tous les jours au passage de la Lune par le plan du méridien ou quelques heures après on voit les eaux de l'Océan s'élever sur nos rivages : on assure qu'à Saint-Malo l'élévation est d'environ 45 pieds ; elles se retirent ensuite peu-à-peu & dans six heures environ après leur plus grande élévation, elles sont dans l'état d'abaissement, après quoi elles montent de nouveau, lorsque la Lune a passé par la partie inférieure du méridien ; de sorte que la haute mer & la basse mer s'observent deux fois le jour & retardent chaque jour de 48' plus ou moins comme le passage de la Lune par le méridien. Les marées augmentent sensiblement aux nouvelles & pleines Lunes ou un jour & demi après, & cette augmentation se fait sur-tout remarquer lorsque la Lune est périgée. Il arrive aussi une augmentation vers les équinoxes, & les marées les plus considérables, quand il n'y a pas de causes accidentelles qui dérangent leur cours ordinaires, sont celles qui arrivent dans le cas d'une syzygie périgée dans le tems de l'équinoxe.

Supposons la terre  $BabA$  (fig. 138) parfaitement sphérique, mais couverte par-tout d'une couche d'eau d'une certaine épaisseur, la Lune située en  $m$  attirera les eaux placées en  $N, a, n$  avec plus de force que le centre  $C$  de la terre, qui est plus éloigné de cet astre, mais le point  $C$  sera plus attiré que les eaux situées en  $A$  ; donc les eaux  $N, a, n$  auront plus de tendance vers la Lune que le centre  $C$  de la terre, & le centre  $C$  plus de tendance que les eaux situées

en A. Il est donc visible que les eaux placées en *a* s'élèveront à une certaine hauteur, tandis que les eaux A moins attirées que le centre C resteront un peu en arriere. En effet puisque la Lune & la terre se meuvent autour de leur commun centre de gravité (voyez dans la seconde édition de nos Institutions la théorie des forces centrales), il est clair que les eaux A ne s'approcheront pas de la Lune, en s'écartant de la tangente de la courbe qu'elles décrivent, avec autant de vitesse que le centre C de la terre; ainsi la force d'inertie les tiendra un peu éloignées du point A, ou ce qui revient au même, le centre C de la terre s'approchera plus dans le même tems, de la Lune que les eaux A qui resteront en T (\*), c'est-à-dire que les eaux marines s'élèveront du côté opposé à la Lune aussi-bien que du côté de cet astre. A l'égard des eaux situées en B & *b*, il est visible que si on décompose la force B*m* qui pousse les eaux B vers la Lune, en BC & C*m*, la seule force C*m* agira pour les élever; mais cette force doit être regardée comme égale à celle qui pousse le centre C vers *m*, ainsi elle ne peut produire aucun effet sensible; puisque les eaux ne doivent s'élever que par la différence des forces qui poussent ces eaux & le centre C vers la Lune *m*. Mais la force BC qui presse les eaux B vers la terre augmente leur pesanteur & diminue leur hauteur; c'est pourquoi les eaux qui sont en quadrature avec la Lune doivent s'abaisser, tandis que celles qui sont en conjonction ou en opposition doivent s'élever en s'écartant du centre C de la terre.

Maintenant la terre en tournant sur son axe, tend à

---

(\*) Il arrivera cependant que si la Lune & le Soleil (car le Soleil influe aussi sur les marées comme on le verra dans la suite) sont du même côté, les eaux en A seront un peu moins attirées que le centre C; mais la différence d'attraction sera moindre qu'elle ne l'est par rapport au point C & aux eaux situées en *a*. C'est pourquoi les eaux seront un peu plus élevées en *t* qu'en T comme l'observation le prouve.

éloigner de la Lune le sommet  $\epsilon$  du sphéroïde, tandis que la force attractive de cet astre tend à le ramener dans la ligne  $Cm$ , qui passe par les centres de la Lune & de la Terre; de sorte que ce sphéroïde est obligé de tourner autour de la terre, ce qui ne peut se faire à moins que chaque point  $n$  n'acquière une force centrifuge proportionnelle au rayon  $Pn$  du cercle qu'il décrit; donc (voyez ce que nous avons dit ci-dessus 73) on pourra considérer le demi-sphéroïde  $B\epsilon b$  comme elliptique. Mais dans une ellipse qui diffère peu d'un cercle les excès des rayons par rapport au petit demi-axe (\*) sont comme les sinus des distances à ce petit axe; ainsi le sphéroïde aqueux faisant successivement avec la Lune tout le tour de la terre, les pays situés sous le grand axe seront inondés, ceux qui seront sous le petit axe auront basse mer & la différence entre la basse mer & la hauteur de l'eau pour un instant quelconque sera l'excès d'un des rayons  $Ci$  sur le petit demi-axe  $Cb$  de l'ellipse; de sorte que la hauteur de la marée au-dessus des basses eaux pour un lieu quelconque est égale à la plus grande hauteur  $at$  de l'eau multipliée par le carré du cosinus de la distance du lieu au sommet de l'ellipsoïde dirigé vers l'astre. c'est pourquoi la basse mer a lieu quand l'astre est à l'horizon, & la haute mer lorsqu'il est au méridien. Si l'astre & le lieu donné sont sous l'équateur, la hauteur de la marée sera comme le carré du cosinus de l'angle horaire, c'est-à-dire comme le carré du cosinus de l'angle que font entr'elles les lignes tirées du centre de la terre à l'astre & au lieu donné.

Si le lieu donné est à quelque distance de l'équateur, la hauteur de la marée est comme le carré du cosinus de la

---

(\*) Par la propriété de l'ellipse, si l'on fait  $b = at$ ,  $Ca = 1$ , l'on aura  $Ca = 1 : at = b :: Pn = \sin. nCb : nf = b. \sin. nCb$ . Mais parce que la demi-ellipse  $B\epsilon b$  diffère très-peu du demi-cercle  $Bab$ , on peut supposer 1°. que la ligne  $Ci$  est perpendiculaire sur  $fi$ ; 2°. que les triangles  $Cnp$ ,  $fn i$  sont semblables; ainsi l'on aura la proportion  $Cn = 1 : Pn = \sin. nCb :: nf : ni = b. (\sin. bCn)^2$ .

latitude; mais si la latitude est assez considérable pour que la Lune ne se couche pas dans certains tems, il n'y a alors qu'une seule marée dans un jour, parce que la Lune ne s'approche qu'une fois de l'horison dans l'espace d'un jour. Sous le pôle il n'y a aucune marée diurne, parce que la Lune est à peu-près également éloignée du zénit pendant toute la journée; de manière que le sphéroïde aqueux tourne autour du pôle sans s'élever plus d'un côté que de l'autre. Dans les lieux qui ne sont pas si proches du pôle, il y a deux marées sensibles l'une répond à peu-près au passage de la Lune par la partie supérieure du méridien, l'autre au passage du même astre par la partie inférieure.

Si la Lune est capable de changer la surface des eaux marines en leur faisant prendre la figure d'un sphéroïde allongé, on sent bien que le Soleil doit produire un effet semblable. Aussi en ne faisant pas attention à la Lune, il est évident que si le Soleil n'est pas dans le plan de l'équateur, la marée pour un lieu situé sous ce cercle sera comme le carré du cosinus de la distance de cet astre à l'équateur (cette distance est appelée *déclinaison* par les Astronomes); car cette distance, en supposant comme nous le faisons ici l'astre & le lieu donné sous le méridien, est la même que la distance du zénit à l'astre, ou la distance angulaire du point donné au sommet de l'ellipsoïde. Si le lieu donné n'est pas situé sous l'équateur, la marée supérieure (c'est celle qui arrive lorsque l'astre est au-dessus de l'horison) sera la plus grande quand l'astre passera le plus près du zénit, ou ce qui revient au même, lorsque la déclinaison de l'astre sera du côté du pôle élevé, au contraire la marée inférieure (qui arrive lorsque l'astre est au-dessous de l'horison) sera alors plus petite que quand l'astre étoit dans le plan de l'équateur, parce que le point opposé à l'astre (ce point forme l'extrémité opposée de l'ellipsoïde) sera plus éloigné du zénit que de l'équateur, lorsque l'astre passera par la moitié inférieure du méridien. Cependant les vents du sud & de l'ouest qui sont plus fréquents & plus forts en Europe après les équinoxes que vers le solstice d'été contribuent peut-être à déranger cette théorie; car on observe dans cette partie du monde que les marées sont plus grandes en

général après les équinoxes que vers le solstice d'été. D'un autre côté la marée du solstice est plus resserrée entre le continent de l'Amérique & celui de l'Afrique que celles des équinoxes ; & ainsi elle doit être moins sensible sur nos côtes. Ajoutons encore que la force centrifuge sous le tropique étant moindre que sous l'équateur, les eaux y sont plus pesantes & obéissent plus difficilement à l'action de l'astre attirant.

Les marées participent des mouvemens du Soleil & de la Lune. Dans les syzygies, c'est-à-dire dans les nouvelles & pleines Lunes, le sphéroïde aqueux produit par la force du Soleil & celui qui est produit par l'attraction lunaire sont dirigés dans le même sens : ainsi l'allongement du sphéroïde est la somme des allongemens particuliers que la Lune & le Soleil peuvent produire séparément.

Mais dans les quadratures les axes de ces sphéroïdes se coupent à angles droits, de manière que le grand axe du sphéroïde solaire étant situé sur la même ligne que le petit axe du sphéroïde lunaire, le Soleil élève les eaux là où la Lune les abaisse, & réciproquement ; ainsi les marées de syzygies sont la somme des effets des forces attractives du Soleil & de la Lune ; mais les marées des quadratures en sont la différence. L'action de la Lune pour élever les eaux (il en est de même de celle du Soleil) étant une force décomposée dans le sens du rayon de la terre, elle suit la raison inverse des cubes des distances (\*). Et si la force moyenne de la Lune est exprimée

(\*) Soit  $TA$  (fig. 139) l'orbite de la Terre,  $S$  le Soleil,  $NF$  l'orbite de Jupiter. Décomposons la force avec laquelle Jupiter situé en  $N$  attire la Terre  $T$ , en deux autres, dont l'une soit dirigée selon  $TP$  parallèlement à  $SN$ , & l'autre selon la direction  $ST$  du rayon vecteur. La force absolue de Jupiter pour attirer la Terre est comme sa masse  $N$  divisée par le quarté de la distance  $NT$  à la Terre, ou

$$\text{est} = \frac{N}{NT^2}.$$

Ayant construit le parallélogramme  $PNST$ ,

il est visible que la force selon  $NT$  peut se décomposer en

par  $2\frac{1}{2}$ , la force périégée sera  $= 3$  & la force apogée,  $= 2$ . En effet les cubes des parallaxes extrêmes ou de  $53' 51''$ , & de  $61' 29''$  sont à peu-près comme 2 & 3 ; or ces parallaxes sont en raison inverse des distances (\*). Les cubes des distances du Soleil à la terre en hiver &

deux autres, l'une selon TP, l'autre selon TS. Or le triangle PTN donne  $NT : TP = SN : \frac{N}{TN}$  (force selon

TN) :  $\frac{N \cdot SN}{NT}$ . Mais cette force qui tend à éloigner la

Terre du Soleil selon une direction parallèle à SN, est inutile pour notre objet. Le même triangle PTN donne

$TN : PN = ST : \frac{N}{NT} : \frac{N \cdot ST}{NT} = \frac{M \cdot r}{D^3}$ , en faisant

la masse N de Jupiter  $= M$ , le rayon ST de l'orbite terrestre  $= r$ , & la distance TN de la Terre à Jupiter  $= D$ . Cette expression nous apprend que la force perturbatrice qui agit dans la direction du rayon vecteur, & qui modifie la force centrale de la planète, suit la raison inverse du cube des distances. Maintenant la force qui agit en  $n$  (fig. 138) pour élever les eaux vers  $m$  est dans le même cas, puisqu'on peut la décomposer en deux autres dont l'une agit dans la direction du rayon Cn.

(\*) La parallaxe horizontale d'un astre (qu'on désigne ordinairement sous le nom de *parallaxe* sans ajouter horizontale), est le plus grand angle sous lequel on peut voir le demi-diamètre terrestre à la distance de l'astre ; la plus grande parallaxe est celle de la Lune qui ne va pas à un degré. Mais par les principes d'optique lorsque les angles sont assez petits, les distances d'un même objet vu à différentes distances, sont en raison inverse des angles optiques sous lesquels ils sont vus. C'est pourquoi l'on peut dire que la distance de la Lune à la Terre est à celle du Soleil à la Terre comme la parallaxe du Soleil est à celle de la Lune.

en été sont entr'eux comme 1 : 1. 106 ou à peu-près comme 1 : 1. 1 ; de sorte qu'en hiver la force du Soleil est d'un dixième environ plus grande qu'en été.

Quand la Lune & le Soleil sont à quelque distance l'un de l'autre, chacun de ces astres produit une élévation différente dans un lieu donné & la somme de ces élévations donne la hauteur de la marée. La force de la Lune étant environ  $2\frac{1}{2}$  fois aussi grande que celle du Soleil, le sommet du sphéroïde acqueux doit approcher environ  $2\frac{1}{2}$  fois plus de la ligne qui joint les centres de la Lune & de la Terre, que de celle qui va du centre de la Terre à celui du soleil, & le point de la haute mer n'est jamais éloigné de la Lune de 15 degrés ; de sorte que le passage de la Lune au méridien est la principale circonstance qui influe sur le tems de la haute mer, & dans une mer libre & ouverte l'intervalle entre le tems de la haute mer (n'ayant pas égard à l'inertie des eaux) & le passage de la Lune au méridien peut aller jusqu'à 1 heure 3' environ, lors même que la Lune est apogée & qu'elle est éloignée du Soleil de  $60^{\circ}$ . Soit  $MN^mT$  fig. 140) le sphéroïde acqueux dont le sommet  $N$  désigne le point de la haute mer, le Soleil étant situé en  $S$  & la Lune en  $L$ . Supposons la distance  $mM$  de la Lune au Soleil (ou l'angle  $LCS$  mesuré par  $mM$ )  $= 60^{\circ}$ , si l'on fait  $= 1$  l'élévation que peut produire la seule action du Soleil, *cos.*  $NM$  représentera l'élévation produite en  $N$  par la seule action solaire, & supposant que la Lune est périgée, 3 *cos.*  $Nm$  exprimera la hauteur produite par la force de la Lune, & les deux forces ensemble donneront la hauteur totale produite en  $N$ . Si l'on suppose  $NM$  de  $51^{\circ}$  &  $NM$  de  $9^{\circ}$ , on aura les deux quantités 0. 3961 & 2. 9266 dont la somme 3. 3227 exprimera la hauteur totale de la marée. Si l'on suppose  $mN = 9^{\circ}\frac{1}{2}$ , on trouvera 2. 9183 & 0. 4046, ce qui fait 3. 3229. Enfin  $mM$  étant toujours de  $60^{\circ}$ , si on fait  $mN = 10^{\circ}$ , l'on aura 2. 9095, & 0. 4132, ce qui donne 3. 3227 pour la hauteur de la marée, & soit qu'on fasse l'arc  $mN$  plus petit ou plus grand que  $9^{\circ}\frac{1}{2}$ , l'arc  $mM$  étant toujours supposé de  $60^{\circ}$  & la Lune périgée, on trouvera que l'élévation des eaux sera plus petite que lorsque  $mN = 9^{\circ}\frac{1}{2}$ . On peut voir par là comment on peut s'y prendre dans les autres situations du Soleil



& de la Lune pour trouver le point de la haute mer.

Le retardement diurne du passage de la Lune par le méridien étant de 1 h. 16 minutes lorsque la Lune est périgée,  $9^{\circ} \frac{1}{2}$  correspondent à 40' de tems. C'est pourquoi la haute mer précédera de 40' le passage de la Lune par le plan du méridien. Quand la Lune est apogée sa force étant alors double de celle du Soleil, la haute mer, pour  $60^{\circ}$  de distance entre ces astres, sera exprimée par 2.366, & le sommet du sphéroïde acqueux sera à  $15^{\circ}$  de la Lune. Ces  $15^{\circ}$  font  $62' \frac{1}{2}$  en tems lunaire; de sorte que dans l'apogée il y a environ 63' de différence entre le passage de la Lune par le méridien & l'instant de la haute mer.

Pour faire comprendre aux commençans comment on a pu déterminer (à peu-près, car on ne doit pas regarder toute cette théorie comme bien rigoureuse) le rapport des forces du Soleil & de la Lune pour élever les eaux de la mer, supposons que dans les distances moyennes  $mN$  réponde à 14' &  $MN$  à 34' de tems, il est aisé de sentir que ces deux quantités sont en raison inverse des forces de la Lune & du Soleil; donc la force de la Lune sera à celle du Soleil comme 34:14 ou à peu-près comme  $2 \frac{1}{2}$ :1 ou comme 5:2 (\*). M. Newton

(\*) Si la Lune étoit transportée à la distance du Soleil, sa force pour élever les eaux diminueroit comme le cube de la distance auroit augmenté; mais la parallaxe moyenne de la Lune est environ  $57' 3''$ , celle du Soleil étant  $8''.5$  à peu-près, (M. l'Exell l'a fait de  $8''.63$ , mais la différence avec  $8''.5$  n'étant que de 0.13" on peut la négliger ici). Donc la distance moyenne de la Lune à la Terre est à la distance du même astre transporté au Soleil comme  $8''.5$ : $57' 3''$ ; ainsi cette distance est exprimée par  $\frac{57.7''}{8''.5}$ . Si l'on divise la force actuelle de la Lune  $= 2 \frac{1}{2}$

par le cube de cette dernière quantité, l'on aura la masse  $L$  de la Lune, celle du Soleil étant supposée  $= 1$ . Si nous supposons la masse de la Terre  $= \frac{1}{361416}$  (dans le Traité des Forces Centrales dans nos Institutions Mathématiques,

ayant comparé les marées des syzygies équinoxiales avec celles des quadratures qui sont produites par la différence des actions du soleil & de la Lune, conclut que la force de la Lune est à celle du soleil comme 4.4815 : 1. M. Daniel Bernoulli ayant comparé les marées des syzygies qui arrivent à Saint-Malo, avec celles des quadratures en avoit conclu le rapport des forces de la Lune & du soleil comme 13 : 7. Il est aisé de comprendre que la haute mer des syzygies équinoxiales étant supposée = A, & celles des quadratures

équinoxiales = D, la force  $x$  de la Lune est =  $\frac{A + D}{2}$ .

& que la force  $z$  du soleil est =  $\frac{A - D}{2}$ ; puisque de deux

quantités la plus grande est égale à la moitié de leur somme, la plus petite étant égale à la moitié de la différence. Mais les mouvemens postérieurs de la mer sont altérés par les précédens ; c'est pourquoi les eaux agitées & troublées quelques jours après les syzygies & les quadratures, s'élèvent plus que ne le demande le rapport des forces de la Lune & du soleil. D'un autre côté sur les côtes où l'on a fait ces observations, les flux sont augmentés par la figure des rivages & les réflexions des eaux, ce qui les rend plus grands que dans une mer libre ; de sorte que les rapports des forces lunaire & solaire qu'on voudroit conclure des observations faites en différens ports ne s'accorderont nullement entr'elles : la force d'inertie, & les circonstances locales empêchant que les marées ne suivent la proportion qu'exigeroit la théorie. C'est l'inertie qui fait que la plus

nous avons donné la méthode de connoître la pesanteur & la masse du soleil, celle de Jupiter, &c.), celle du soleil étant toujours prise pour l'unité, & que nous divisons la masse  $L$  par cette fraction, nous aurons  $\frac{1}{71}$ , c'est-à-dire, que le rapport de la masse de la Lune à celle de la Terre sera comme 1 : 71 ; ainsi en supposant la masse de la Terre = 1, celle de la Lune n'en sera qu'environ la  $\frac{1}{71}$  partie.

grande élévation a lieu deux ou trois heures après le passage du Soleil & de la Lune au méridien, que les plus grandes marées de chaque mois arrivent environ deux ou trois jours après les nouvelles & pleines Lunes, & les plus petites deux ou trois jours après les quadratures.

Si les mers sont fort étroites les eaux ne peuvent pas s'élever sensiblement. Ce qui élève les eaux, c'est leur communication entr'elles, l'augmentation de leur poids dans les quadratures, & la diminution dans les syzygies. Si l'étendue de la mer est peu considérable, il ne peut y avoir en même tems des eaux qui soient en quadrature avec celles qui répondent à l'astre qui passe par le méridien ; si elle est encore moins considérable, toutes les eaux sont sensiblement attirées avec la même force, & comme il n'y en a pas vers le rivage qui puissent prendre la place de celles qui l'abandonneroient elles doivent rester tranquilles ; c'est pour cette raison que dans la mer Pacifique les marées sont plus grandes que dans l'Océan Atlantique, & que dans la zone torride entre l'Amérique & l'Afrique où la mer est plus resserrée, elles sont moins considérables que dans les zones tempérées. Dans la mer Atlantique l'eau ne peut s'élever sur un rivage qu'elle ne baisse sur l'autre. La Méditerranée n'ayant environ que  $60^{\circ}$  en longitude ne doit éprouver qu'un flux très-petit ; il est cependant plus sensible dans la mer Adriatique qui a assez de largeur. Les marées sont fort compliquées aux environs du Détroit de Gibraltar : on y remarque des lificres qui ont des mouvements différens ; celles qui sont sur les côtes de chaque côté paroissent venir des marées de la Méditerranée & les deux autres qui les touchent de celles de l'Océan. La mer Caspienne & la mer Baltique n'ont point de marées à cause de leur peu d'étendue. Mais dans les mers ouvertes & qui s'étendent beaucoup d'Occident en Orient, comme la mer Atlantique, l'Océan Pacifique & la mer d'Ethiopie l'eau s'élève à 6, 9, 12, & quelquefois même jusqu'à 15 pieds. Les rivages, les golfes, les bayes, les détroits, les bancs de sable doivent faire varier beaucoup les marées. On conçoit en effet facilement que si une lame d'eau de 8 pieds de hauteur & de 10 lieues de largeur vient à être poussée dans un

détroit qui aille en se rétrécissant , de maniere que cette masse d'eau soit obligée de se resserrer dans la largeur d'une lieue par exemple , elle s'élevera considérablement , & formera une marée très - haute. Dans la mer Atlantique & sur les côtes occidentales d'Europe le flux & reflux arrive assez comme le demande la position de la Lune , & l'eau parvient communément à sa plus grande hauteur environ trois heures après le passage de cet astre par le méridien sur les côtes d'Espagne , de Portugal & sur celles de l'Occident d'Irlande ; de là elle s'écoule par les détroits adjacents , se répand par deux courans au Midi de l'Angleterre & au Nord de l'Ecosse , s'élève plutôt où elle arrive plutôt , & commence à baisser dans certains endroits , tandis que les courans avancent encore dans d'autres lieux plus éloignés. Quand ces courans reviennent ils ne produisent point de marées , par ce que l'eau s'écoule trop rapidement , jusqu'à ce que par un flux poussé par le vaste Océan le retour du courant soit arrêté & que l'eau commence à s'élever de nouveau. On sent donc qu'il doit y avoir de grandes différences pour le tems de la marée , comme il y en a pour la hauteur par la situation des rivages , selon qu'ils sont plus ou moins escarpés , qu'ils ont plus ou moins de sinuosités pour retenir l'eau , & qu'ils se présentent plus ou moins directement aux courans. Aux embouchures de la Garonne & de la Loire qui sont dirigées vers le grand Océan , aux tems des nouvelles & pleines Lunes , le flux arrive environ trois heures après le passage du Soleil & de la Lune par le méridien ou trois heures après midi , ce qui est le tems où il doit naturellement arriver ; ainsi la marée n'a pas été retardée par les côtes , mais y est produite par les eaux qui viennent directement de l'Océan , il n'en est pas de même à Ostende , au Havre , à Saint-Malo , à Dunkerque , le flux n'arrive dans ces lieux que par les courans qui se forment sur les rivages & par conséquent successivement , savoir à six heures à Saint-Malo , à neuf heures au Havre , à minuit à Dunkerque & à Ostende. A Dunkerque la haute mer s'observe souvent à minuit aux tems des syzygies ; mais ce flux est une suite de celui qui a été produit par le précédent passage du Soleil & de la Lune au mé-

ridien, & qui n'arrive à Dunkerque qu'environ 12 heures après ce passage. A Batsham, port du Royaume de Tonquin, il y a deux entrées, l'une par la mer de la Chine entre le Continent & *Manille*, l'autre par l'Océan Indien entre le Continent & l'Isle de *Borneo*; le flux arrive par l'une de ces entrées à la troisième heure de la Lune; & six heures après par l'autre entrée, c'est-à-dire, à la neuvième heure de la Lune, à cause de leur différente situation. C'est pourquoi si les marées sont égales, l'une arrivant tandis que l'autre se retireroit, l'eau doit rester tranquille sans aucun mouvement. C'est aussi ce qui arrive lorsque la Lune est dans le plan de l'équateur, parce qu'alors les marées du matin seront égales à celles du soir; mais si la Lune commence à décliner du même côté de l'Equateur que Batsham (situé à 20° 50' de latitude septentrionale) les marées qui se suivent ne seront point égales; de sorte que celle qui arrive d'un côté surpassera celle qui vient de l'autre côté, la marée durera douze heures, & l'on n'aura qu'un flux & un reflux par jour. Ce sera la même chose lorsque la Lune aura une déclinaison australe, avec cette différence que dans le premier cas les eaux auront leur plus grande hauteur environ vers les six heures après le coucher de la Lune, & qu'elles seront basses à son lever, tandis que dans le second cas elles seront hautes au lever & basses au coucher de la Lune.

Maintenant si nous voulons trouver la hauteur à laquelle le Soleil peut élever les eaux, nous y parviendrons au moyen des réflexions suivantes. La pesanteur  $p$  d'un corps ou sa tendance vers un autre corps

attirant  $m$  situé à la distance  $D$ , est comme  $\frac{m}{D^2}$  (voyez

la théorie des forces centrales dans nos Institutions

Mathématiques); ainsi l'on a  $p = \frac{m}{D^2}$ . Si l'on suppose

que le corps attiré tourne autour du corps  $m$  supposé

immobile, avec une vitesse  $v$ , l'on aura  $p = \frac{v^2}{D}$ . En

effet le sinus versé  $AM$  (fig. 134) qui indique la quan-

ité dont la force centrale rapproche le mobile A dans le tems employé à parcourir l'arc infiniment petit  $Am$ , est égal au quarré de cet arc, divisé par le diamètre; puisque si l'on conçoit une petite corde qui se confonde avec cet arc, l'on aura un triangle rectangle  $Am b$  dans lequel le quarré du côté  $Am$  sera moyen propor-

tionnel entre  $AM$  &  $Mb = Ab$ ; donc  $AM = \frac{Am^2}{2 \cdot AT}$ ;

ainsi  $p = AM$  est comme  $\frac{Am^2}{AT}$ , ou comme  $\frac{vv}{D}$ , à cause

que l'espace  $Am$  est comme la vitesse laquelle est constante dans un cercle. Mais la vitesse est comme la circonférence divisée par le tems  $t$  employé à la parcourir, & les circonférences sont comme les rayons;

donc  $v = \frac{D}{t}$  &  $vv = \frac{D^2}{tt}$ , d'où l'on tire  $p = \frac{vv}{D}$

$= \frac{D}{tt} = \frac{m}{DD}$ , ou  $m = \frac{D^3}{tt}$ ; c'est-à-dire, que si un

corps circule autour d'un autre, la masse du corps attirant est comme le cube de la distance entre les deux corps divisé par le quarré du tems périodique de celui qui circule: c'est de ce théorème que nous avons tiré la méthode de peser les astres dans nos Institutions Mathématiques.

Supposons maintenant que  $LNm$  (fig. 141) représente l'orbite lunaire,  $T$  la Terre,  $S$  le Soleil, & décomposons la force  $SL$  du Soleil en  $LT = SM$  &  $LM = TS$ , cette seconde force qui tend à rapprocher la Lune  $L$  du Soleil selon une direction  $LM$  parallèle & égale à celle selon laquelle la terre tend vers le Soleil nous étant inutile, considérons la force  $LT$ ; il est visible qu'elle augmente la pesanteur de la Lune sur la Terre, & que cette augmentation est à la force avec laquelle la Lune (ou la Terre) pèse vers le Soleil, comme la distance de la Lune à la Terre est à sa distance au Soleil, c'est-à-dire, que la force qui augmente la pesanteur de la Lune sur la Terre dans les quadratures, est à la pesanteur de la Terre sur le Soleil comme le rayon de l'orbite lu-

naire à celui de l'orbite terrestre ou comme  $r : R$ , en faisant le rayon  $TL = r$  &  $SL = ST = R$ . Mais selon ce qu'on a dit ci-dessus, la pesanteur de la Terre sur le Soleil est à la pesanteur originaire de la Lune sur la

Terre, comme  $\frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$ , en supposant les tems périodiques des révolutions de la Terre & de la Lune désignés par  $T$  &  $t$ ; donc l'augmentation de la pesanteur de la Lune par l'action du Soleil dans les quadratures est à sa pesanteur naturelle en raison composée

de  $r : R$  & de  $\frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$  (puisque dans ces raisons  $R$  &

$\frac{R}{T^2}$  expriment une même chose, je veux dire la pé-

santeur de la Terre sur le Soleil) ou comme  $\frac{r.R}{T} :$

$\frac{R.r}{t^2}$ , ou comme  $t^2 : T^2$ , ou en raison inverse du carré

du temspériodique de la Terre autour du Soleil au carré du tems périodique de la Lune autour de la Terre. L'on fait que  $T = 365$  jours 6 h. 9' 14", &  $t = 27$  jours 7 heures 43'. Donc  $t^2 : T^2 :: 1 : 178.73$ ; de sorte que la pesanteur de la Lune dans les quadratures augmente de la  $\frac{1}{178}$  partie de sa pesanteur.

Maintenant si nous avons les deux quantités  $1$  &  $1 + b$ ,  $b$  étant une quantité très-petite, les carrés  $1$  &  $1 + 2b + b^2$  seront entr'eux comme  $1$  &  $1 + 2b$ , c'est-à-dire différeront du double de la différence entre les racines  $1$  &  $1 + b$ . Si  $b$  représente la distance de la Lune à la Terre, &  $1$  celle de la Terre au Soleil, qui est environ 400 fois aussi grande que la première; on pourra supposer que les carrés de ces distances ne diffèrent entr'eux que de la quantité  $2b = \frac{1}{500}$ . D'où il suit que la différence de l'action du Soleil sur la Lune située en  $m$  ou en  $N$ , c'est-à-dire en conjonction ou en opposition, & par conséquent la diminution de la pesanteur de la Lune sur la Terre dans les syzygies, est comme  $2b$ ;

ou comme le diamètre de l'orbite lunaire (\*), tandis que l'augmentation dans les quadratures est comme le rayon de la même orbite ; de sorte que la diminution de la pesanteur est double de l'augmentation qui est  $= \frac{1}{178}$ . Ainsi la diminution est  $\frac{1}{178}$  de son poids. Mais la pesanteur de la Lune est à la pesanteur des graves à la surface de la terre comme 1 : 3600 en supposant le rayon de l'orbite lunaire 60 fois plus grand que celui de la terre ; donc l'augmentation du poids de la Lune dans les quadratures est à la pesanteur des graves à la surface de la Terre comme 1 :  $178 \times 3600 :: 1 : 640800$ . Maintenant si nous supposons que le Soleil agit sur les eaux  $n$  situées sur la surface de la Terre, & qui sont en quadrature avec cet astre, sa force pour les comprimer, ou pour les pousser vers le centre T de la Terre sera comme le rayon T  $n$  de notre globe ou sera  $= 1$ , la force T L ou l'augmentation de la pesanteur de la Lune étant désignée par 60 : d'où il suit que l'augmentation du poids des eaux placées en quadrature avec le Soleil est à leur pesanteur naturelle sur la Terre comme 1 :  $640800 \times 60 :: 1 : 38448000$ . La diminution sous le Soleil & dans le point opposé est double, & comme cette diminution & cette augmentation contribuent à élever les eaux, l'on peut dire que la force du Soleil pour élever les eaux marines, est à leur pesanteur naturelle comme 3 :  $38448000 :: 1 : 12816000$ , ou comme 1 : 12868200, selon le calcul de M. Newton plus exact que le précédent en ce que nous avons supposé la distance de la Lune à la Terre de 60 demi-diamètres terrestres au lieu de 60  $\frac{1}{2}$ . Nous avons prouvé dans la seconde édition de nos Institutions Mathématiques

(\*) Dans la conjonction, la Lune  $m$  est plus attirée vers le Soleil que la Terre T, & dans l'opposition la Terre T est plus attirée que la Lune N ; donc dans le premier cas la pesanteur de la Lune sur la Terre est diminuée ; dans le second cas la Terre tend vers le Soleil selon la direction TS avec plus de vitesse que la Lune, qui par conséquent pèse moins sur la Terre.

que



que la force centrifuge sous l'équateur est  $\frac{1}{11}$  à peu-près de la pefanteur. Donc l'action du Soleil pour élever les eaux est à la force centrifuge sous l'équateur comme  $1 : \frac{11868100}{217} :: 1 : 44527$  ; ainsi l'action du Soleil pour élever les eaux est à peu-près le  $\frac{1}{44527}$  de la force centrifuge. Mais celle-ci (73) éleve les parties de l'équateur de 14199 toises ou de 85194 pieds ; donc  $\frac{85194}{44527}$  pieds exprimera la quantité de l'élévation des eaux produite par le Soleil ; or cette quantité est à peu-près 23 pouces ou environ 2 pieds ; donc le Soleil peut élever les eaux de l'Océan à la hauteur d'environ 2 pieds, la Lune périgée ayant une force triple les élèvera la hauteur de  $5\frac{1}{2}$  pieds, tandis que la Lune apogée ne pourra les élever qu'à la hauteur d'environ 4 pieds ; mais lorsque la Lune sera dans la moyenne distance, sa force, qui est alors  $2\frac{1}{2}$  aussi grande que celle du Soleil, les fera monter à la hauteur d'environ 5 pieds. Ainsi les marées moyennes doivent en pleine mer être d'environ 7 pieds, les grandes d'environ 8 pieds & les plus petites d'environ six pieds ; de sorte que les nombres 6, 7, 8 sont un peu trop grands. Mais cette hauteur est souvent diminuée par la résistance du fond ; car elle n'est que de trois pieds à l'Isle de Sainte-Hélène, au Cap de Bonne-Espérance, aux Philippines & aux Molucques, & d'un pied (dit-on) dans le milieu de la mer du Sud. Au contraire elle est souvent augmentée par la situation & la figure des côtes, & à Saint-Malo la marée monte jusqu'à 45 pieds & quelquefois davantage.

*Application de la théorie des forces Physiques  
à la Mécanique.*

194. SOIENT supposés trois points A, C, B (fig. 142) ; si les points A, B se trouvent dans les limites de cohésion, & que le point C soit aussi dans les limites de cohésion par rapport aux points A, B, ces points resteront en repos comme il est évident. Mais si à la distance A C répond une force attractive L C, & qu'à la distance C B réponde la force attractive C K, le point C suivra la diagonale C F du parallélogramme L C K F. Mais si les forces du point A & du point B étoient répulsives & exprimées respectivement par C N & C M, le point C suivroit la direction C H. Si au contraire la force du point B restant répulsive par rapport au point C,

Tome V.

Q q \*

celle du point A étoit attractive & désignée par CL, le point C suivroit la direction Cr, c'est-à-dire se mouvroit de côté. Il est aisé de voir que le point C suivroit la direction CG, si la force CN du point A étoit répulsive, tandis que la force CK du point B seroit attractive. Si le triangle ACB étoit isoscèle & que la base AB fût inassignable par rapport à la hauteur CD, la ligne CD couperoit l'angle ACB en parties égales, & à cause de l'angle infiniment petit LCK, CF seroit sensiblement le double de CL ou de CK, & CH seroit le double de CM ou de CN. Donc si les forces des points A & B étoient à la fois répulsives ou à la fois attractives, & que l'une de ces forces suivît la raison, doublée des quarrés, des distances, leur somme suivroit aussi la même raison. Si en supposant les forces des points A, & B attractives, & qu'elles doivent avoir lieu en prolongeant les lignes AB, AC d'une certaine quantité, on suppose en même-tems que le point C ait été un peu éloigné des points A & B, les forces attractives des points A & B le rapprocheront de la ligne AB; mais si ces forces sont répulsives, il pourra se faire que le point C après avoir été rapproché de la ligne AB en soit écarté par les forces répulsives des points A & B.

Si au lieu de trois points nous en considérons quatre, il est visible que la variété des mouvemens augmentera prodigieusement selon les positions & les distances différentes. Que seroit-ce si au lieu des points nous prenions des masses composées d'un nombre de points que personne ne connoît? De quelle analyse, de quelle géométrie n'aurions-nous pas besoin pour déterminer leurs mouvemens, qui cependant dépendent de cette loi simple dont nous avons parlé ci-devant. Néanmoins toute cette variété aura lieu dans les petites distances, dans lesquelles la courbe des forces coupe son axe; car dans les distances un peu grandes, les ordonnées suivent à peu près la raison renversée des quarrés des distances. Il est bon aussi de remarquer que la courbe des forces (fig. 135) a deux parties égales; l'une du côté des abscisses positives, l'autre du côté des abscisses négatives.

196. SOIENT maintenant dans la figure (143) trois points A, E, B, placés de manière que les trois distances AB, AE, BE, soient les distances des limites de cohésion, en sorte que les deux dernières soient égales. Supposons que

A & B représentent les foyers d'une éclipse qui passe par le point E, extrémité du petit axe EH. Soit dans la (fig. 135)  $AN =$  au demi premier axe  $Dm$  ou  $= BE = AE$ , & soit  $DB <$  que n'est dans la figure 135 l'amplitude des arcs  $LN$ ,  $NP$ , & soient supposés de plus dans la même figure 135 les arcs  $NM$ ,  $NO$  semblables & égaux, afin que les ordonnées  $uy$ ,  $zt$  également distantes du point N soient égales. S'il y a en E un point de matiere, il n'aura aucune force, puisque  $AE$  &  $BE$  sont égales à la distance  $AN$  de la limite N de la figure 135, & la même chose aura lieu pour un point placé en H. Il en sera de même par rapport au point  $m$ ; car si l'on prend dans la figure 135 les lignes  $Az$ ,  $Au$  égales aux lignes  $Bm$ ,  $Am$ ;  $Nz$ ,  $Nu$  seront égales respectivement aux lignes  $DB$ ,  $DA$  & par conséquent égales entr'elles. C'est pourquoi les forces  $zt$ ,  $uy$  seront égales, opposées & se détruiront mutuellement; & la même chose aura lieu pour un point placé en F: car ici A sera attiré & B sera repoussé par  $m$ . Mais si la limite qui répond à la distance AB est assez forte, ces points ne s'éloigneront pas sensiblement des foyers de l'ellipse & on pourra les considérer comme immobiles.

Ainsi un point placé aux extrémités du grand ou du petit axe restera immobile; & si on le place dans un point quelconque C du périmètre de l'ellipse, à cause des deux lignes AC, CB dont la somme est toujours égale au double du demi axe  $Dm$ , la ligne AC sera d'autant plus longue que  $Dm$ , que BC sera plus courte; de sorte que si maintenant dans la fig. 135, nous supposons  $Au$ ,  $Az$  égales respectivement aux lignes AC, BC, nous aurons encore  $uy$ ,  $zt$ , égales entr'elles. C'est pourquoi l'attraction CL sera égale à la répulsion CM, & LIMC sera un rhombe dans lequel la diagonale IC divisera en deux parties égales l'angle LCM; de sorte que l'angle ACP sera égal à l'angle BCQ opposé au sommet à l'angle PCM. Ce qui étant une propriété très-connue de la tangente de l'ellipse rapportée aux foyers, PQ sera tangente. Ainsi la force du point C sera dirigée de côté le long de la tangente ou le long de la direction de l'arc elliptique; de sorte que le point C étant placé sur le périmètre de l'ellipse,

suivra l'arc elliptique  $CE$  en se mouvant vers l'extrémité du petit axe.

Nous pouvons donc ici contempler des limites de cohésion & de non-cohésion analogues à celles qui ont lieu dans l'axe rectiligne de la figure 135. Il y aura des limites en  $E$ , en  $F$ , en  $H$ , en  $m$ , dans lesquelles la force sera nulle, tandis qu'elle aura lieu dans les points  $C$  intermédiaires. Mais en  $E$  & en  $H$  les limites seront telles que si on en éloigne un point de matière en suivant le périmètre de l'ellipse, il reviendra vers ces limites comme il arrive dans la figure 135 par rapport aux limites de cohésion ; mais en  $F$  & en  $m$  les limites sont telles que si l'on en éloigne tant soit peu un point de matière, il s'en écartera encore davantage, comme cela arrive dans la figure 135 dans les limites de non-cohésion.

Le contraire arriveroit si  $Dm$  étoit la distance due à une limite de non cohésion : car alors la plus petite distance  $BC$  auroit une attraction  $CK$ , tandis qu'à la grande distance  $AC$  répondroit la répulsion  $CN$ , & la force composée  $CG$  exprimée par la diagonale du rhombe  $NCKG$  s'exerceroit dans la tangente  $CQ$  de l'ellipse. Dans les points  $E, H$  il y auroit véritablement des limites, mais le point  $C$  placé entre  $E$  &  $m$  se mouvroit vers  $m$  : au contraire il se mouvroit vers  $F$  s'il étoit placé entre  $E$  &  $F$  sur l'arc elliptique  $EF$  ; de manière que les extrémités  $F$  &  $m$  du grand axe feroient des limites de cohésion, tandis que les extrémités  $E$  &  $H$  feroient des limites de non cohésion. Si  $Dm$  est une ligne égale à la distance de la limite de cohésion  $AN$  dans la figure 135, &  $DB$  plus grande que l'amplitude  $NL, NP$ , à plus forte raison si  $DB$  dans notre figure surpasse plusieurs de ces amplitudes, & que l'égalité des arcs ait lieu de part & d'autre par tout cet espace, lorsque  $AC$  dans la fig. 143 sera égale à l'abscisse  $AP$  dans la fig. 135,  $BC$  dans la première de ces figures sera égale à  $AL$  dans l'autre. C'est pourquoi dans ce lieu il y aura une limite, & avant cet endroit du côté de  $A$ , à la distance  $AC$  répondra une répulsion, tandis qu'à  $BC$  répondra une attraction, la figure  $KCNG$  sera un rhombe, & le point  $C$  tendra vers  $m$ . Si dans quelque endroit plus près du point  $m$  les

distances AC, BC sont supposées égales aux abscisses AR, AI de la figure 135, il y aura dans cet endroit une limite; mais dans un point placé à une moindre distance du point E il répondra une répulsion à la plus petite distance BC & une attraction à la plus grande AC; & la force composée sera de nouveau dirigée vers l'extrémité E du diamètre conjugué.

196. ON peut aussi considérer une autre analogie avec ces limites, si l'on conçoit plusieurs ellipses qui aient les mêmes foyers, & dont un des demi axes soit égal à la distance de quelque limite de cohésion de la figure 135, l'autre demi axe répondant à la limite prochaine de non cohésion, ainsi de suite alternativement; de manière que l'excentricité commune soit plus petite qu'aucune des amplitudes des arcs compris entre les limites de la figure 135, afin que chaque ellipse ait seulement quatre limites situées aux extrémités des axes. Un point de matière placé dans un des périmètres aura une détermination au mouvement dans la direction de ce périmètre; mais s'il est placé entre deux périmètres, il tendra vers le périmètre indiqué par la limite de cohésion de la figure 135, en s'éloignant du périmètre indiqué par la limite de non cohésion; c'est pourquoi si on éloigne ce point du périmètre du premier genre il fera un effort pour y revenir, mais si on l'éloigne du périmètre du deuxième genre il s'en éloignera encore davantage & le fuira. Car soit dans la fig. 144 les demi-axes DO, DO', DO'' égaux, le premier à la distance AL de la limite de non cohésion de la figure 135, le deuxième à la distance AN de la limite de cohésion, le troisième à la distance AP d'une limite de non cohésion; plaçons le point C un peu au de-là du périmètre du milieu: les lignes AC & BC seront plus grandes que si elles étoient terminées à ce périmètre; c'est pourquoi dans la figure 135 ayant fait Au, Az plus grandes qu'elles n'étoient auparavant, la répulsion zc diminuera, mais l'attraction uy augmentera; ainsi dans le parallélogramme CMIL, l'attraction CL sera plus grande que la répulsion CM, la direction CI de la diagonale approchera plus de CL que de CM, & tendra par conséquent à rapprocher le point C du périmètre du milieu. Au contraire si le point C

est placé entre le périmètre du milieu & celui de la plus petite ellipse, ayant pris  $BC'$ ,  $AC'$  plus petites que si le point  $C'$  étoit dans le périmètre du milieu, la répulsion  $C'M'$  croîtra, & l'attraction  $C'L'$  décroîtra; c'est pourquoi la direction  $C'I'$  approchera plus de  $C'M'$  que de  $C'L'$ , & le point  $C'$  sera repoussé vers le périmètre moyen. Par une raison entièrement semblable, si on place le point dans le voisinage du premier ou du troisième périmètre, il s'en éloignera encore davantage: & de là suit la proposition que nous avons avancée.

Mais parce que les arcs de part & d'autre de chaque limite ne sont pas exactement égaux, quoique si ces arcs sont très-petits en les considérant comme les prolongemens de la même tangente qui coupe l'axe dans les limites, leurs ordonnées doivent être sensiblement égales; la courbe dans la direction de la tangente de laquelle la force est continuellement dirigée sera sensiblement une ellipse lorsque l'excentricité sera très-petite; cependant ce ne sera pas une ellipse rigoureuse, à plus forte raison sa forme sera différente si les excentricités sont grandes. Il y aura néanmoins toujours des courbes qui détermineront la direction continuelle des forces; il y aura même des courbes qui détermineront la trajectoire qui doit être décrite ayant égard même à la force centrifuge; ce qui fournit une immense variété de combinaisons très-propres à exercer les Analystes.

197. MAIS sans nous arrêter à des recherches plus curieuses qu'utiles, examinons un cas qui peut être utile dans l'application de cette théorie à la physique. Si deux points  $A$  &  $B$  (fig. 143) sont placés dans la distance d'une limite de cohésion assez forte, & que le troisième placé au sommet  $E$  du second demi-axe soit aussi dans une limite de cohésion assez forte; la force qui le retient à ce sommet pourra être assez considérable pour qu'on ne puisse l'en éloigner sensiblement qu'en employant une très-grande force. Alors si quelqu'un retient le point  $B$  (fig. 145) dans le lieu où il est, en faisant tourner le point  $A$  autour de lui jusqu'à ce qu'il arrive en  $a$ , le point  $E$  parviendra en  $e$  & la forme du triangle  $AEB$  sera conservée; de sorte que les trois points  $A$ ,  $E$ ,  $B$  opposeront une grande résistance à leur séparation. Mais si les points  $A$ ,  $B$  (fig. 143) étant supposés retenus par des forces qui empêchent leur mou-

vement, on éloigne un peu le point E du lieu qu'il occupe; aussi tôt qu'on cessera de le retenir ce point reviendra en E, & fera de petites oscillations autour du point E dans une courbe elliptique ou très-approchant de l'ellipse. Mais si la force qui éloigne le point E de sa position n'est pas capable de le faire parvenir jusques au premier axe, ce point rétrogradera & décrira moins qu'une demi-ellipse. Son mouvement sera accéléré en allant vers l'extrémité du petit axe & retardé en allant de l'extrémité du petit axe vers F ou vers *m*. Si ce point a assez de force pour passer jusqu'en *n* au-delà de *m*, il continuera de s'ébranler dans le périmètre de l'ellipse, son mouvement sera accéléré en s'approchant des extrémités H & E du petit axe, & sera retardé en s'en éloignant. N'arrive-t-il pas quelque chose de semblable lorsque les corps solides venant à être liquéfiés par l'action des particules ignées, leurs parties reçoivent une grande agitation; mais cette agitation cessant peu à peu par les forces qui chassent les particules ignées, les parties recouvrent une position semblable & forment de nouveau un corps solide.

198. Si nous supposons que les distances étant exprimées par AB, AC, &c. (fig. 146), les forces sont comme les ordonnées BM, Cm, &c. il est visible que les quarrés des vitesses seront comme les aires correspondantes B M m C, B M N D (voyez le N°. 116). Donc si on suppose que le mobile B est arrivé en B avec une vitesse A, & que le quarré de la vitesse acquise en parcourant l'espace BD soit = BB, la différence des quarrés des vitesses que le mobile a en B & en D sera = BB — A A; elle sera = BB lorsque le mobile sera arrivé en B avec une vitesse nulle. Si le mobile étant arrivé en D les forces correspondantes, à la partie DT de l'axe étoient nulles, la différence  $c^2$  des quarrés des vitesses lorsque le mobile seroit parvenu en T seroit toujours = BB — A A, ou = A A — BB, selon que B sera plus grand ou plus petit que A; & BD étant supposé constant,  $c$  le sera de même.

Supposons maintenant que l'arc *m* N est sensiblement une logistrique ou logarithmique dont la sous-tangente fait = *a*, & imaginons une autre logistrique dont la sous-tangente soit = *b*; selon ce que nous avons

dit dans la première section, les logarithmes d'un même nombre  $y$  pris dans ces logistiques sont entr'eux comme  $a : b$ , en supposant l'ordonnée de laquelle on commence à compter les abscisses  $= 1$ . Donc en appelant ces logarithmes  $x$  &  $x'$ , l'on aura  $a : x :: b : x'$ ; c'est-à-dire que les sous-tangentes des logarithmiques sont à l'intervalle compris entre deux ordonnées égales dont l'une passe par l'origine des abscisses, en raison constante; ainsi plus la sous-tangente est petite plus cet intervalle est petit. Si l'on suppose que  $x$  représente l'intervalle entre l'ordonnée  $y = 1$  & l'ordonnée  $y' = 2$ , cet intervalle sera le même que celui qui sépare les ordonnées 10 & 20, parce que  $1 : 2 :: 10 : 20$ . Ainsi en diminuant la sous-tangente  $a$ , on pourra faire l'intervalle  $x$  entre l'ordonnée 1 & 2 aussi petit que l'on voudra. Cela posé si l'on suppose qu'à la distance  $AB$  répond la force répulsive  $BM$ , & que la compression d'un fluide de l'eau, par exemple, soit exprimée par le rapport de  $AB : AC$ , c'est-à-dire si l'on suppose que lorsque la distance  $AC$  entre les particules de l'eau se change en  $AB$ , la force répulsive  $Cm$  devient  $= BM$ ; il est visible que la distance  $BC$  entre les deux ordonnées  $Cm$ ,  $BM$  peut changer très-peu ou que les lignes  $CA$  &  $BA$  peuvent approcher de la raison d'égalité, quoique les forces  $BM$  &  $Cm$  soient entr'elles dans tel rapport d'inégalité qu'on voudra. Mais lorsque l'ordonnée  $DN$  sera devenue fort petite, la courbe cessera de se confondre sensiblement avec la logistique, elle coupera l'axe  $AD$ , formera au-dessous un arc attractif, recoupera bientôt le même axe, & l'on aura un arc répulsif qui représentera ces forces énormes qu'ont les particules de l'eau lorsqu'elles sont réduites en vapeur par la fermentation & la chaleur.

Lorsqu'on ôte l'obstacle qui s'opposoit à l'écoulement de l'eau, les premières parties descendent par la force répulsive qui soutenoit celles qui étoient situées au-dessus, les suivantes descendent par l'action d'une force semblable qui va toujours en diminuant, & il se produit dans toutes un petit mouvement qui est assez petit au commencement. Bien plus, quelquefois la force répulsive éloigne assez les molécules pour que la force attractive de celles qui s'écoulent accélère la vitesse des sui-



vantes ; de sorte qu'il y a de part & d'autre quelques petites oscillations.

199. LES vitesses dans l'écoulement des eaux sont à peu près en raison sous-doublée des hauteurs ou des forces comprimantes. Cela doit avoir lieu si les forces correspondantes aux différentes hauteurs, sont dans le rapport de la premiere force qui fait écouler les eaux, c'est-à-dire en raison sous-doublée des hauteurs ; car alors l'aire de la courbe des forces sera proportionnelle à la hauteur ; ainsi les quarrés des vitesses seront (198) comme les hauteurs. Supposons encore que  $MmN$  représente l'arc d'une logarithmique, si l'on multiplie l'ordonnée  $BM$  par la sous-tangente  $a$  de cette logarithmique, le produit donnera l'aire  $BMND$  infiniment longue du côté de  $T$ . Si l'on multiplie  $Cm$  par  $a$ , l'on aura l'aire comptée depuis le point  $C$ . Mais si l'ordonnée  $DN=Z$  est très-petite, le produit  $aZ$  sera très-petit, & l'on pourra regarder les aires  $BMND$ ,  $CmND$  comme égales respectivement à celles dont on vient de parler. Or ces dernières aires sont entr'elles comme les forces initiales  $BM$ ,  $Cm$  qui déterminent l'écoulement des premières tranches de la liqueur ; donc alors les quarrés des vitesses sont comme les pressions ou comme les hauteurs. D'un autre côté pour que la vitesse absolue soit la même que celle qu'un corps acquerreroit en tombant de toute la hauteur du liquide au-dessus de l'orifice, comme cela arrive sensiblement à l'égard de l'eau, l'aire des forces doit être égale à un rectangle dont la hauteur seroit égale à celle de l'eau, & dont la base représenteroit le poids  $p$  d'une molécule d'eau ou la force répulsive qu'une molécule peut exercer sur une autre molécule qui la presse ; parce qu'alors la dernière particule reçoit la même vitesse accélératrice qu'elle auroit pu recevoir en tombant de toute la hauteur du fluide : ainsi tout le poids exprimé par  $BM$  doit être à cette force comme la hauteur du fluide est à la sous-tangente de la logarithmique, si  $mN$  est un arc de logarithmique. Mais le poids  $BM$  est à  $p$  comme le nombre de particules contenues dans la hauteur est à l'unité, & par conséquent comme cette hauteur est à la distance des premières particules. Ainsi cette distance doit être égale à la sous-tangente  $a$  de la logarithmi-

que ;  $a$  est donc une quantité tres-petite. Mais cette vitesse absolue est-elle la même dans les différens fluides, & les quarrés des vitesses des écoulemens sont-ils proportionnels aux hauteurs ? C'est ce que les expériences pourront apprendre.

200. PASSONS maintenant à la réflexion & à la réfraction de la lumière. Si un point mobile A (fig. 147) se meut dans la direction AN, lorsqu'il sera arrivé en B où les forces répulsives du plan RS commencent à agir, il abandonnera cette ligne pour décrire une courbe BQ dont la nature dépendra de la combinaison de la force tangentielle selon BN & de la force répulsive perpendiculaire au plan RS. Si cette force est capable de fléchir le mouvement du point A, de maniere que la courbe BQ devienne parallèle au plan avant que ce point soit entré dans ce plan, il est visible que par l'action continue de la même force répulsive qui doit rendre au mobile la même vitesse verticale qu'elle vient d'éteindre, tandis que la force horizontale ou parallèle au plan n'a pas été altérée, le mobile A décrira l'arc QD égal à QB; arrivé en D, il continuera son mouvement le long de la ligne DM qui fait l'angle de réflexion  $m \angle P M$  égal à l'angle d'incidence  $B N n$ , & parce que les points N & P sont très-proches l'un de l'autre, ils paroîtront se confondre. Si le plan RS a quelques aspérités, mais petites respectivement à la distance à laquelle s'étendent les forces répulsives, ces forces vers Q seront peu différentes de ce qu'elles seroient si le plan étoit parfaitement poli & l'angle de réflexion sera sensiblement égal à celui d'incidence, ce qui n'arrivera pas si les aspérités sont considérables.

Soient maintenant deux surfaces parallèles AB, CD (fig. 148) telles qu'un point mobile situé hors de ces plans n'éprouve aucune force, tandis qu'entre ces plans il doit être exposé à l'action des forces perpendiculaires à ces plans & égales pour chacun lorsque les distances seront égales. Avant d'être arrivé en E le mouvement du mobile G sera rectiligne & uniforme, & sa vitesse pourra être exprimée par HE qu'on peut décomposer en HS parallèle & SE perpendiculaire à la surface AB. Le mobile étant arrivé entre les deux plans dont nous venons de parler, son mouvement

sera fléchi par l'action des forces de ces plans ; de manière cependant que la vitesse parallèle ne sera point altérée , tandis que la vitesse perpendiculaire sera augmentée ou diminuée selon que les forces tendront vers le plan  $CD$  ou vers la surface  $AB$ . Si la force perpendiculaire se trouve éteinte en  $X$  lorsque la direction est devenue parallèle aux plans , le mobile sortira de ces plans en décrivant la ligne  $XIM$  , qui fera avec la perpendiculaire  $LI$  l'angle  $LIM$  de réflexion égal à l'angle d'incidence  $HES$ . Si cela n'arrive qu'en  $x$  , le mobile décrira la ligne  $xim$  dont la partie  $im$  est parallèle à  $IM$ . Si on suppose que  $GE$  représente un rayon de lumière dans lequel il y ait des globules dont les directions deviennent parallèles aux surfaces  $AB$ ,  $CD$ , aux points  $X$ ,  $x$ ,  $y$ , en supposant que les forces qui poussent ces globules vers  $AB$ , sont plus grandes dans ces points que celles qui tendent vers  $CD$ , ces globules décriront respectivement les lignes  $XM$ ,  $xm$ ,  $yn$ . Supposons maintenant que le mobile  $G$  étant parvenu en  $X$ , la force qui le pousse vers  $CD$ , l'emporte sur celle qui le pousse vers  $AB$ , ou si l'on veut encore supposons que la courbe  $EXO$ , ne devient jamais parallèle à  $AB$ , dans ce cas il peut arriver que la vitesse perpendiculaire soit diminuée ou augmentée, selon que les forces qui tendent à approcher le mobile du plan  $CD$  seront plus foibles ou plus fortes que celles qui agissent pour le rapprocher de  $AB$ . Dans le premier cas le mobile aura en sortant la vitesse  $ON$  & dans le second la vitesse  $ou$ . Supposons que le mobile suit la direction  $EXON$  (& ce que l'on dira de ce cas fera comprendre ce qui doit arriver lorsque  $EXou$  est la ligne décrite), & regardons la vitesse  $HE$  comme constante,  $HS$  qui exprime la vitesse parallèle, sera  $= PN$  qui exprime la même vitesse après la réfraction,  $SE$  &  $OP$  désigneront les vitesses perpendiculaires avant & après cette réfraction. Maintenant puisque les forces qui agissent entre les plans sont perpendiculaires à ces plans, si l'on appelle  $a$  la vitesse  $SE$ , &  $b$  la vitesse  $OP$ , la différence  $cc$  des carrés de ces vitesses sera constante (voyez le N°. 198). Soit  $HE = H$ ,  $ON = h$ ,  $HS = PN = m$ ; l'on aura par la propriété du triangle rectangle,  $H^2 = a^2 + m^2$ ,

&  $h^2 = b^2 + m^2$  ; donc  $H^2 - h^2 = a^2 - b^2 = c^2$  ; c'est-à-dire que la différence des quarrés des vitesses avant & après la réfraction sera constante ; & parce que  $H$  &  $c$  sont des constantes,  $h$  sera constante. Maintenant en faisant le rayon  $= 1$  , le sinus de l'angle d'incidence  $HES = p$  , celui de réfraction  $PON = q$  , l'on aura  $1 : H :: p : m$  , &  $1 : h :: q : m$  ; donc  $p = \frac{m}{H}$  &  $q = \frac{m}{h}$  . C'est pourquoi  $p : q :: h : H$  ou en raison constante (\*) , c'est-à-dire que les sinus de l'angle de réfraction & d'incidence sont toujours en raison constante (voyez ci-dessus les N<sup>os</sup> 5 & 6) . Mais appliquons la théorie à la Physique.

*Application de la théorie précédente à la  
Physique.*

201. JE ne me propose pas de donner ici un traité complet de Physique , je me contenterai de parler succinctement des questions qui me paroîtront mériter le plus d'attention , me proposant de reprendre cette matiere lorsque je donnerai ma Physique.

L'impénétrabilité naturelle des corps s'explique facilement dans cette théorie ; car puisque dans les petites distances les forces répulsives augmentent de maniere qu'elles sont capables d'éteindre un mouvement quelconque , aucune force finie ne peut faire évanouir la distance qu'il y a entre deux points de matiere , ce qui

---

(\*) Il faut concevoir que les surfaces  $AB$  ,  $CD$  sont celles entre lesquelles les forces commencent à agir ; de sorte que si la lumiere passe de l'air dans le verre , lorsqu'il aura franchi la surface  $CD$  , il continuera de se mouvoir dans le verre selon la direction  $ou$  , par exemple. Si le premier milieu étoit de verre & le second d'eau , le rayon s'émuveroit dans la ligne  $ON$  , par exemple , en s'éloignant de la perpendiculaire.

seroit cependant nécessaire pour la pénétration ; la seule puissance divine qui peut exercer une force infinie peut produire cet effet. S'il n'y avoit point de forces répulsives, une masse quelconque passeroit librement à travers une autre masse ; car le nombre des points de l'espace sensible, occupés par l'une quelconque de ces masses étant infiniment plus grand que celui des points de ces masses, il est infiniment plus probable qu'aucun des points de l'une des masses ne rencontreroit un des points de l'autre masse, qu'il ne l'est que cette rencontre auroit lieu ; & cela arriveroit par conséquent sans aucune vraie pénétration. Mais les forces répulsives empêchent cet effet. Si l'on conçoit un solide composé de différentes surfaces mises les unes au-dessus des autres, de maniere que les points qui composent ces surfaces soient dans les limites très-fortes de cohésion, & qu'il en soit de même par rapport aux points de ces mêmes surfaces considérées les unes par rapport aux autres, de sorte que les points de la surface supérieure soient tellement distants des points correspondants de la surface suivante qu'on ne puisse ni les éloigner ni les rapprocher sans de très-grandes forces, ces surfaces quoique distantes les unes des autres formeront un corps physique très-solide & très-difficile à rompre.

202. On fait qu'une balle de fusil traverse une porte demi-ouverte & très-mobile sur ses gonds sans la faire tourner, ce qui vient de ce que les parties de la balle s'étant approchées des parties du bois beaucoup plus que celles-ci ne l'étoient entr'elles emportent ces particules avec elles, & la brièveté du tems ne permet pas aux forces qui retenoient les particules voisines du bois d'y produire un mouvement sensible. Que si la vitesse étoit encore plus grande la balle traverseroit la porte sans y produire aucun changement sensible & sans y produire aucune véritable compénétration comme la lumière passe à travers un milieu diaphane. C'est-là peut-être la raison pour laquelle l'Auteur de l'univers a donné aux globules de lumière cette vitesse prodigieuse qui leur fait parcourir la distance du Soleil à la Terre, c'est-à-dire environ 34 millions de lieues dans l'espace d'environ un demi-quart d'heure. Si nous pouvions nous pro-

curer une vitesse assez considérable nous passerions à travers les portes fermées & les murailles sans trouver aucun obstacle & sans aucune vraie compénétration. Nous nous sommes donc formé l'idée de la solidité, parce que les forces répulsives ne permettent pas à nos mains & à nos membres de passer à travers les solides physiques, qui ne sont autre chose dans cette théorie, qu'un assemblage de points sans étendue retenus dans leurs distances respectives par les forces attractives & répulsives. Comme l'intervalle entre ces points n'est pas sensible, ils forment un continu physique & non mathématique. A l'égard de l'étendue géométrique elle n'est autre chose que l'espace pur; de sorte que la Géométrie a pour objet l'étendue en longueur, largeur & profondeur: mais cette étendue continue est bien différente du solide physique qui est composé de points renfermés dans un certain espace qui a nécessairement des limites & par conséquent une figure. A l'égard de la masse elle doit s'estimer par le nombre des points qui appartiennent au corps; de manière que si le nombre des parties qui appartiennent au corps A est double du nombre des parties qui appartiennent au corps B, la masse du premier sera double de celle du second. Mais la densité est comme la masse divisée par le volume. Pour ce qui regarde l'inertie des solides physiques, elle tire son origine de celle des points qui les composent. Quant à la mobilité, tout le monde sait que cette propriété consiste en ce qu'un corps peut changer de lieu, & passer d'une partie de l'espace dans une autre partie de l'espace. Mais l'égalité de l'action & de la réaction vient de ce que dans le choc des corps, les forces répulsives agissent également sur le corps choquant & sur le corps choqué. Pour ce qui regarde la divisibilité de l'étendue pure, je ne crois pas qu'on puisse la révoquer en doute: car si on divise l'étendue d'un pied en 2 parties égales, qu'on prenne ensuite la moitié de la moitié & ainsi de suite, on ne parviendra jamais à la dernière division; mais si il est question du solide physique, comme le nombre des points qu'il renferme est fini, on ne peut dire sans absurdité que la matière est divisible à l'infini.

Mais la gravité que Newton met au rang des propriétés générales de la matière & qui suit dans les distances

un peu considérables à très-peu près la raison renversée des quarrés des distances , est représentée par l'arc TV de la courbe des forces dans lequel les ordonnées sont à très-peu près en raison inverse des quarrés des distances.

On peut dans cette théorie répondre facilement à l'objection qu'on fait aux partisans de Newton , pourquoi l'attraction ne force pas les étoiles de s'approcher les unes des autres pour ne former qu'une masse. Plusieurs répondent que la distance entre les fixes est si considérable que l'attraction ne sauroit produire qu'un mouvement insensible dans ces astres , auquel par conséquent on ne doit faire aucune attention. Cependant il est aisé de voir que dans un très-grand nombre de siècles cette attraction pourroit produire un effet sensible & déranger le système de l'univers. Mais dans notre théorie on peut supposer que le dernier arc de la courbe des forces qui représente la gravité , après s'être éloigné à une plus grande distance que les comètes de notre système ne peuvent le faire , coupe de nouveau son axe de manière que la force attractive se change en répulsive , ensuite en attractive & ainsi de suite ; de sorte que rien n'empêche de supposer que les étoiles se trouvent dans les points des limites , & qu'elles ne peuvent ni s'approcher ni s'éloigner naturellement les unes des autres.

203. LA cohésion s'explique facilement dans cette théorie par les limites dans lesquelles on peut supposer placées les particules qui composent les corps. Mais pourquoi les parties séparées d'un bâton venant ensuite à être appliquées l'une contre l'autre n'acquiescent-elles pas la même cohésion qu'elles avoient auparavant ? Les Newtoniens disent que les aspérités des parties brisées qui ont été un peu dérangées , empêchent que le contact ne soit le même qu'auparavant. Cependant si les deux surfaces sont assez polies on sent d'abord une grande résistance , mais quand elles ont été assez comprimées l'une contre l'autre elles adhèrent ensemble avec une force beaucoup plus grande que le poids de l'air comprimant ; parce qu'avant de parvenir à ce contact , il y a une grande force répulsive , que Newton lui-même a reconnu exister à quelque distance du contact quoique très-petite ; à cette force répulsive , disent-

ils , succède une force attractive dans des distances encore moindres , & elle devient très-grande dans le contact ; & parce que dans les marbres polis on obtient beaucoup de contacts en même-tems il n'est pas étonnant que leur cohésion soit assez forte. Dans la théorie dont il s'agit ici l'on peut dire que plusieurs particules des surfaces séparées ont avancé au-delà des limites qu'elles avoient auparavant , de maniere qu'elles exercent maintenant une répulsion qui empêche que les autres ne se rapprochent jusqu'aux limites qu'elles avoient avant la division. Mais dans les marbres polis , quoique les anciennes limites de cohésion n'aient pas lieu , néanmoins il y a plusieurs particules qui sont dans des limites , foibles à la vérité , de cohésion ; c'est la cause qui s'oppose à leur séparation perpendiculaire ; quoique je ne veuille pas nier que la résistance de l'air n'y ait une grande part. Mais quand on fait glisser deux pieces de marbre polies l'une sur l'autre on sent seulement les forces attractives des bords des surfaces , & non des surfaces totales. Lorsque les marbres se sont formés , les parties insensibles se sont approchées peu à peu les unes des autres par les forces qui ont endurci le marbre ; mais dans l'état actuel , avec quelque soin qu'on polisse les marbres , on ne peut se flatter d'enlever toutes les aspérités & les éminences qui empêchent que les surfaces parviennent à de fortes limites de cohésion. Il n'est pas plus difficile d'expliquer pourquoi un corps quelconque , un globe , par exemple , se brise si on le charge d'un trop grand poids. Car si l'action du poids comprimant l'emporte sur la force qui retient les particules dans les limites de cohésion , ces particules doivent s'éloigner & le corps se rompre. Mais on auroit tort de penser que toutes les parties d'un même corps ont une égale solidité. Car rien n'empêche de supposer qu'il y a dans les solides physiques des molécules de différens genres. Les premières sont composées de points simples physiques , les secondes sont composées d'un certain nombre des premières , celles du troisième genre sont formées de l'assemblage d'un certain nombre de molécules du deuxième genre & ainsi de suite. C'est pourquoi les molécules du premier genre seront plus solides que celles du second genre , & celles-ci beau-

coup



coup plus que celles du troisieme genre, &c. Ceci nous fait voir qu'il peut y avoir des particules qui s'attirent les unes les autres, d'autres qui se repoussent mutuellement, comme nous l'avons vu ci-dessus en considérant ce qui se passe par rapport à 3 points que rien n'empêchoit de regarder comme composés de particules de différens genres. Mais si deux particules de matiere sont composées de points tellement situés qu'en les approchant l'une de l'autre les répulsions & les attractions se compensent, ces particules ne s'approcheront ni ne s'éloigneront l'une de l'autre. Bien plus il peut y avoir des endroits sur la surface d'une particule, même sphérique, qui attirent une autre particule, d'autres qui la repoussent, & des troisiemes qui ne la repoussent ni ne l'attirent, parce qu'il peut y avoir dans ces lieux plus de points ou moins de points que dans d'autres. Et ces points physiques peuvent être placés à différentes distances du centre & entr'eux.

204. LES corps solides sont composés de parties unies, de maniere que si l'on en pousse quelques unes d'un certain côté les autres suivent. Les corps roides sont ceux dont la figure ne peut être changée qu'en employant une grande force; mais les corps flexibles, comme les verges élastiques, n'opposent pas une grande résistance à leur flexion. Les fluides ne sont pas entierement privés de forces répulsives ou attractives. Tout le monde connoît la grande force répulsive de l'air qui résiste à sa compression en raison de sa densité, d'autres fluides comme l'eau & le mercure ont une grande force attractive, cependant leurs molécules un peu considérables se séparent facilement les unes des autres. Dans les poudres & les sables il n'y a aucune force sensible ni attractive ni répulsive, parce que les forces attractives & répulsives se compensent mutuellement. A l'égard du mercure & de l'eau, on ne peut douter des forces attractives qui lient leurs molécules les unes avec les autres; mais dans les fluides élastiques tels que l'air, les particules qui les composent se trouvent sans doute hors des limites & sous des arcs répulsifs. Et parce que dans ce fluide la force répulsive augmente à raison de la proximité des parties, on doit conclure que les ordonnées des arcs répulsifs dans lesquels se trouvent ses

particules, sont dans le même rapport (\*). Dans les fluides humides les particules se trouvent dans des limites de cohésion assez fortes, mais il y a tout auprès un arc répulsif qui coupe la courbe des forces presque à angle droit. C'est la raison pour laquelle l'eau réduite en vapeur a une si grande force répulsive.

205. Si les forces de part & d'autre de la limite dans laquelle se trouvent les particules d'un corps restent sensiblement les mêmes pendant un certain espace au-delà de cette limite, & qu'on fléchisse ce corps; dès que la force fléchissante cessera d'agir il reprendra son premier état, comme il arrive aux corps élastiques. Si les forces ne s'étendent pas à une certaine distance, ou qu'il y ait dans cet intervalle un grand nombre de limites, on pourra fléchir le corps sans le rompre, mais il ne fera aucun effort pour reprendre son premier état; on pourra même l'allonger considérablement sans le rompre comme cela arrive au plomb, à l'or &

(\*) Concevons deux cubes A & B dont les volumes soient égaux, mais dont les masses d'air qu'ils renferment soient différentes, de manière que la distance entre les centres des molécules du premier soit  $= a$ , & la distance entre les centres des molécules du second soit  $= b$ ; il est évident que les nombres des molécules d'air dans les côtés homologues des cubes A & B, seront comme  $b : a$  (c'est-à-dire, en raison inverse des distances); dans les surfaces comme  $bb : aa$ ; dans les cubes comme  $b^3 : a^3$ . Maintenant les forces qui agissent sur les surfaces égales de ces cubes pour retenir les particules d'air dans les distances qu'elles ont, sont comme le nombre de ces molécules dans chaque cube, ou comme les densités, & les forces qui tendent à les dilater sont aussi comme les densités, & comme les forces comprimantes. Donc ces forces que j'appelle F & f sont comme  $b^3 : a^3$ . D'un autre côté ces forces sont en raison composée des surfaces ou du nombre des particules qui agissent contre elles, & des actions de chaque particule dans ces surfaces. Si donc on désigne ces actions par m & n, nous aurons  $F : f :: mb^3 : na^3$ ; ainsi  $naab^3 = ma^3b^2$ , ou  $nb = ma$ , ou  $m : n :: b : a$ .

à l'argent. A l'égard des corps visqueux outre la grande ténacité que leurs particules ont entr'elles, elles ont encore la propriété de s'attacher aux autres corps, parce que leurs molécules peuvent facilement parvenir aux limites de cohésion avec celles des solides auxquels elles s'attachent.

206. LES Physiciens contemplent avec admiration la disposition qu'ont certains corps, par exemple, la glace, les petites étoiles que forme la neige à certaines figures; cette disposition est sur-tout remarquable dans les sucs qui forment les pierres précieuses & dans les parties organiques des végétaux & des animaux. Il est facile de rendre raison de cette disposition: car si les molécules attirent d'autres molécules par certains points de leurs surfaces, tandis qu'elles les repoussent par d'autres points, il est aisé de concevoir pourquoi les particules secondaires qui forment les corps sensibles se disposent dans un certain ordre, en se présentant les points dans lesquels elles s'attirent & s'arrangeant de manière qu'elles puissent acquérir de fortes limites de cohésion: ce qui fait qu'elles ne peuvent former que certaines figures. Et parce que la même molécule qui attire par un de ses points la molécule A, repousse, à cause de sa différente disposition, la molécule B; lorsqu'une masse composée de plusieurs particules différentes vient à passer tout auprès, celles-là seules s'arrêteront qui pourront être attirées & acquérir de fortes limites de cohésion. Cette remarque fournit facilement l'explication des sécrétions, de la nutrition & de la végétation.

Pour déterminer la résistance & l'action des fluides il faudroit connoître exactement la loi des forces, le nombre & la disposition des points physiques qui forment les fluides, & avoir à sa disposition une Géométrie & une analyse bien supérieure à celle que nous connoissons. Cependant pour dire quelque chose sur une question qui paroît surpasser les forces de l'esprit humain, je remarquerai 1°. que la résistance vient du mouvement qu'on imprime aux molécules du fluide. En second lieu il y a une autre résistance qui doit son origine aux forces que les particules exercent les unes sur les autres lorsque l'une s'approche de l'autre en sortant des limites dans lesquelles elles étoient en équilibre;

or ces molécules acquièrent des mouvemens très-différens, elles tournent, elles poussent les autres, &c dans les fluides élastiques, sur-tout, du moins lorsque la vitesse n'est pas bien considérable, celles qui sont par derrière agissent sur le mobile, tandis que celles qui sont par devant retardent son mouvement.

207. Si les limites dans lesquelles se trouvent les particules d'un corps se succèdent en assez grand nombre dans un certain intervalle, lorsque par une force extérieure on aura comprimé ou allongé une masse en transportant les particules d'une limite de cohésion à une autre, elles y resteront en équilibre sans faire aucun effort pour reprendre leur ancienne situation : voilà ce qui arrive dans les corps mous. Mais si les limites sont assez écartées, de manière qu'en diminuant la distance la force répulsive succède à l'attractive, tandis que la force attractive augmente avec la distance, il est visible que si l'on comprime un corps ou qu'on fasse effort pour l'allonger, il se rétablira dans son premier état, &c les parties recouvreront leur ancienne situation dans le premier cas par l'action de la force répulsive, &c dans le second par la force attractive. A l'égard des corps ductiles ils ne diffèrent des corps mous que parce qu'ils retiennent leur figure avec plus de force ; car les corps mous changent facilement de figure, au lieu que les corps ductiles comme les métaux, non-seulement changent de figure par l'action du marteau ; mais ils retiennent avec force celle qu'on leur a donnée.

208. LA Terre, l'Eau, l'Air & le Feu, qu'on appelle vulgairement les quatre élémens, ne sont autre chose que des corps composés de points homogènes différemment disposés, des molécules desquels on peut former ensuite différens mélanges &c différens corps. Certains corps sont dissolubles par l'eau, comme le sucre, par exemple ; parce que leurs particules attirent celles de l'eau avec plus de force que celle-ci ne s'attirent entr'elles ; c'est pourquoi les particules d'eau prenant la place des molécules séparées du corps solide, celles-ci doivent nager dans le fluide : telle est la cause de la dissolution. Mais si on jette dans un fluide ainsi chargé de molécules qu'il vient de dissoudre, une autre substance dont les molécules attirent celles du fluide avec plus de force

& peut-être même à de plus grandes distances que ne peuvent le faire les particules du premier corps, cette seconde substance sera dissoute & les particules du fluide quitteront celles du premier corps pour s'attacher à celles du second; ainsi les molécules du premier corps tomberont par leur poids naturel au fond du vase à travers le fluide spécifiquement plus léger, & l'on aura ce qu'on appelle une précipitation.

209. IL est facile de comprendre dans cette théorie comment on peut mêler deux corps de différente nature comme l'eau & le vin; & comment en mêlant deux substances différentes, on obtient une masse dont le volume n'est pas égal à la somme des volumes des substances mêlées. En effet les particules des corps ne se touchant pas immédiatement, elles peuvent par l'interposition d'autres parties, s'approcher beaucoup plus qu'elles ne faisoient auparavant & former un volume plus petit que ne l'étoit celui de l'une des deux masses.

210. Si par l'interposition & l'agitation du fluide igné les particules d'un corps, de l'or, par exemple, changent leurs distances de manière qu'une particule ait de petits mouvemens d'oscillation autour d'un axe ou de deux autres particules, ce corps deviendra fluide; mais si la force qui causoit l'agitation vient à cesser, ce corps pourra redevenir solide. Ce mouvement d'oscillation pourra cesser, soit par l'inégalité qu'il y a entre les forces de différens points d'une même molécule, soit par l'expulsion de la matière ignée & la résistance du milieu ambiant. De même en dépurant certains corps, c'est-à-dire en leur ôtant les parties hétérogènes & difformes qui empêchoient le mouvement de leurs molécules, on pourra les rendre plus liquides. Ainsi il y a moins de viscosité dans le pétrole que dans le baume; & la Chymie fait voir que dans ces substances la viscosité est d'autant plus grande qu'elles sont plus composées.

Si dans un corps devenu liquide par l'action du feu, les particules en s'écartant les unes des autres passent dans un grand arc répulsif, elles se fuiront tout à coup & le corps se volatilifera. La même chose arrivera si les molécules d'un corps fixe sont situées dans des distances de répulsion très-fortes, mais retenues par l'interposition des particules d'une autre substance dont les for-

ces attractives surpassent les forces répulsives dont nous venons de parler ; car si par l'action du feu ces particules sont chassées du corps dans lequel elles étoient retenues, la force répulsive dissipera les molécules de ce corps. Cela paroît arriver à l'air qui semble former un corps fixe dans les calculs qu'on trouve dans la vessie ou dans les reins, & qui peut ensuite recouvrer son état volatil. On diroit même qu'il perd alors son élasticité ; ce qui vient de ce que les particules interposées empêchent par leur attraction les effets de sa force répulsive. L'alternative des arcs répulsifs & attractifs de la figure 135 nous fait comprendre facilement d'où peuvent venir les évaporations, les fermentations, les déflagrations subites & les explosions. Si les particules d'un corps sont placées à des distances convenables, il pourra se faire que par l'interposition subite de quelques molécules externes, les points des particules de la masse s'écartent assez pour entrer dans de grands arcs répulsifs qui les dissiperont subitement : c'est ce qui paroît arriver dans l'explosion subite de la poudre ; la même chose arrive, mais avec moins de violence dans les phosphores qui prennent feu par le seul contact de l'air.

211. Tous les corps ne fermentent pas avec tous les corps, ce qui vient, comme nous l'avons insinué ci-dessus de ce que certaines molécules n'agissent pas sur toutes les autres molécules, mais seulement sur quelques-unes, tandis qu'elles exercent une grande force par rapport à d'autres. A l'égard du feu, on peut le regarder comme une espèce de fermentation de la matière sulphureuse avec celle de la lumière ; car les parties de la matière sulphureuse par l'action d'une lumière assez dense ou même d'une seule étincelle fermentent avec tant de violence que passant des limites de cohésion dans des arcs répulsifs, elles s'évaporent & la matière lucide se dissout & s'envole. Ainsi si un oiseau en se posant sur une montagne détache un grain de sable, qui en tombant sur d'autres grains les entraîne dans sa chute, & que ceux-ci tombent sur de grosses pierres qui n'avoient presque aucun point d'appui, ils déterminent leur chute, toute la montagne s'écroule dans la mer & produit une horrible agitation. C'est là l'image des forces intestines qui peuvent produire

dés effets surprenans par le moyen d'un petit changement de distance dans les particules d'un corps.

212. Si le feu est produit par la seule fermentation de la matiere sulphureuse & de la lumiere (\*); là où il n'y aura point de soufre l'action du feu ne sera pas à craindre. Il paroît que les corps terrestres ne sont dissous par le fluide igné que parce qu'ils renferment des parties qui lient entr'elles des molécules inertes, c'est à-dire, des molécules qui n'exercent entr'elles ni répulsion ni attraction, parce que leurs forces répulsives & attractives se compensent. Mais s'il existoit un corps qui n'eût rien de semblable, il pourroit supporter l'action du feu le plus violent sans être altéré. Il seroit donc possible qu'il y eût dans le Soleil même des animaux vivans, mais dont les corps seroient composés d'une matiere bien différente de celle de nos animaux terrestres; par la même raison cet astre pourroit avoir des végétaux & des minéraux qui lui seroient propres.

La grande effervescence qu'il y a dans les corps qui brûlent écarte les particules de la lumiere qui, dès qu'elles se trouvent dans de grands arcs répulsifs, se dissipent avec une vitesse prodigieuse; & parce que les molécules lucides ne parviennent à ces arcs que successivement, le corps enflammé ne doit pas se dissiper tout-à-coup, mais il fournit de la lumiere pendant un tems plus ou moins considérable. D'un autre côté la quantité de lumiere qui vient du Soleil pouvant avoir avec la masse de cet astre une raison inassignable; le Soleil pourroit éclairer l'Univers pendant des millions de siècles, sans que son diamètre en fût diminué d'un demi ponce. La vitesse de la lumiere dépend de la gran-

---

(\*) Les Chymistes modernes entendent par fermentation un mouvement intestin qui s'excite à l'aide d'un degré de chaleur & de fluidité convenables, entre les parties integrantes & constituantes de certains corps très composés, & dont il résulte de nouvelles combinaisons des principes de ces mêmes corps: c'est ainsi que le vin en fermentant se change en vinaigre. Mais nous prenons le nom de fermentation dans un sens plus étendu, en désignant par ce mot les fermentations chimiques & les effervescences.

deur de l'arc répulsif qui produit son émission. A l'égard des rayons de différentes couleurs, on peut supposer que les molécules dont ils sont composés sont un peu différentes entr'elles, & que les forces répulsives agissent sur elles à peu-près également & leur communiquent des vitesses sensiblement égales. Mais dans la théorie dont il s'agit ici, ces particules peuvent facilement traverser les milieux homogènes en ligne droite; car les milieux ne sont autre chose qu'un espace pur dans lequel il y a infiniment plus de points sans matière que de ceux où se trouve la matière; de sorte qu'il est infiniment probable, c'est-à-dire, certain, qu'un globule de lumière ne rencontrera jamais sur son chemin un point physique ou matériel de ce milieu. De même l'espace à travers lequel se meut la lumière dans tant de sens différens, contenant un nombre de points infiniment plus grand que celui de tous les globules de lumière qui existent dans la nature, il est infiniment probable qu'aucun de ces globules ne se trouvera jamais sur le chemin de l'autre, & qu'il n'y aura aucun choc entr'eux. Lorsque le milieu est fort hétérogène, les parties qui le composent, ayant des forces inégales, détournent la lumière en différens sens & l'empêchent de traverser sa masse en ligne droite comme cela est nécessaire pour la diaphanéité.

213. A l'égard de la réflexion & de la réfraction de la lumière nous en avons assez parlé ailleurs; mais si les corps agissent sur la lumière en la détournant de sa direction, il est aisé de comprendre que les rayons lumineux doivent aussi agir sur ces mêmes corps & le mouvement perdu dans le choc de la lumière doit être au mouvement acquis par le corps choqué, comme la masse choquée à celle de la lumière. Cependant si un rayon de lumière va choquer une plume très-légère suspendue à un fil très-mince, elle ne lui communique aucun mouvement sensible, ce qui prouve que la masse d'un globule de lumière est d'une petitesse étonnante & dont il est bien difficile de se former une idée.

214. Il y en a qui attribuent les aurores boréales à des vapeurs légères, poussées par les rayons solaires. Il est surprenant qu'un physicien, qui pense que les rayons ne sont autre chose que des ondes, soutienne une telle



opinion; car de telles ondes ne produiroient pas les mouvemens progressifs qu'on remarque dans les aurores. Ceux qui disent que les fleuves peuvent être retardés, & que les tremblemens de terre peuvent être produits par l'action de la lumière n'ont jamais fait attention que les principes de la mécanique prouvent que la masse des globules lumineux est si petite qu'elle ne sauroit produire un tel effet. Cependant les rayons solaires communiquent aux particules des corps un mouvement qui peut les déplacer & les faire passer dans des arcs répulsifs, & occasionner leur dissipation. On sait que le régule d'antimoine calciné augmente de la dixième partie de son poids; mais cet effet ne doit être attribué qu'aux parties volatiles qui se trouvent dans l'air & non au fluide igné. La grande action de la lumière sur les substances sulphureuses qui l'attirent puissamment & leur réaction occasionnent une espèce de fermentation qui produit le feu. Mais lorsque la lumière traverse des des milieux diaphanes & homogènes comme l'air & le verre, elle ne perd aucune partie de sa vitesse. Car si après avoir traversé un morceau de verre, elle est réfléchie de nouveau vers ce verre, elle le traversera en se réfractant de la même manière que la première fois, l'angle d'incidence étant supposé le même; ce qui ne pourroit avoir lieu, si la vitesse avoit été diminuée. Dans certains corps phosphoriques la lumière solaire, après avoir parcouru un grand nombre de labyrinthes, après avoir comme circulé autour des molécules intérieures qui la poussent & la repoussent tantôt dans un sens, tantôt dans une autre, parvient au moins en partie jusqu'à la surface d'où elle s'envole; c'est la cause pourquoi ces phosphores après avoir été exposés au Soleil, luisent dans les ténèbres plus ou moins de tems selon la longueur du chemin que doit faire la lumière pour s'échapper par leur surface. La quantité de lumière réfléchie est d'autant plus grande que l'angle d'incidence est plus grand, parce qu'alors la vitesse perpendiculaire étant très-petite, la force répulsive des surfaces peut la détruire plus facilement. Mais il est aisé de comprendre que les globules des rayons de différentes couleurs étant composés des points dont le nombre & l'arrangement n'est pas le même, ne doivent être ni

également réfléchibles, ni également réfrangibles : cependant les globules rouges étant tous à très-peu près égaux, leur réfrangibilité sera aussi à peu-près la même, comme l'expérience l'apprend ; il en sera de même pour les rayons orangés, &c. Mais le crystal d'Islande a une propriété bien étonnante & bien digne de l'attention des Physiciens. Cette pierre affecte constamment la figure d'un parallélipède oblique, terminé par six parallélogrammes & huit angles solides, & lorsqu'elle réfringe un rayon de lumière, il se divise en deux parties dont l'une est réfractée d'une manière constante & ordinaire, tandis que l'autre est réfractée d'une manière différente & extraordinaire (\*), & cela arrive quel que soit l'angle d'incidence. Les rayons qui sortent de ce crystal observent la même loi, c'est-à-dire que celui qui a été réfracté selon la loi usitée ou inusitée, est réfracté en sortant de la même manière ; néanmoins le rayon incident & ses deux parties qui sortent du verre sont parallèles. Si l'on applique l'une contre l'autre deux lames parallèles de ce crystal, les parties du rayon incident qui auront été réfractées selon la première ou la seconde manière par la première lame, le seront de même par la seconde. Ce sera la même chose si les deux crystals sont semblables & ont des positions semblables. Le même globule est réfracté d'une manière différente selon que ses côtés sont tournés d'une manière différente par rapport à ceux du crystal. Ce phénomène paroît dépendre des différentes forces qui ont lieu en des points différens du même globule, & qui sont la cause qu'il se réfracte selon la loi ordinaire, lorsque la partie tournée du côté du crystal n'exerce pas une force ou ne reçoit pas un mouvement capable d'empêcher l'effet de la loi ordinaire ; mais si l'autre partie est tournée du côté du crystal, la force qu'elle exercera étant différente, la réfraction le fera aussi (\*\*). Il y en a aussi qui attribuent

(\*) Lorsqu'on met un morceau de crystal d'Islande sur un livre, chaque lettre étant vue par une double réfraction, paroît double.

(\*\*) Il y a encore un autre phénomène qui a beaucoup

le phénomène dont on vient de parler aux surfaces différentes dont, disent-ils, ce crystal est composé. Le crystal de roche produit aussi deux réfractions, mais moins inégales que celles du crystal d'Islande.

exercé les Physiciens & qui est très-digne de leur attention, je veux parler des *accès de facile transmission & de facile réflexion*. Si par le moyen du savon mêlé avec l'eau, l'on forme des bulles, leurs lames (si l'on peut s'exprimer ainsi) transmettent les rayons de toutes les couleurs tant qu'elles ont une certaine épaisseur; car d'abord elles ne paroissent point colorées, ensuite le sommet paroît rouge, puis successivement orangé, &c. Enfin on y apperçoit une espèce de tache noire. La couleur rouge qui étoit d'abord au sommet descend, & après elle l'orangé, &c. Il est visible que l'eau descend du sommet de la bulle, & que ses différentes parties ou lames deviennent d'abord plus minces vers le sommet & ensuite vers le milieu, &c. de sorte qu'il paroît que l'épaisseur différente des lames transparentes des corps est la cause de leurs différentes couleurs, que l'épaisseur des particules colorées qui paroissent rouges est la plus grande de toutes, tandis que celle des particules violettes est la plus petite. Si l'on applique l'une contre l'autre les convexités de deux verres qui soient les segmens de deux grandes sphères, l'air formera autour du point de contact physique un disque dont l'épaisseur augmentera à proportion que les anneaux seront éloignés de ce point où il paroît une tache noire, & on verra tout autour des anneaux colorés, séparés les uns des autres par un anneau blanc. Il paroît que les corps sont composés de lames minces d'une certaine épaisseur, & par les expériences de Newton, les lames dont les épaisseurs sont comme les nombres 1, 3, 5, 7, &c. réfléchissent les mêmes rayons qui sont transmis par celles dont les épaisseurs suivent le rapport des nombres 2, 4, 6, 8, &c. Il y a dans chaque rayon de lumière des dispositions alternatives, dans l'une desquelles après être arrivé à la surface qui sépare deux milieux hétérogènes, il se réfléchit, tandis qu'il est transmis dans l'autre (ce que l'on appelle les *accès de facile réflexion & de facile transmission*) avec des intervalles d'accès, après lesquels reviennent les dispositions favorables à la facile ré-

215. LA *diffraction* n'est autre chose qu'une réflexion ou une réfraction commencée. Lorsqu'un rayon arrive à une certaine distance d'un corps dont la nature est différente de celle du milieu qu'il traverse, il se fléchit en s'ap-

flexion ou à la transmission. C'est de ces intervalles différens selon les milieux, l'inclinaison d'incidence, & la couleur des rayons, que paroissent dépendre tous les phénomènes des lames minces, des couleurs naturelles & changeantes, comme aussi les couleurs des lames épaisses des corps, & enfin la diffraction qui fait que les rayons qui passent auprès des tranchans & des pointes des corps se fléchissent, & que ceux qui ont des couleurs & des réfrangibilités différentes, forment aussi des angles différens.

Si nous supposons que les globules de différentes couleurs sont aussi composés d'un nombre différent de points différemment arrangés, on pourra imaginer que tous les points d'un même globule n'ont pas été à leur départ du soleil également exposés à l'action des points repoussans, de manière que les uns ayant reçu plus de vitesse que les autres, ils s'en seroient séparés, si les forces qui les unissent avoient été anéanties. Il est arrivé de-là que les points qui avoient reçu plus de vitesse ont d'abord entraîné les autres en s'en écartant un peu; mais les forces attractives ont bientôt obligé ces points de se rapprocher les uns des autres, de manière que leurs distances sont devenues plus petites qu'auparavant; alors la force répulsive les a écartés au-delà des limites naturelles, mais la force attractive les a rapprochés, & ainsi de suite; de sorte que dans les oscillations qui persistent à travers les milieux différens que la lumière traverse, les globules s'allongent tantôt dans un sens tantôt dans un autre. On peut donc concevoir qu'il y a dans un globule de lumière des accès d'allongement & de contraction; mais comme les pendules qui oscillent ont moins de vitesse vers les extrémités des arcs qu'ils décrivent & plus de vitesse quand ils sont arrivés à la verticale, de même les tems pendant lesquels le globule reste dans l'état d'allongement, les points qui se trouvent vers les extrémités du diamètre dans lequel se fait cet allongement, étant beaucoup plus écartés qu'ils ne le seroient dans l'état naturel, ce tems, dis-je, pour

prochant ou en s'éloignant & change de direction. Si la surface de ce corps étoit assez considérable, il seroit réfléchi, ou bien il traverseroit le nouveau milieu réfringent; mais à cause qu'un tranchant ou une pointe termine cette surface en cet endroit, le rayon avance en évitant le tranchant ou la pointe & continue ensuite

être beaucoup plus grand que celui qui répond à l'état moyen de contraction, dans lequel la figure du globule diffère peu de la naturelle. Ce qu'on vient de dire de l'état d'allongement doit aussi s'entendre de celui de plus grande contraction, dans lequel les points se rapprochent pour s'éloigner ensuite. Mais comme les vibrations d'un pendule cycloidal sont égales, celles d'un globule le seront de même; de sorte qu'il se trouvera après des intervalles égaux de tems dans l'état moyen, entre la plus grande contraction & le plus grand allongement; & les forces que les molécules du milieu exercent sur le globule ne seront pas les mêmes dans ces différens états. Imaginons maintenant qu'un globule arrive à la surface qui sépare deux milieux hétérogènes, & qu'il entre dans l'épaisseur du plan dans lequel agit la force qui trouble le mouvement des rayons. Si un certain état moyen de contraction est supposé le plus favorable à la réflexion, celui de plus grande dilatation ou de plus grande contraction étant celui de la plus facile transmission, il est visible que notre globule rebroussera son chemin, ou entrera dans le milieu selon qu'il se trouvera dans l'un ou l'autre de ces états: j'appellerai *états extrêmes* ceux de plus grande dilatation & de plus grande contraction, *état moyen* celui de contraction moyenne. Si le globule se trouvant vers un des états extrêmes, passe dans l'épaisseur dont on vient de parler, & que les forces du milieu en le détournant de son chemin, plient tellement son mouvement que la courbe devienne parallèle à la surface réfringente, tandis que les forces répulsives agissent encore, le globule rebroussera son chemin (en décrivant une courbe dont la nature dépendra de la vitesse parallèle à la surface réfringente, & de la nature de la force répulsive), & sortira du milieu dans lequel il étoit entré. La distance entre la surface de ce milieu & le point où la courbe est devenue parallèle à cette surface détermine un intervalle de réflexion. Si le globule parvenu à l'extrémité de cet intervalle avoit perdu toute sa vitesse par

son mouvement selon une direction différente de celle qu'il avoit auparavant. En voilà assez pour le présent sur la lumière, dont nous parlerons plus au long dans la Physique.

216. Tout le monde sait que les divers sels ont des formes anguleuses différentes, capables de faire des impressions différentes sur les papilles nerveuses de la langue & du palais; telle est l'origine des saveurs. Les odeurs ne viennent que des vapeurs très-légères qui se détachent du corps odorant: ces vapeurs reçues dans le nez, qui est l'organe de l'odorat, font sur les nerfs olfactoires une certaine impression qui fait rétrograder le fluide nerveux vers le sensorium. Selon que les vapeurs qui se détachent du corps odorant seront propres à produire un mouvement différent dans les esprits animaux, l'ébranlement du sensorium sera aussi différent, & l'âme éprouvera un sentiment agréable ou désagréable, selon que le cerveau sera ébranlé

rallèle, (ce cas est infiniment improbable & ne doit jamais arriver,) le globule seroit repoussé selon une ligne perpendiculaire au plan dans lequel il se trouve. Si le globule se trouve dans l'état qui lui permet de franchir l'intervalle dans lequel agit la force repoussante du milieu, il passera au-delà & aura un accès de facile transmission. Mais il est visible que selon la nature du milieu & l'inclinaison différente, l'état qui fait la facile réflexion ou la facile transmission, doit se trouver dans plus ou moins de globules; c'est pourquoi selon les différentes circonstances & les forces attractives & répulsives du milieu, le rapport de la quantité de lumière réfléchie à celle qui est transmise sera très-différent. Il n'est pas surprenant que les rayons de différentes couleurs aient des intervalles différens; car leurs vitesses différentes exigent des intervalles différens entre les accès opposés, & ces accès doivent revenir dans des intervalles égaux de tems, déterminés par les durées différentes des oscillations des globules des différentes couleurs. Il est encore facile de concevoir que dans différens milieux les globules de même nature doivent avoir des intervalles différens, puisque leur vitesse change dans ces milieux (voyez les numéros 5 & 6), & que l'action des forces différentes peut altérer & même changer l'ordre de leurs oscillations.

d'une certaine maniere plutôt que d'une autre.

217. Le son consiste de la part de l'air dans une espèce de trémouffement ou de vibration qui le rend capable d'ébranler les nerfs acoustiques, c'est-à-dire les nerfs par le moyen desquels nous entendons. On peut dans la théorie dont il est ici question, répondre facilement à une difficulté que M. Euler proposa il y a quelques années à M. de Mairan qui expliquoit la propagation simultanée des différens sons par les divers genres de particules élastiques de l'air. M. Euler lui objecta que le grand nombre des sons différens qui peuvent affecter nos oreilles & celles des autres hommes demanderoit une série continue de particules de tout genre pour transporter ces sons, ce qui ne peut pas avoir lieu dans la nature ; puisqu'autour d'un globe situé dans un plan on ne peut disposer que six autres globes (égaux) dans le même plan. Cette objection est facile à résoudre par les principes exposés ci-devant : car dans la théorie que nous développons, les molécules aériennes n'agissent pas les unes sur les autres par un contact immédiat, mais dans une certaine distance qui peut être plus grande que le diamètre de ces particules. C'est pourquoi puisque certains globules peuvent dans les mêmes distances être inertes relativement à certains autres, tandis qu'ils exercent une action considérable sur d'autres ; il est évident que les molécules aériennes de différens genres peuvent être tellement mêlées que les unes soient mises en mouvement, tandis que leurs voisines sont en repos. Bien plus quand on supposeroit que les molécules voisines sont aussi mises en mouvement, les unes doivent avoir des mouvemens conformes à cause de la distribution semblable des points qui les composent qui leur permet de faire des oscillations isochrones ; mais les vibrations des globules différens se troublent mutuellement, tandis que celles des molécules semblables sont entretenues (après la première action) par les mouvemens conformes & semblables des autres, comme nous voyons que cela arrive dans les cordes consonantes des instrumens, dans lesquels l'une étant frappée les autres deviennent sonores.

Ne peut-on pas expliquer par les mêmes principes, pourquoi une corde de violon & une flûte qui rendent

le même ton, ne nous affectent cependant pas également ? Les molécules de la flûte & de la corde de violon étant différentes, ne peuvent-elles pas agir d'une manière différente sur les mêmes molécules de l'air, & communiquer à leurs particules un mouvement de vibration différent; leurs forces répulsives se réunissant (si l'on peut parler ainsi) sur des points différens dans ces molécules aériennes ? ou bien cela ne viendrait-il pas de ce que les fibres de différens instrumens capables de rendre le même ton, sont tellement différentes, qu'elles agissent sur des molécules d'air différentes, qui font entendre des sons différens, quoique également graves ou également aigus ? Nous invitons les Physiciens à s'exercer sur ce phénomène, dont personne n'a encore entrepris de rendre raison. Quand à ce qui regarde les sentimens agréables que les accords peuvent exciter dans notre ame, nous en avons parlé ailleurs. Nous nous contenterons d'ajouter ici que l'ordre & le rapport qu'on observe entre les mouvemens des fils de trois pendules dont les longueurs sont comme 16, 9, 4 (fig. 139), situés assez près les uns des autres, & dont les vibrations commencent en même-tems, causent un sentiment agréable, ainsi que les accords formés par les sons qui dans le même-tems rendent des vibrations dont les nombres sont comme 4, 3, 2; de sorte qu'il y a une espèce d'analogie entre l'organe de l'ouïe & celui de la vue.

218. Nous avons dit plus haut que la cause de la chaleur, consistoit dans une espèce de fermentation de la lumière avec la matière sulphureuse; le froid consistera donc, ou dans le défaut de cette substance, ou dans le défaut de mouvement du fluide igné ou lumineux. Il peut aussi se faire qu'il existe des molécules nitreuses, ou à peu-près de la même nature, qui par leurs forces attractives enchaînent pour ainsi dire les particules dont la fermentation produiroit la chaleur, & parce que le fluide igné est très-élastique, qu'il cherche à se mettre en équilibre en se répandant dans les lieux où il est moins abondant, un corps très-chaud peut facilement être refroidi par le séjour que fait auprès de lui un autre corps froid : le fluide lucide qui fermentoit dans le premier, se répandant en grande partie dans le second. Si un violent tourbillon qui entraîne l'air vers  
le



le ciel passe auprès d'une maison fermée ; l'air intérieur par sa force expansive brise les portes & les fenêtres & renverse tout pour aller occuper l'espace de celui que le tourbillon a enlevé , afin de rétablir l'équilibre ; de même le fluide igné abandonne les corps dans lesquels ils se trouve en grande quantité pour entrer dans les corps voisins qui en manquent & se mettre en équilibre. On ne doit pas s'imaginer cependant que le feu se répand également dans tous les corps ; car selon leur différente force attractive les uns peuvent retenir & attirer une plus grande quantité de ce fluide que les autres : aussi voyons-nous que les corps denses comme le mercure & le fer refroidissent plus nos mains & en moins de tems que le bois , ce qui vient sans doute de leur plus grande force attractive qui nous enlève le fluide igné Il peut se faire aussi que certaines substances repoussent le feu dans son état naturel , quoiqu'elles l'attirent lorsqu'il se trouve mêlé avec d'autres matieres. Ainsi rien n'empêche de dire que l'air repousseroit la matiere ignée ; mais qu'à cause des particules hétérogènes qu'il contient , parmi lesquelles se trouve sur-tout l'eau réduite en vapeurs , il en enlève une petite quantité. C'est pourquoi lorsque les molécules qui voltigent dans l'air , & qui peuvent attirer ou fixer cette substance , s'approcheront des autres comme de celles de l'eau , il pourra arriver des concrétions & des congelations subites : ce qui rend raison des neiges & de la grêle. Et parce que les corps n'ont pas tous les mêmes forces pour attirer , ou retenir le feu , on pour agir sur lui , il est visible que la diminution ou l'augmentation de la chaleur ne doit pas être la même dans tous les corps , ni suivre exactement la raison de leur densité.

219. ON peut tirer des mêmes principes l'explication des phénomènes électriques. Par la théorie de l'ingénieur Franklin , confirmée par le savant Beccaria , il paroît qu'il y a dans la nature un fluide *électrique* qui peut facilement se mouvoir sur la surface & dans l'intérieur de certains corps ( qu'on appelle *corps électriques par communication* ) tandis que les corps qu'on nomme *électriques par eux-mêmes* ou *idioélectriques* empêchent son mouvement quoiqu'ils aient ( du moins plusieurs ) une grande quantité de ce fluide qu'ils retiennent par leur force attractive , &c.

qu'ils laissent échapper quand on les frotte, ou que leurs parties internes acquièrent un certain mouvement d'oscillation. Dans les corps non électriques par eux-mêmes le fluide dont nous venons de parler se met en équilibre, quitte celui qui en contient une plus grande quantité, pour se répandre dans les lieux circonvoisins jusqu'à saturation; mais à cause de leurs forces attractives & répulsives différentes, de la disposition de leurs parties & de leur densité, la quantité nécessaire pour la saturation n'est pas la même pour tous. Aussi-tôt qu'on approche à une certaine distance deux de ces corps dont l'un a une plus grande quantité respective de fluide, ou dont l'un est électrique par excès & l'autre par défaut, les atmosphères électriques qui les environnent & dont la force attractive empêchoit la dissipation, ne gardent plus leur équilibre; mais le fluide coule du corps électrique par excès vers celui qui est électrique par défaut jusqu'à ce qu'il y ait une saturation respective égale. Mais on sent bien cependant que le fluide électrique de ce dernier peut aussi être mis en mouvement de manière qu'une partie tende vers le premier pour remplir, si l'on peut parler ainsi, une partie de l'espace que celui-ci vient d'abandonner; de manière qu'il doit y avoir des mouvemens simultanés opposés jusqu'à ce que l'équilibre soit entièrement établi.

Dans ces écoulemens, les corps, s'ils sont légers, ou quelquefois s'ils sont librement suspendus, s'approchent les uns des autres, & si le mouvement & la quantité de fluide condensé est considérable, on verra des étincelles, & des explosions. Les nuages peuvent devenir fortement électriques, les uns par excès, les autres par défaut, & les torrens électriques sortant des uns pour entrer dans les autres peuvent produire les éclairs, la foudre & le tonnerre. Il est visible que lorsqu'il n'y a point d'obstacle suffisant, les corps dont les parties attirent quoiqu'inégalement le fluide électrique, doivent s'approcher les uns des autres. L'air humide enlevant continuellement le fluide électrique qu'un globe de verre frotté fournit à un conducteur métallique, doit nuire aux phénomènes électriques, comme l'expérience l'apprend. Mais l'expérience de Leyde est plus difficile à expliquer; il paroît néanmoins que la matière électrique

qui se condense dans une bouteille à demi remplie d'eau , peut traverser en partie cette bouteille si elle est mince , & que la force expansive du fluide électrique soit aidée par l'attraction d'un corps non électrique appliqué à la surface intérieure du verre , alors la nouvelle matière affluente attirée de proche en proche par celle qui a traversé le verre & par le corps non électrique se condense de plus en plus dans la bouteille , l'attraction l'emportant sur la répulsion ; & lorsqu'on établit une communication libre entre les deux surfaces du verre par le moyen des corps électriques par communication , le fluide électrique coule rapidement de la surface intérieure du verre à l'extérieure : ce qui paroît confirmer cette explication ( qui peut également s'appliquer aux phénomènes du cadre de Franklin ) c'est que l'expérience de Leyde manque lorsque le verre est trop épais.

A l'égard de la différence entre la matière ignée & le fluide électrique , elle paroît consister principalement en ce que celle-ci est moins propre à fermenter , soit par la collision , soit par son mélange avec les substances sulfureuses (\*).

(\*) Les phénomènes de l'aimant semblent plus difficiles à expliquer, cependant il paroît qu'on peut les réduire à l'attraction de certaines substances entr'elles; car la direction & l'inclinaison peuvent s'expliquer par la seule attraction. Nous observons que l'aiguille aimantée s'incline auprès des mines de fer. S'il y avoit vers les deux pôles des grands aimans à quelques distances les uns des autres, des grandes quantités de fer, il est visible que toutes les aiguilles aimantées se dirigeroient vers les pôles; mais avec quelque déviation vers les autres lieux de la terre, dans lesquels se trouveroient des masses de fer ou d'aimant dont l'action seroit assez forte pour produire un effet sensible, & plus ou moins selon les distances; & parce que les mines se forment, s'altèrent ou se détruisent continuellement, il y aura des variations plus ou moins irrégulières, selon que les changemens s'opéreront avec plus ou moins de régularité. Différens phénomènes font voir que la force attractive des aimans naturels ou artificiels dépend de la disposition & de l'arrangement des parties. A l'égard des pôles attractifs d'un

220. LA terre, selon les Anciens, est un corps fossile, simple, friable, dur, que l'on ne peut volatiliser, & qui n'est dissoluble ni dans l'eau, ni dans l'air, ni dans l'huile, ni dans l'alcool. On doit distinguer principalement deux espèces de terre, l'une stérile, l'autre fertile : la seconde contient une matière onctueuse, dissoluble dans l'eau ; la première ne renferme rien de semblable. Le fumier, les limons, les végétaux pourris rendent la terre fertile ; parce que ces substances contiennent beaucoup de cette terre onctueuse, qui pa-

côté & répulsifs de l'autre, on peut imaginer que cela ne vient que de ce que les forces attractives de l'un sont plus grandes que celles de l'autre. Ainsi en supposant un aimant MN suspendu en  $\epsilon$  (fig. 150), si les forces attractives de la partie CM se réunissent en C, celles de la partie Tm de l'autre aimant en D, & qu'on suppose pour les raisons que nous allons développer, que les forces D & les forces C conspirent, tandis que les forces P de la partie  $\epsilon$  N & les forces F de la partie Tn de l'autre aimant agissent pour approcher les pôles N & n ; si ces dernières forces sont plus grandes que les premières, l'aimant suspendu tournera autour du point  $\epsilon$ , les pôles N & n s'approcheront, tandis que les pôles M & n paroîtront se fuir. La raison pour laquelle les forces qui tendent à unir les points F & P, peuvent être plus grandes que celles qui agissent sur les points D & C peut venir de la disposition, des distances & de l'arrangement des particules. La distance à laquelle ces forces agissent fait une difficulté plus grande ; mais peut-être y a-t-il une loi différente & qui s'étend à des plus grandes distances à l'égard du fer & de l'aimant & des matières dont les molécules ont une disposition analogue à celle de ces substances, à moins qu'on n'admette une espèce de fluide particulier qui par ses forces pourroit agir sur des masses éloignées, quoiqu'un tel fluide ait jusqu'ici échappé aux yeux des observateurs. Je ne donne tout ceci que comme une conjecture sur laquelle on ne doit pas faire grand fonds ; mais je pourrai reprendre cette matière qui demande une longue discussion, dans un Ouvrage de Physique que je me propose de publier dans peu de tems.

roit être composée d'eau , de sel & d'une matiere particuliere onctueuse.

221. LES pierres croissent & se forment continuellement dans la terre : car les carrieres une fois épuisées, se remplissent de nouveau après un long intervalle de temps ; & l'Histoire de l'Académie , année 1738, fait mention des carrieres de pierres à fusil qu'on trouve près de Saint-Aignan dans le Berry , dont on tire depuis long-temps une si grande quantité : lorsqu'une est vuide on la ferme , & quelques années après on y trouve des pierres à fusil comme auparavant : ainsi les carrieres épuisées se remplissent de nouveau , & leur fécondité ne peut être révoquée en doute. La formation des pierres est dûe à une espece de suc pierreux ; car on observe fréquemment que des morceaux de bois , des os & des plantes se changent en pierres ; ce qui semble exiger que les parties de ces corps soient réduites en chaux , désunies & emportées par un suc pierreux qui transporte une nouvelle matiere. On trouve souvent dans les cailloux les plus durs , des pierres précieuses & des os. On a trouvé à Rome dans une statue de marbre quatre instrumens de fer considérables , dont les Anciens se servoient pour tirer les pierres. Ces outils ayant été abandonnés dans les carrieres , le suc pierreux les avoit peu-à-peu incrustés

222. TOURNEFORT a pensé que les pierres & les métaux viennent , à la maniere des plantes , de semences ou petits œufs ; mais cette opinion paroît peu probable , & il est facile de concevoir la formation des pierres par le moyen d'un suc particulier , sans admettre aucune semence : car les mollécules acqueuses contenues dans ce suc pierreux , venant à s'évaporer insensiblement , les parties salines & terrestres s'approchent de plus près , & acquièrent une plus grande adhérence. Ne voit-on pas tous les jours que par la seule évaporation de l'eau salée , les sels se forment en cristaux ? L'origine du crystal dans les cavernes souterraines paroît être la même. Plus l'humidité s'évapore lentement & plus elle contient de ces petites lames dont sont composés les cristaux , plus la pierre est transparente & solide. Les écailles dont sont environnés les corps de certains animaux ont une semblable origine.

Le caillou tient le milieu entre les pierres opaques & les transparentes ; & si les pierres une fois formées sont de nouveau pétrifiées , si l'on peut s'exprimer ainsi , elles se changent en cailloux : aussi trouve-t-on des pierres qui ne sont cailloux que d'un côté ; on trouve encore des cailloux dont les noyaux ne sont pas bien solides. De la même manière toutes les terres compactes peuvent se changer en pierres.

Certaines pierres figurées ont la forme de certains os , de certaines plantes , de certains coquillages.

Les turquoises ont une couleur bleue , leur dureté est à peine égale à celle du crystal ; elles tirent leur origine des os des animaux remplis d'un suc pierreux , & elles acquièrent cette belle couleur par l'action du feu : en effet , quant on les tire de la terre elles n'ont pas cette couleur , seulement on observe comme des veines obscures d'où la couleur , par l'action du feu auquel on expose ces pierres , se répand dans toute la masse. C'est la raison pourquoi les turquoises dans lesquelles ces sortes de veines sont fort rares , n'acquièrent qu'une couleur très-foible.

Le diamant est la plus belle & la plus chère des pierres précieuses ; il y en a de différentes couleurs , les blancs sont les plus communs. Si on l'enferme dans un vase de porcelaine non-cuite , & qu'on l'expose à un grand feu , il s'évapore , dit-on , sans laisser aucun résidu & sans scories.

Le bezoard est une espèce de pierre qui s'engendre dans le corps de certains animaux , principalement dans l'estomac d'une espèce de chèvre sauvage , qui se nourrit d'herbes aromatiques. Il est composé de plusieurs lames d'une couleur verdâtre , que la chaleur peut séparer les unes des autres ; mais le noyau est dur , & renferme souvent des pailles , des poils , des cailloux , &c.

Le calcul de la vessie tire son origine d'une inflammation des reins , qui se termine par la suppuration lorsqu'elle n'est pas bien traitée , ou que le mal est plus fort que les remèdes. Alors le pus qui se trouve dans les mammelons que forment les dernières divisions des artères avec les conduits de l'urine , enveloppe les parties grasses , salines , terreuses de l'urine , & forme des grains que l'urine en passant entraîne souvent avec elle :

parvenus dans le vessie, s'ils n'en sont bientôt expulsés, ils servent de base aux calculs. Les parties grasses, terrestres, salines s'attachent à leur surface & se durcissent insensiblement. Cette incrustation successive forme de petites lames, produit les pierres de la vessie, qu'il est fort difficile de dissoudre par les médicamens, & très-dangereux d'extraire par une opération.

Le corail paroît n'être autre chose qu'une espèce de ruche où se logent des insectes marins. Quelques Auteurs en font une plante. L'aimant est un espèce de minéral qui approche beaucoup de la nature du fer ; mais sa nature n'est pas aussi connue qu'on le désireroit.

223. OUTRE les pierres, notre globe renferme encore différentes substances métalliques. Les métaux sont des corps d'une nature particulière ; leur gravité spécifique est plus grande que celle d'autres corps ; on peut les fondre par le moyen d'un feu plus ou moins violent ; ils diffèrent beaucoup entr'eux par la ductilité, la dureté, la couleur & le poids. La table suivante représente la gravité spécifique des sept métaux connus des Anciens.

L'or	1368
Le mercure	977 $\frac{1}{2}$
Le plomb	828
L'argent	744
Le cuivre	648
Le fer	576
L'étain	532 $\frac{1}{2}$

A ces métaux on doit joindre la platine ou l'or blanc, ce métal qu'on trouve dans l'Amérique Espagnole est fort dur ; sa gravité spécifique est à peu-près la même que celle de l'or.

La fluidité du mercure ne vient que de la grande quantité de fluide igné qu'il contient ; car les Académiciens de Pétersbourg ont remarqué en 1759 qu'un grand froid peut le rendre solide & malléable. Il est donc certain que l'argent vif, ainsi que les autres métaux, est fluide ou solide selon la plus ou moins grande quantité de feu qu'il renferme.

Il paroît que l'origine des métaux est semblable à celle des pierres, c'est-à-dire qu'il existe dans les entrailles de la terre une espèce de suc métallique, qui, en se filtrant à travers les veines des pierres, forme les métaux parfaits & imparfaits. On trouve souvent des particules métalliques dans les plantes, elles y ont été transportées avec le suc nourricier. On trouve même des insectes renfermés dans les minéraux, preuve certaine que ces matieres ont été autrefois molles &

fluides. L'on peut dissoudre les matieres métalliques & les rendre volatiles : pourquoi donc n'y auroit-il pas dans la terre un suc qui contienne des corpuscules propres à se réunir & à former les métaux ?

Les Alchimistes se vantent de sçavoir faire l'or & l'argent ; mais bien loin que les chercheurs d'or jouissent d'une grande fortune , la plupart périssent dans la misère ; & si jamais l'Art a paru faire de l'or , certainement l'Artiste avoit renfermé des petits morceaux d'or ou de la poudre de ce métal dans les soufflets, dans les charbons ou dans la spatule dont il se servoit pour remuer la matiere contenue dans le creuset.

224. MAIS qu'est-ce que la matiere ? Dans la théorie dont il s'agit ici les corps sont composés d'un nombre fini de points homogènes inétendus que les forces répulsives tiennent éloignés les uns des autres tandis que les forces attractives les empêchent de se dissiper. S'il étoit un monde dont les points fussent soumis à une loi différente de forces , de maniere que ses molécules n'eussent aucune action sur celles de notre Univers & réciproquement , ce monde quoiqu'existant au milieu du nôtre n'auroit aucun commerce avec lui, nous n'en aurions aucune connoissance , nous pourrions passer sans résistance à travers les corps de ce monde ; & les animaux , s'il y en avoit , passeroient à travers de notre corps sans que nous puissions nous en appercevoir. Mais quoique l'homme puisse connoître quelques propriétés des substances corporelles, nous ne devons pas nous flatter de parvenir à la connoissance parfaite de l'intérieur des corps, de la figure de leurs molécules & de la nature des substances. Le grand Architecte de l'univers, en créant la matiere & la sémant pour ainsi dire, dans l'espace, a vu seul toutes les combinaisons & la courbe que chacun de ses points devoit décrire (\*). Car tous les corps sont dans un mouvement

---

(\*) Les Géomètres de ce siècle ont fait les plus grands efforts pour résoudre le fameux problème de trois corps, ou pour trouver la nature de l'orbite de la lune, sans pouvoir se flatter de l'avoir déterminée d'une maniere rigoureuse. Que seroit-



continuel, la terre, les planètes, les comètes, &c. ; les distances des points & les forces qui les poussent changent continuellement, ils se meuvent dans des courbes compliquées dont l'éternel Géomètre connoît seul la nature. Et parce que le nombre de ces points étendus est borné & que l'espace est étendu, il est infiniment probable & par conséquent certain, ( car une probabilité infinie doit être regardée comme une certitude. ) qu'aucun point de matiere n'occupera jamais deux instans de suite le même point de l'espace, n'y reviendra jamais après l'avoir une fois quitté, & ne se trouvera même jamais dans le lieu dans lequel s'est

ce, s'ils vouloient résoudre le problème dans lequel on demanderoit de trouver la courbe que décrit une planète animée d'une force de projection, tandis qu'elle est attirée en même tems par toutes les autres planètes & les comètes. La parfaite connoissance des mouvemens de la lune est si cachée, & si embrouillée de difficultés ( ainsi que l'avoue M. Euler dans ce fameux ouvrage, intitulé : *Theoria motuum lunæ nova methodo pertractata una cum tabulis astronomicis unde ad quodvis tempus loca lunæ expeditè computari possunt*, &c. Petropoli 1772 ) qu'elle paroît surpasser les forces de l'esprit humain. En effet, si l'on veut calculer les mouvemens des planètes avec exactitude & trouver la courbe véritable qu'elles décrivent, il n'est plus permis de les supposer sphériques, puisque la lune s'éloigne assez de cette figure, & qu'il est hors de doute que les autres corps célestes ne sont pas non plus des globes parfaits. On ne peut donc pas supposer que l'attraction suit la raison renversée du carré des distances, entre leurs centres, quand même cette loi existeroit pour les corps sphériques. Ajoutons à cela que la lune est attirée par les autres planètes, sur-tout par Vénus & Jupiter; bien plus, il peut arriver qu'une comète produise dans cet astre des troubles assez considérables, qu'on ne peut ni prévoir ni calculer. Il ne faut donc pas se flatter que les Géomètres connoîtront un jour la vraie & exacte théorie de la lune : ce problème, comme bien d'autres, ne sera jamais, selon toutes les apparences, complètement résolu.

trouvé un autre point de matiere. Quelle sagesse ne faut-il pas pour distribuer les points de maniere qu'il en résulte des molécules de tant de genres propres à former tous les corps naturels (\*) ; pour résoudre ces problèmes si élevés qui ont rapport au nombre infini de combinaisons possibles , & pour choisir celles qui étoient propres à représenter cette sorte de phénomènes que nous admirons dans l'univers. Quelle étoit ta folie grand Descartes lorsque tu disois : *Donnez-moi de la matiere & du mouvement & je ferai un monde* ? Si ta demande eût été accordée, nous aurions vu, je pense, un monde bien ridicule. Comment aurois-tu disposé la lumiere pour que ses rayons ne se troublassent point dans leurs mouvemens ; pour qu'ils eussent différentes refrangibilités & différens accès de réflexion & de réfraction suivant les couleurs différentes, pour qu'ils produisissent la chaleur & les fermentations ignées ? D'autre côté quel arrangement aurois-tu donné aux molécules des corps, de quelle épaisseur aurois-tu fait leurs lames propres à réfléchir certaines couleurs, à transmettre ou à absorber les autres ? Connoissois-tu la nature des humeurs & la disposition des parties de l'œil propre à recevoir l'image des objets, à transmettre l'impression au sensorium (\*\*)? Connoissois-tu la nature de l'air,

(\*) Si quelqu'un refusoit d'admettre ce système (que le célèbre Boscovich, qui en est l'inventeur, a développé dans ce fameux livre qui a pour titre : *Theoria Philosophia Naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentium*), & que nous donnons pour ce qu'il est, c'est-à-dire comme une hypothèse physique & non comme une vérité de Géométrie, uniquement parce qu'on y suppose les premiers élémens des corps inétendus, il pourroit en conservant tout le reste, admettre dans ces élémens une étendue très-petite, & la même loi des forces par lesquelles nous les faisons agir les uns sur les autres.

(\*\*) Je suppose aussi que Dieu eût fourni à Descartes les ames qu'il auroit demandées pour animer les corps humains qu'il auroit formés avec la matiere & le mouvement ; mais en vérité ces corps (si cependant on peut dire qu'il en auroit formé) auroient été bien mal construits & bien mal organisés.

ce fluide dans lequel nous nous mouvons , par lequel nous entendons , qui entretient notre vie par la respiration , conserve la chaleur diurne pendant la nuit , produit les vents pour la navigation , enlève les vapeurs d'où se forment les pluies & les neiges qui fertilisent nos campagnes ? Que dirai-je de la gravité qui retient les planètes & les comètes dans leurs orbites , la mer dans ses limites , fait couler les fleuves ; tomber les neiges & les pluies , donne aux pendules ces mouvements uniformes qui servent à mesurer le tems ? Si elle venoit à cesser tout-à-coup , où irions-nous ? L'air se dissiperoit par son élasticité , la moindre impulsion , le moindre vent suffiroit pour détacher un homme de la terre & lui communiquer un mouvement qui le feroit errer dans l'espace immense , le sépareroit du commerce des autres hommes. Quelle géométrie n'a-t-il pas fallu pour trouver les combinaisons propres à former , à nourrir & à développer les corps organisés des hommes & des animaux , les arbres , les fleurs , les plantes différentes ? Mais que sont ces choses en les comparant à celles dont nous n'avons pas la moindre idée , & desquelles nous ignorons même si nous les ignorons ?

Celui là seul peut ignorer qu'il y a un Etre infiniment sage , infiniment puissant , infiniment savant , qui ferme les yeux , les oreilles ou plutôt ( car ce n'est pas assez de les fermer ) qui s'arrache les yeux , le tympan , le limaçon , tout ce qui contribue à la vue & à l'ouïe , ne fait aucune attention , ni à la circulation du sang , ni à la nutrition , ni à son ame , ni à son corps , ni à l'univers ( \* ). Quelle reconnoissance ne devons-nous pas au grand Etre qui en créant la nature & choi-

---

( \* ) Il a cependant paru , il y a quelques années , un ouvrage connu sous le nom de *Système de la Nature* , dans lequel on a fondu , pour ainsi dire , toutes les difficultés que les athées anciens & modernes avoient proposées contre l'existence de Dieu ; mais l'auteur de ce livre fameux que nous avons réfuté fort au long dans notre *Métaphysique* , n'est ni Géomètre ni Physicien.

fissant les moyens propres à obtenir la fin qu'il s'est proposée, nous a comblés de tant de bienfaits, nous a donné des yeux pour voir les astres & tant d'autres merveilles, des oreilles pour entendre, une langue pour communiquer nos pensées à nos semblables, des pieds pour nous transporter d'un lieu dans un autre, des mains pour saisir les corps nécessaires à nos besoins, des grains, des animaux, des fruits délicieux pour nous nourrir, ou pour en faire des boissons encore plus délicieuses, des bois pour nous réchauffer pendant l'hiver, des fruits rafraichissans pour modérer les chaleurs de l'été, des fleurs pour flatter agréablement notre odorat, des plantes, des minéraux & des animaux dont nous tirons tant de remèdes propres à guérir ou à soulager les maladies auxquelles notre machine est exposée, & tant d'autres choses dont j'entreprendrois en vain de faire l'énumération.

Ainsi la Physique, en nous faisant connoître les mouvemens des astres, les végétaux, la nature des corps animés & inanimés & les raisons de tant de phénomènes étonnans que nous présente le spectacle admirable de cet univers, peut nous donner une idée, quoiqu'imparfaite, de la gloire, de la sagesse, de la puissance du grand Etre, & contribuer à faire naître dans nos cœurs des sentimens d'amour, de vénération & de reconnaissance envers l'auteur de tant de merveilles, qui nous a comblés & qui nous comble tous les jours de tant de bienfaits : tels sont les avantages que l'on peut retirer de la contemplation de la nature.

*FIN DU TOME CINQUIEME ET DERNIER.*

607460



Fig. 1<sup>re</sup>

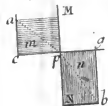


Fig. 5.

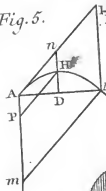


Fig. 10.

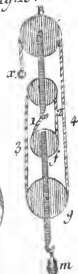


Fig. 2.



Fig. 6.

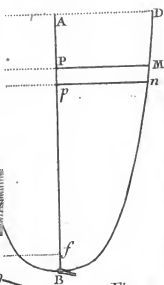


Fig. 7.



Fig. 9.

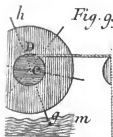
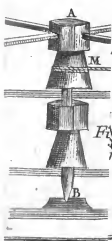
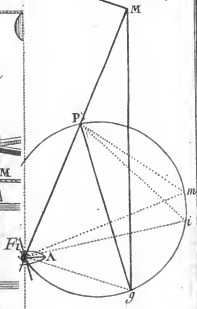


Fig. 17.



Piquet Sculp.

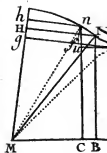


Fig. 23.

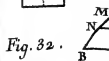


Fig. 32.

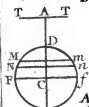


Fig. 36.

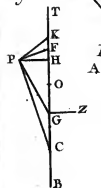


Fig. 28.

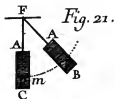


Fig. 21.

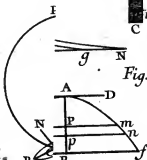


Fig. 22.



Fig. 24.



Fig. 30.



Fig. 31.

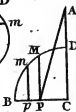


Fig. 33.



Fig. 36.

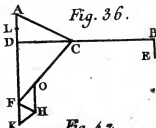


Fig. 42.

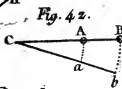


Fig. 43.

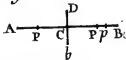


Fig. 37.



Fig. 39.



Fig. 44.

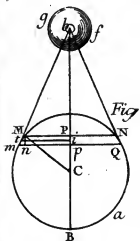
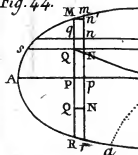
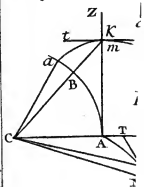


Fig. 60.



46.

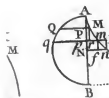
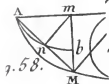
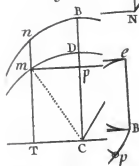
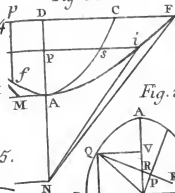
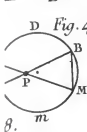
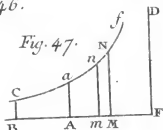
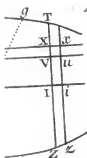


Fig. 63.

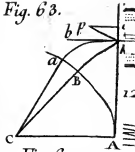


Fig. 67.

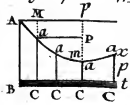


Fig. 76.

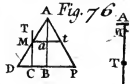


Fig.

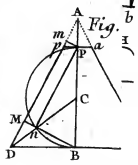
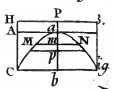
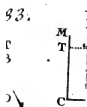
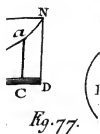
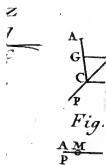


Fig. F





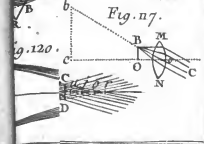
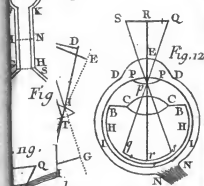
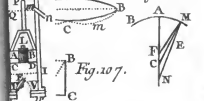
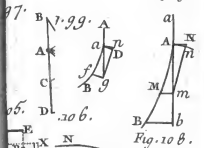
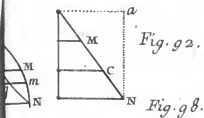


Fig. 12



Fig. 13

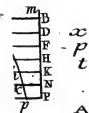


Fig. 143.



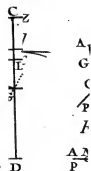
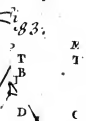


Fig. 77



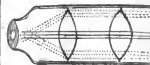


Fig. 12

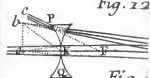


Fig. 128.

Fig.

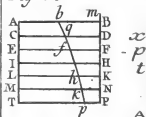


Fig. 134.

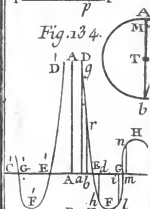


Fig. 143.

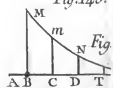
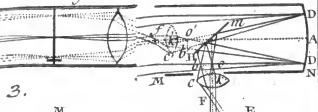
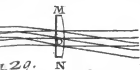


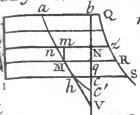
Fig. 122.



3.



129.



127.

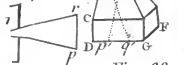


Fig. 126.

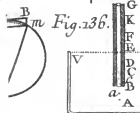


Fig. 136.



Fig. 132.

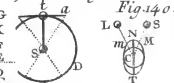


Fig. 140.

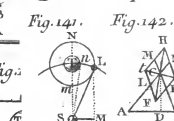


Fig. 141.

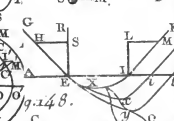


Fig. 142.

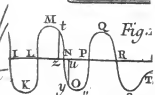


Fig. 146.



Fig. 148.



Fig. 160.





# T A B L E

## D E S M A T I E R E S

CONTENUES DANS CE VOLUME.

### C A L C U L I N T É G R A L.

<i>DES Méthodes de M. Fontaine ,</i>	page 1
<i>Des marques auxquelles on peut reconnoître si une fonction différentielle est intégrable dans l'état où elle est ,</i>	25
SECONDE PARTIE DE LA TROISIEME SECTION ,	55
<i>De l'intégration des différentielles du premier ordre à trois variables ,</i>	ibid.
<i>De la nature des équations différentielles du premier ordre , par lesquelles on détermine en général les fonctions de deux variables ,</i>	58
<i>De la résolution des équations à deux variables , lorsqu'une formule différentielle est donnée en quantités finies ,</i>	59
<i>De la résolution des équations , dans lesquelles de deux formules différentielles , l'une est donnée par l'autre ,</i>	63
<i>De la résolution des équations dans lesquelles on donne le rapport entre deux formules différentielles , &amp; une seule des trois variables ,</i>	66
<i>De la résolution des équations dans lesquelles on donne le rapport entre les quantités <math>\left(\frac{dz}{dx}\right)</math> ,</i>	

$\left(\frac{dz}{dy}\right)$ & deux des trois variables $x, y, z$ ,	72
De la résolution des équations du premier degré à trois variables, étant donnée une certaine relation entre leurs différentielles,	79
Recherche des fonctions de deux variables par la relation des formules différentielles du second degré,	83
Recherche des fonctions à deux variables, par la relation des différentielles de tous les ordres,	109
De l'intégration des équations des degrés supérieurs par la réduction aux inférieurs,	114
Des équations homogènes dont tous les termes contiennent des formules différentielles du même degré,	118
Des équations homogènes qui ne renferment aucun coefficient variable; & dans lesquelles $V$ étant une fonction de $t$ & de $u$ , on a la quantité $t = ax + bz$ & $u = cy + gz$ ; ce qui fait voir que $V$ est une fonction des trois variables $x, y, z$ ,	123
Recherche des facteurs qui peuvent rendre les équations intégrables,	136
Méthode pour trouver dans une infinité de cas l'intégrale finie d'une équation par une seule intégration,	147
Des trajectoires orthogonales,	161
Usages du Calcul intégral dans la recherche des courbes par quelque propriété donnée,	186
CALCUL DES VARIATIONS,	200
De la variation des formules intégrales à trois variables $x, y, z$ , dont la relation est déterminée par deux équations, de manière que l'on peut	

<i>regarder deux variables quelconques prises séparément comme une ,</i>	234
<i>De la variation des formules à trois variables , dont la relation est donnée par une seule équation ,</i>	242
<i>Usages du Calcul des variations dans la Géométrie ,</i>	256
<i>Application du Calcul des variations à la Mécanique ,</i>	274
SECTION QUATRIÈME. Problèmes Physico-Mathématiques , 279	
<i>Théorie du centre de percussion ,</i>	322
<i>Autre méthode pour trouver le centre de percussion des solides qui font leurs oscillations autour d'un axe ,</i>	334
<i>Du mouvement de rotation &amp; de projection ,</i>	345
<i>Du moment d'inertie ,</i>	354
<i>De l'attraction ,</i>	362
<i>De la courbure des cordes ,</i>	373
<i>De quelques mouvemens dans les lignes courbes &amp; de la figure de la Terre ,</i>	376
<i>Du mouvement des pilons dans les moulins àoudre ,</i>	396
<i>Des puissances qui tendent les cordes ou les fils ,</i>	401
<i>Des machines accélérantes &amp; uniformes ,</i>	408
<i>Des corps qui se meuvent dans les fluides ,</i>	431
<i>De l'Hydrodynamique ,</i>	445
<i>Usage du Calcul intégral dans la recherche des mouvemens qui dépendent d'une force accélératrice ,</i>	474
<i>Des cordes vibrantes ,</i>	484

# 656 TABLE DES MATIÈRES.

Méthode pour mesurer la hauteur des lieux par le moyen du baromètre ,	490
Du Son & de la Musique ,	506
De l'Optique ,	526
De l'intensité de la lumière qui traverse des milieux diaphanes ,	548
Théorie des forces Physiques ,	559
De l'existence des forces attractives & répulsives ,	566
Application de la théorie des forces Physiques à la Mécanique ,	609
Application de la théorie précédente à la Physique ,	620

## FIN DE LA TABLE.

*Nota.* Malgré tous nos soins , il s'est glissé quelques fautes d'impression faciles à appercevoir.

### TOME V.

Page. Ligne. Faute. Correction.	Page. Ligne. Faute. Correction.
25 .. 10. $\frac{dA}{dx} = \frac{dB}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dA}{dy}$	311 .. 4 .. VPn .. VCn.
Cette faute ne se trouve pas dans tous les exemplaires.	323 .. 1 .. BP .. AP.
54 .. 1 .. ceux .. les termes.	411 .. 17 .. un maximum. variable.
106 .. 23 .. Euler .. Euler.	429 .. 18 .. 3 diamètres. 3. diamètre.
138 .. 21 .. $dy$ .. $dx$ .	507 .. 13 .. $\frac{n}{N}$ .. $\frac{n}{N}$ .
192 .. 1 .. ordonnées .. variables.	521 .. 20 .. la ut .. la UT.
203 .. dern. $dz = \&$ .. $dz = 0 \&$	Ibid. x 21 .. UT mi .. ut mi.
214 .. 9 .. $ppQ$ .. $ddQ$ .	556 .. 11 .. entr'elles : : entr'el-les comme.
252 .. 33-34-35 .. $g'$ .. $g$ .	743 .. 57 .. CN .. CD.
Ibid. 36 .. $g$ .. $g'$ .	
293 .. 3 .. grande .. petite.	Dans le Tome III.
	304 .. 34 .. $(x + p)$ .. $(x + p)^\circ$ .

Achevé d'imprimer pour la première fois le 25 de Juillet 1774.

De l'Imprimerie de J. G. CLOUSIER, rue Saint-Jacques, vis-à-vis celle des Mathurins.



